

BULLETIN DE LA S. M. F.

THÉODORE VOGEL

Sur les systèmes déferlants

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 63-75

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__63_0

© Bulletin de la S. M. F., 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SYSTÈMES DÉFERLANTS ;

PAR M. THÉODORE VOGEL.

I. Systèmes déferlants. — Nous rappellerons d'abord d'une façon extrêmement sommaire les résultats de nos recherches antérieures relatives aux systèmes physiques déferlants.

Nous avons nommé ainsi des systèmes dont l'évolution se décompose en phases réglées par des lois nettement différentes, se succédant de façon brusque et, plus particulièrement, ceux dont une phase récurrente est constituée par un saut brusque (correspondant, au point de vue du mathématicien, à une discontinuité de première espèce). Pour le physicien, il ne peut s'agir ici que d'une schématisation, tout saut ayant une certaine durée dans le monde physique; mais cette schématisation peut paraître, à certains égards, plus féconde que l'approche par le continu avec croissance indéfinie d'un paramètre, comme par exemple dans la célèbre théorie des oscillations de relaxation de B. van der Pol. Suivant les paroles de J. Boussinesq : « Si la continuité simplifie les choses quand elle en relie plusieurs qui suivent une même loi, elle les complique, au contraire, le plus souvent, lorsqu'elle établit la transition entre deux catégories d'objets ou de faits régies par deux lois simples différentes; et c'est alors une discontinuité fictive, un passage brusque de la première catégorie à la seconde, qui rend les questions abordables » (1).

Dans nos publications antérieures, nous avons pris pour type de système déferlant celui régi par des équations différentielles de la forme

$$(1) \quad \frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} = \frac{dt}{T(x, y)},$$

complétées, pour des raisons que nous avons longuement exposées, par une « équation de continuité »

$$S(x, y) = \text{const.},$$

qui permet de déterminer la position de l'affixe sur le lieu des discontinuités $T(x, y) = 0$ à l'instant qui suit immédiatement celui où cette courbe est atteinte en suivant une trajectoire $R(x, y) = \text{const.}$ du système continu

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

(1) *Applications des potentiels*, 1885, p. 217.

L'affixe représentatif du système suit alors des arcs de courbe de la famille R, arrêtées aux deux extrémités par des intersections avec la courbe frontière T et reliés les uns aux autres par des sauts brusques le long d'une courbe de la famille S (fig. 1). Dans certains cas, il peut se présenter des solutions périodiques stables, que l'on peut nommer des oscillations de déferlement. Supposant alors certaines propriétés simples aux fonctions X, Y, T, nous avons discuté les conditions d'existence et de stabilité de ces solutions, en fonction notamment de la nature et de la position des points singuliers des trajectoires R et S.

Nous nous proposons ici de reprendre la question dans ses grandes lignes pour un système un peu plus général et de l'éclairer d'un jour différent.

Le système représenté par les équations (1) n'est pas héréditaire, la loi du mouvement de l'affixe à tout instant ne dépendant que de ses coordonnées à cet

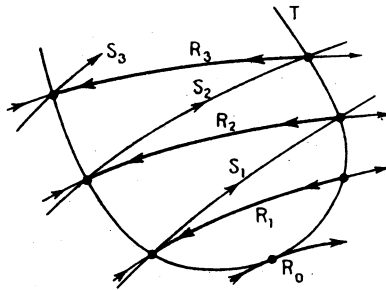


Fig. 1.

instant; X, Y, T sont des fonctions de point. Le système est, par contre, héréditaire, s'il intervient aussi dans la loi du mouvement des fonctions de ligne, sous la forme d'intégrales prises le long de la trajectoire parcourue jusqu'à l'instant considéré; ces intégrales expriment alors l'effet accumulé des états antérieurs du système. Les équations prennent une forme intégrô-différentielle; par exemple, on pourra avoir

$$(2) \quad \frac{dx}{F(X_i, I_i)} = \frac{dy}{G(Y_i, J_i)} = \dots,$$

où les X_i , Y_i sont des fonctions de point et les I_i , J_i des intégrales telles que $\int_0^s \Xi_i(\xi, \eta) ds$, prises le long de la trajectoire à partir de l'état initial.

Un algorithme très simple vient immédiatement à l'esprit, qui fait entrer les systèmes déferlants dans la classe des systèmes héréditaires à titre de cas particulier: c'est celui de l'intégrale de Stieltjes. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\begin{aligned} 2F(X, I) &= (X_1 + X_2) + (X_1 - X_2) \cos I, \\ 2G(Y, J) &= (Y_1 + Y_2) + (Y_1 - Y_2) \cos J, \end{aligned}$$

avec

$$I = J = \int_0^s \pi d\mu(s),$$

la « masse » μ étant distribuée avec la densité 1 le long d'une courbe T, et nulle hors de cette courbe : l'hérédité du système s'exprimera ici par la parité du nombre d'intersections de la trajectoire (entre zéro et t) avec la frontière T; la trajectoire actuelle sera une R, intégrale de

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{Y_1},$$

ou une S, intégrale de

$$\frac{dx}{X_2} = \frac{dy}{Y_2},$$

suivant que les intersections antécédentes sont en nombre pair ou impair.

Il n'est utile de supposer, dans la considération d'un tel système, que les vitesses soient infinies ni sur les S, ni sur T, comme on avait dû le faire pour le système déferlant particulier (1); on pourra, par exemple, adopter éventuellement un temps local, moyennant quoi le troisième membre de (2), non spécifié ci-dessus, se réduirait à dt . C'est ce que l'on supposera dans la suite de cet exposé (2).

Soit $T(x, y) = 0$ l'équation de la courbe frontière T : à chaque position de l'affixe dans le plan des x, y correspond une valeur de T, de sorte que le long d'une trajectoire quelconque du plan, T est une fonction du temps, qui s'annule sur la courbe frontière. La variation de cette fonction le long de la trajectoire $F(x, y) = 0$ est déterminée par la dérivée $T \frac{\partial(T, F)}{\partial(x, y)}$, de sorte que le point frontière, intersection de F et de T, sera répulsif ou attractif, pour les mouvements le long de F, suivant que le jacobien ci-dessus sera positif ou négatif. Le mouvement ne pourra se poursuivre au delà d'un point frontière, sur la même trajectoire, que si le jacobien y est nul (point double de la courbe T, ou point de contact de T et de F). Un tel point frontière exceptionnel sera dit « transitif pour la trajectoire F ». Dans la suite, on désignera la répulsivité par le symbole \oplus , et l'attractivité par \ominus .

Étant donnée une famille quelconque de trajectoires, ses points transitifs découpent sur T des arcs dont les points sont tous \oplus ou tous \ominus ; dans le problème considéré ici, on a affaire à deux familles de trajectoires, R et S, de sorte qu'il pourra exister quatre espèces d'arcs sur T, à savoir $\oplus\oplus$, $\oplus\ominus$, $\ominus\ominus$ et $\ominus\oplus$, le premier symbole ayant trait aux R, et le second aux S. Lorsqu'on suit la courbe T, l'un de ces symboles change lorsqu'on traverse un point transitif; les deux ne peuvent changer à la fois que si un point de T est transitif pour l'une et pour l'autre famille (cas, notamment, des points doubles de T); il y aura alors géné-

(2) Les systèmes déferlants se présentent dès lors comme une classe particulière de systèmes héréditaires, susceptibles de se transformer graduellement, par modification de la distribution, soit en systèmes héréditaires non déferlants ou en systèmes non héréditaires du type classique. On remarquera que les systèmes déferlants ainsi définis ne vérifient pas le postulat de Volterra sur la dissipation de l'action héréditaire, mais aussi bien représentent-ils des régimes non dissipatifs au sens classique : cela ne peut être une gêne dans l'étude des solutions périodiques. Si l'on voulait pousser plus loin la discussion de tel système particulier, sans doute faudrait-il y introduire, en même temps que des termes non héréditaires d'amortissement, des facteurs de même nature portant sur les termes héréditaires.

ralement avantage, pour les études de stabilité, à considérer l'existence d'un arc de longueur nulle entre deux points transitifs des deux familles.

Au cours de l'évolution normale d'un système, le point affixe doit se diriger vers un point donné, puis le quitter; les seuls points frontières que l'on puisse ainsi rencontrer sont ceux dont la nature est différente par rapport aux deux familles (points $\odot\oplus$ ou $\oplus\odot$); à l'origine de l'évolution du système ($t=0$), l'affixe peut se trouver en un point $\oplus\oplus$, mais il ne repassera plus jamais par un tel point. Pour les arcs $\odot\odot$, il se présente une difficulté d'interprétation: l'affixe qui les toucherait ne pourrait ni continuer son mouvement, ni s'arrêter (sauf au cas exceptionnel d'une vitesse d'impact nulle, c'est-à-dire au cas où le point attractif en question serait un point singulier de la famille de trajectoires suivie par l'affixe avant l'impact). Dans le cas général, on est forcé de considérer que le système, qui ne peut ni s'arrêter ni évoluer, cesse d'exister: au point de vue physique, ou bien il est détruit, ou bien il survient une modification organique grâce à quoi il est régi désormais par d'autres lois, ce qui équivaut à la destruction du système originel. Nous dirons que le système est pérenne si de pareilles circonstances ne peuvent se présenter à aucun instant de son évolution.

Or, des points doublement attractifs se présenteront *nécessairement* si, en suivant T, on rencontre un nombre impair de points transitifs de l'une des familles entre deux points transitifs successifs de l'autre; ainsi, une condition nécessaire à la pérennité d'un système déferlant est qu'entre deux points transitifs consécutifs sur T d'une famille, il y ait toujours un nombre pair (nul ou non) de points transitifs de l'autre famille. Cette condition n'est pas suffisante; pour assurer la pérennité, il faut de plus montrer qu'il existe des points frontières où l'un des jacobiens considérés est positif.

Les considérations qui précèdent suffisent pour l'étude du problème de l'existence et de la stabilité de solutions périodiques du système déferlant. Nous n'y ajouterons qu'une remarque: c'est que la nature périodique et la stabilité d'une solution n'est pas modifiée par une perturbation infiniment petite des T, R ou S (Bendixson); on pourra donc désormais supposer toutes ces courbes continues et algébriques.

2. Cas régulier. — Nous nommerons régulier le cas où T est un cycle sans points doubles, et où le domaine fermé D de frontière T ne contient aucun point singulier des R ni des S. Nous supposerons que l'affixe de l'état initial du système soit $M_0 \in D$.

Soit τ l'image de T par la transformation continue et univoque

$$\xi = R(x, y), \quad \eta = S(x, y);$$

les points transitifs de T auront pour images ceux où τ admet une tangente parallèle à l'un ou à l'autre axe de coordonnées; si le système est pérenne, il y aura un nombre impair de points d'inflexion de τ entre deux points transitifs consécutifs de la même famille. Les seules solutions périodiques possibles dans le cas régulier sont celles où l'affixe quittant une R au point frontière emprunte une S qui le ramène sur la même R au prochain point frontière, de sorte que le

couple de valeurs r, s de R et S représente deux points frontières : ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution périodique est que τ admette un point double Π .

On dira que la solution en question est stable si l'affixe, écarté du point double par quelque perturbation, puis abandonné à l'effet des lois normales de son mouvement, est ramené vers le point double : la région de D d'où les affixes troublés sont ainsi ramenés sera la zone d'attraction de la solution périodique. Par contre, la solution sera dite instable si l'affixe une fois troublé tend à s'écartier encore plus du point double. Or, par un tel point il passe deux branches de τ , l'une $\oplus\ominus$, et l'autre $\ominus\oplus$; il suffit de se référer à la figure 2 pour voir que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la branche répulsive par rapport à un axe fasse avec celui-ci un angle plus grand que la branche attractive. Lorsque la solution est instable (*fig. 2 b*), il existera toujours une zone $\ominus\ominus$ où l'affixe finira

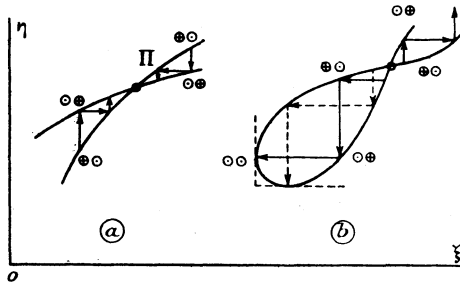


Fig. 2.

par pénétrer, de sorte que le système ne peut alors être pérenne. Si la solution est stable et qu'on puisse aller du point double vers ce point le long d'une boucle de τ sans rencontrer de point d'inflexion (*fig. 3 a*), il y aura des zones $\oplus\oplus$ jamais atteintes au cours du mouvement pour $t > 0$, et le système sera pérenne; dans ce cas, tout l'intérieur de la boucle constitue une zone d'attraction pour Π , et s'il se présente pour les deux boucles formées de part et d'autre de ce point, nous dirons que le système est inconditionnellement pérenne. Par contre, s'il y a des changements de convexité (*fig. 3 b*), une partie de la boucle (correspondant à une zone limitée par la portion $\ominus\ominus$ de τ et par sa corde) correspondra à des affixes voués à la destruction; le système ne sera pérenne que pour les états initiaux situés dans la zone d'attraction (non hachurée sur la figure) et pour les perturbations qui ne sortent pas l'affixe de cette zone.

On voit que la pérennité d'un système possédant une solution périodique stable est chose fragile, liée à la simplicité de la courbe τ , et susceptible de disparaître du fait d'une légère perturbation de la forme de cette courbe : lorsqu'on étudiera un système où les R, S, T dépendent de paramètres susceptibles de varier, il faudra donc envisager une deuxième espèce de stabilité, celle des trajectoires et frontières par rapport à des perturbations apportées aux valeurs des paramètres.

Ces conclusions ne s'appliquent pas aux systèmes déferlants n'admettant aucune solution périodique ; la stabilité de ceux-ci demande une étude spéciale.

La discussion précédente permet d'étendre le cas régulier en s'affranchissant de la condition que T soit cyclique : supposons, en effet, que cette courbe ait des points à l'infini ; en vertu des hypothèses faites sur R et S , il en sera de même de l'image τ de T , et les deux branches passant par Π seront infinies d'un côté au moins de ce point. La condition de stabilité est visiblement inchangée, au voisinage de Π ; mais si la solution est stable, sa zone d'attraction pourra être limitée du côté des branches infinies, si l'on trouve sur l'une d'elles un point transitif à distance finie ; on sera alors dans les conditions de la figure 3 *b*, sauf que la destruction du système s'ensuivra, non plus de la contradiction présentée par une

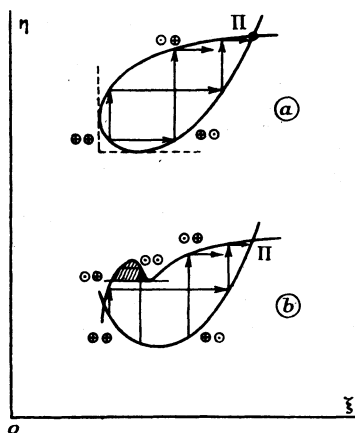


Fig. 3.

portion $\odot\odot$ de τ , mais de la croissance indéfinie de l'une au moins des variables d'état.

Le cas « pur » du système inconditionnellement pérenne permet de mettre en évidence la façon dont la solution périodique stable finit par être atteinte à partir d'un état initial quelconque : à la rigueur, la trajectoire cyclique constitue bien, comme dans le cas des systèmes non déferlants, un cycle limite (sauf dans certaines conditions remarquables dont il sera question plus loin), mais si l'on considère le régime périodique comme atteint lorsque l'affixe se trouve dans un voisinage donné de cette trajectoire cyclique, on voit que la période transitoire sera d'autant plus courte que l'angle intérieur des deux branches passant par le point double est plus grand. Lorsque les trajectoires R et S se rapprochent, le nombre des déferlements transitoires croît, et à la limite où elles se confondent, on a affaire à un oscillateur classique. Il est d'ailleurs clair qu'à ce moment toute solution est périodique, et de stabilité indifférente : résultat classique s'agissant de systèmes continus non dissipatifs.

Ainsi, le point de vue adopté permet, d'une part d'insérer les systèmes défer-

lants dans la classe plus générale des systèmes héréditaires et, de l'autre, de raccorder leur théorie à celle des systèmes sans discontinuités, en faisant tendre vers zéro l'influence du facteur héréditaire sur la loi du mouvement.

3. **Cas singuliers.** — Il n'est malheureusement plus possible d'utiliser la transformation si simple et si efficace

$$\xi = R(x, y), \quad \eta = S(x, y)$$

dans le cas où D contient des points singuliers de l'une ou de l'autre famille de trajectoires; il ne faudra donc pas s'attendre, pour ce cas singulier, à des critères aussi simples.

Le cas singulier se subdivise d'ailleurs en plusieurs, de difficultés diverses; nous nous contenterons dans ce qui suit d'examiner ceux où chacune des deux familles R et S possède dans D un point singulier au plus. Ce point ne pourra évidemment être un foyer si l'on veut que le système puisse admettre des solutions périodiques, puisqu'un foyer correspond toujours à une durée de parcours infinie sur la trajectoire: il reste donc à envisager les nœuds, les cols et les centres. En représentant respectivement ces points singuliers par N, X, C et l'absence de singularité par O, nous aurons à traiter les neuf cas suivants :

$$NO, XO, CO, NN, NX, NC, XX, XC, CC.$$

Le principe de la méthode reste le même: opérer sur D une transformation qui donne des R et des S des images aussi simples géométriquement que possible, tout en conservant la nature des singularités. Il suffit pour cela que les transformées forment des familles de coniques, à savoir :

- O, droites parallèles (paraboles dégénérées);
- N, droites concourantes (hyperboles dégénérées);
- X, hyperboles;
- C, ellipses.

On pourra traiter tous ces cas par l'équation

$$\xi^2 + i(\eta - p)^2 = \lambda^2,$$

avec $i = 0$ pour O, $i < 0$, $\lambda = 0$ pour N, $i < 0$, $\lambda \neq 0$ pour X et $i > 0$ pour C. S'agissant d'une famille donnée de trajectoires (nous conviendrons d'appeler R celle qui correspond au premier symbole du digramme NO, XO, etc.), on choisira deux des paramètres de l'équation générale de manière à donner à la singularité la nature voulue; le troisième paramètre sera celui qui individualise les trajectoires de la famille. On pourra d'ailleurs toujours s'arranger, au besoin, pour que le repérage des trajectoires se fasse au moyen de nombres positifs, en les comptant à partir d'un point transitif (et il en existe nécessairement au moins un si le système admet des solutions périodiques, puisqu'il faut pour cela que T présente des points attractifs et répulsifs).

Nous examinerons maintenant les neuf cas énumérés plus haut :

1° Cas NO. — Un nœud coupant les trajectoires qui y passent en deux branches parcourues en sens inverse, le seul cas à considérer est celui où N se trouve sur T. La transformation générale prend la forme

$$\frac{\eta}{\xi} = R(x, y), \quad \xi^2 = S(x, y).$$

Deux droites ayant deux points communs sont confondues : la seule solution périodique possible est celle qui correspond à l'axe $O\eta$, qui est commun aux deux familles. Cette solution existe si τ coupe $O\eta$ en un point autre que l'origine ; elle est stable si le nœud est attractif pour R et instable dans le cas contraire (*fig. 4 a et b*). On voit sur la figure que le régime est atteint dès le premier déferlement, quelle que soit la position initiale de l'affixe (¹), ce fait remarquable

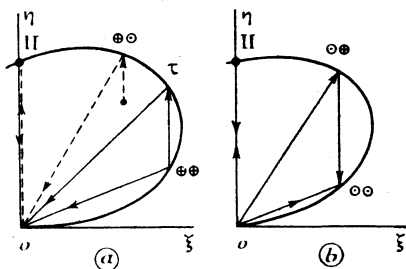


Fig. 4.

a été vérifié expérimentalement sur un système déferlant du type NN, que nous n'examinerons pas en détail ici, mais auquel les considérations précédentes s'appliquent sans modification (Vogel, 1951).

2° Cas XO. — La transformation prend l'aspect

$$\xi^2 - i\eta^2 = R(x, y), \quad \xi^2 = S(x, y);$$

chaque trajectoire R a pour image une branche d'hyperbole. Deux cas peuvent se présenter, suivant l'orientation des R par rapport aux S :

a. Si l'axe focal est normal aux S, toute S qui coupe la trajectoire considérée a avec elle deux points d'intersection : la solution sera périodique si ces deux points sont tous deux sur τ (*fig. 5*). Mais pour qu'un couple de points de τ soit sur la même R et sur la même S, il faut et il suffit qu'ils soient symétriques par rapport à l'axe focal ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une solution périodique est donc que τ et son image dans $O\xi$ aient un point commun non situé

(¹) Il semble y avoir là une application intéressante aux problèmes de régulation ; on sait, en effet, que plus un régulateur est parfait, plus il est lent à retrouver son équilibre ; un système déferlant NO ne présente pas cette antinomie.

sur l'axe. On étudiera la stabilité d'une telle solution en examinant si un affixe troublé (voisin de la trajectoire périodique) tend à s'en rapprocher ou à s'en écarter; la figure 5 montre ce qui en est. On conclut que la solution sera stable si

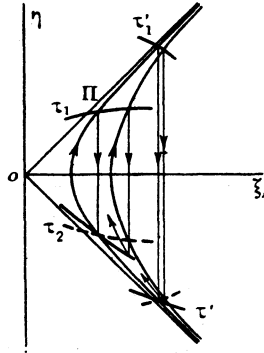


Fig. 5.

(En trait interrompu, les images de τ_1 et τ_2).

la pente par rapport à $O\xi$ de la branche répulsive est supérieure à celle de la branche attractive de τ passant par Π, Π' : condition identique à celle valable pour le cas régulier. On prendra garde que la pente doit être ici considérée avec des sens positifs opposés pour les deux branches.

b. Si l'axe focal est $O\eta$, toute S coupe une aire donnée en un point et en un

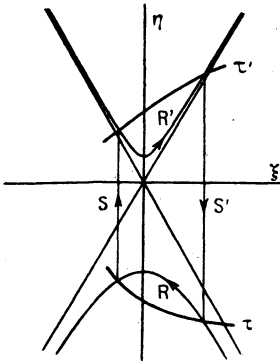


Fig. 6.

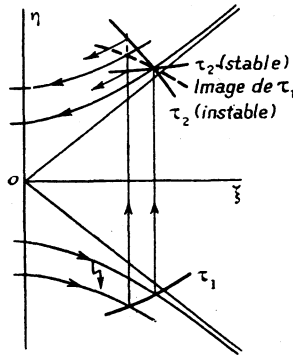


Fig. 7.

seul. Une solution périodique du type simple rencontré jusqu'ici n'est donc pas possible; mais un autre type peut se présenter, qui était impossible précédemment: c'est celui où la période, au lieu de comprendre deux phases RSRRS... , en comprend quatre RSR'S'RSR'S'... Nous dirons qu'une telle solution, schématisée sur la figure 6, est « du deuxième genre ». La catégorie en est vaste

et trop multiforme pour qu'il soit aisé de donner une loi simple de son existence ; mais si l'on se borne aux mouvements symétriques, pour lesquels R et R' sont des portions d'une même hyperbole, la condition nécessaire et suffisante d'existence est visiblement que τ et son image dans $O\xi$ se coupent en deux points situés au-dessus des asymptotes de la famille R, symétriques par rapport à $O\eta$.

On étudiera la stabilité comme ci-dessus et l'on retrouvera encore sur la figure 7 la même condition que précédemment, mais il faudra naturellement que cette condition soit vérifiée pour l'un et l'autre points d'intersection, de sorte que la stabilité d'une solution du deuxième genre symétrique apparaît comme plus difficile à assurer que celle d'une solution du premier.

Dans le cas a , l'attraction d'une solution stable ne cesse qu'au point où la branche répulsive de τ rencontre de nouveau l'image de la branche attractive, c'est-à-dire qu'elle s'étend jusqu'à une solution périodique instable ; si la solution stable est la seule, la zone d'attraction couvre tout le domaine intérieur à τ et aux asymptotes de R. Dans le cas b , l'attraction cesse de même si l'on rencontre un couple de points symétriques par rapport à $O\xi$, mais un tel couple (en l'absence de son image dans $O\eta$) ne suffit plus à constituer une solution périodique du deuxième genre, de sorte que la stabilité est, de ce point de vue encore, plus fragile que dans le cas précédent.

Remarquons que les asymptotes de la famille R, qui sont des séparatrices dans un système continu (sans déferlement), ne jouissent pas ici d'un tel privilège ; une S peut fort bien amener l'affixe d'une région d'hyperboles b en une région a , ou inversement ; en particulier, c'est ce qui se produira dans le cas d'une solution instable. La zone dans laquelle pénètre ainsi l'affixe est encore instable pour le nouveau mode d'oscillation, τ étant supposée continue et la condition de stabilité n'ayant pas changé ; mais si, dans la nouvelle région, il existe des points remarquables où la nature de la stabilité change, il pourra se faire que le système soit attiré par une solution périodique stable. On conçoit donc qu'il puisse exister des systèmes XO à déferlement (et que l'on puisse en construire délibérément de tels) qui possèdent une solution périodique du premier genre et une du deuxième, l'une et l'autre possédant une zone d'attraction limitée et telles, par conséquent, qu'une perturbation idoine puisse faire passer le système d'un régime stable à l'autre. Il est peut-être bon d'illustrer ce comportement par un exemple analytique simple, où nous écrivons les équations de l'affixe directement dans le plan de représentation (ξ, η). Soit donc le système dont les équations différentielles sont alternativement (suivant le nombre de points frontière préalablement touchés par l'affixe)

$$\frac{d\xi}{\eta} = \frac{d\eta}{\xi} = dt \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{\xi} = dt$$

à l'intérieur du domaine ayant pour frontière la courbe d'équation

$$\tau \equiv (\eta + 5)[(\eta - 6)^2 - \xi^2][(\eta + 10)^2 - 4\xi^2] = 0.$$

La figure 8 représente les trajectoires des deux familles ; on y distingue deux solutions périodiques stables ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$, 2^o genre et $\Pi'_1\Pi'_2$, 1^{er} genre) et une

instable ($\Pi'_1 \Pi'_2$, 1^{er} genre). Les zones d'instabilité ont été grisées. Si l'affixe, au cours d'oscillations périodiques du 2^e genre, subit une perturbation fortuite qui

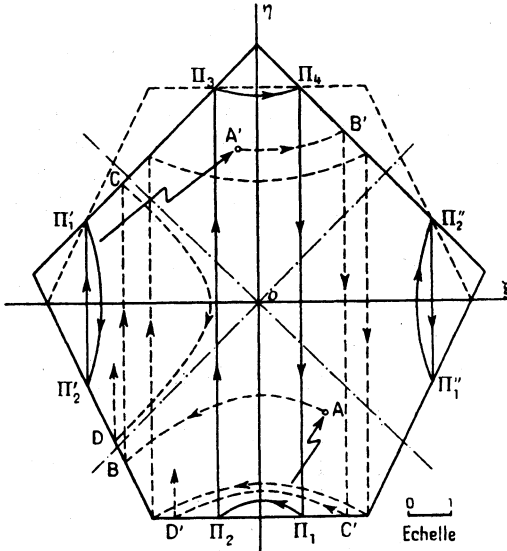


Fig. 8.

l'amène au point A, par exemple, son mouvement ultérieur l'introduit, par la trajectoire BCD... , dans la zone d'attraction de $\Pi'_1 \Pi'_2$, et le régime correspondant à ce couple de points sera atteint au bout d'un certain nombre (pratiquement fini) de déferlements. La transition inverse est possible, soit A'B'C'D'... , mais, au moins dans notre exemple, elle sera plus malaisée.

3^o Cas CO. — Les R auront ici pour images des ellipses concentriques, soit

$$\xi^2 + i\eta^2 = R(x, y), \quad \xi^2 = S(x, y),$$

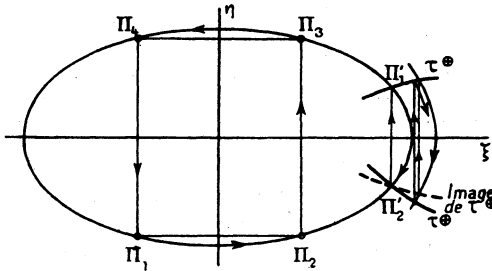


Fig. 9.

et les S couperont ces ellipses en deux points ou pas du tout. Les conditions d'existence et de stabilité des solutions périodiques du premier genre et de celles

du deuxième qui sont symétriques restent les mêmes que dans le cas précédent (*fig. 9*); mais du fait que les R entourent l'origine par des parcours continus le long desquels le sens reste inchangé tant qu'il n'y a pas intersection avec τ , la coexistence de solutions stables de l'un et de l'autre genre sera particulièrement difficile, et exigera la présence sur τ d'un certain nombre de points transitifs supplémentaires (*fig. 10*).

Les trois cas que l'on vient d'examiner sont fondamentaux, et c'est XO qui a donné lieu aux conclusions les plus intéressantes, l'existence des séparatrices permettant d'envisager celle de solutions périodiques d'un genre nouveau.

Le cas NN ne présente aucune particularité notable par rapport à NO, si ce n'est que les deux nœuds doivent être d'attractivités opposées pour les deux familles, dans un système pérenne; d'une façon générale, un faisceau de droites parallèles n'étant qu'un faisceau concourant dont le nœud s'est éloigné à l'infini,

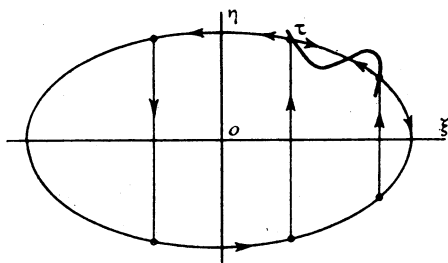


Fig. 10.

le changement de O en N pour la deuxième famille n'introduit d'autres modifications de principes que celles dues à la présence du nœud sur la frontière même; mais, en fait, cette présence rend extrêmement difficile l'existence de solutions stables du deuxième genre, qui ne peuvent se présenter que pour des frontières compliquées et comportant des singularités. De même, une transformation de O en C ne modifie rien en ce qui concerne les solutions du premier genre; quant à celles du deuxième, elles ne pourront être symétriques que si les deux systèmes sont homocentriques, c'est-à-dire si le même point du plan image est singulier pour l'une et pour l'autre familles.

Il en est encore de même pour le dernier des cas énumérés, XX; la discussion de la stabilité est ici assez délicate, et nous ne pouvons y insister; signalons seulement que le plan peut être partagé en un assez grand nombre de secteurs, à l'intérieur de chacun desquels pourra exister une solution stable du premier genre, à zone d'attraction intérieure au secteur: de sorte que des perturbations suffisamment importantes pourront faire passer le régime d'un mode d'oscillation à l'un de plusieurs autres. On conçoit que l'étude expérimentale d'un tel système soit très difficile, si l'on n'en possède pas d'avance le schéma théorique. La figure 11 illustre le cas d'un système XX possédant quatre solutions stables du premier genre et une solution stable symétrique du deuxième (il faut entendre ici

