BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE BOUGHON
JACQUELINE NATHAN
PIERRE SAMUEL

Courbes planes en caractéristique 2

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 275-278
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__275_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 275 à 278.

COURBES PLANES EN CARACTÉRISTIQUE 2;

PAR M. PIERRE BOUGHON, Mlle JACQUELINE NATHAN et M. PIERRE SAMUEL,

Université de Clermont-Ferrand.

Nous nous proposons de mettre en évidence certains points sur lesquels la « Géométrie différentielle » des courbes algébriques planes sur un corps de caractéristique 2 diffère de la Géométrie classique.

1. Soit C une courbe plane (irréductible) définie sur un corps quelconque k, $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ son équation homogène, (x_0, x_1, x_2) les coordonnées strictement homogènes d'un point générique de C (1). La tangente à C au point (x_0, x_1, x_2) a pour équation $\sum_i u_i X_i = 0$ où $u_i = F'_{x_i}$. Soit $\varphi(U_0, U_1, U_2) = 0$ l'équation tangentielle homogène de C, c'est-à-dire un générateur de l'idéal homogène formé par les polynomes sur k qui s'annullent en (u_0, u_1, u_2). Supposons, ce qui est loisible après un éventuel changement de coordonnées, que l'on a $x_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 0$; et posons

$$u = \frac{u_1}{u_0}, \qquad v = \frac{u_2}{u_0}, \qquad x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Alors $k(u, v)$ est (sauf si C est une droite) une extension régulière et de degré de transcendance 1 de k [en tant que sous-extension de $k(x, y)$]; elle admet donc, à un facteur près, une et une seule k-dérivation non nulle D. On démontre (2) que, comme dans la théorie classique, le point commun aux deux droites

$$uX + vY + 1 = 0, \tag{1}$$
$$(Du)X + (Dv)Y = 0 \tag{2}$$

est le point caractéristique de la tangente $T(x, y)$ à C au point (x, y), c'est-à-dire, en désignant par (x', y') un point générique de C sur $k(x, y)$, l'unique spécialisation du point $T(x, y).T(x', y')$ sur $k(x, y)$ prolongeant $(x', y') \to (x, y)$. Prolongeons D en une dérivation D' de l'extension transcendante simple $k(u_0, u_1, u_2)$ de $k(u, v)$. En tenant compte de (1), l'équation (2) s'écrit

---

(1) Pour les définitions des notions de Géométrie algébrique utilisées, nous renvoyons le lecteur à : P. SAMUEL, *Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie algébrique* (*Erg. der Math.*, Berlin, Springer, 1955).

(2) P. BOUGHON, *Spécialisations et dérivations. Application à la définition du cycle caractéristique d'un diviseur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 1185-87).

$\sum_i (D'u_i)X_i = 0$. Comme on a $\sum_i u_i \varphi'_{u_i} = 0$ d'après l'identité d'Euler, et $\sum_i (D'u_i)\varphi'_{u_i} = 0$ par application de D' à la relation $\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$, le point $(\varphi'_{u_0}, \varphi'_{u_1}, \varphi'_{u_2})$ *est le point caractéristique de la tangente* T. Tout ceci a un sens puisque aucun des polynomes F, φ n'a toutes ses dérivées partielles nulles, étant donné que chacun engendre un idéal qui reste premier par toute extension de k. Nous supposerons, ce qui est loisible, que l'on a $\varphi'_{u_0} \neq 0$, et poserons

$$a = \frac{\varphi'_{u_1}}{\varphi'_{u_0}}, \qquad b = \frac{\varphi'_{u_2}}{\varphi'_{u_0}}.$$

THÉORÈME 1. — *Si k est un corps de caractéristique* 2, *les coefficients* (u, v) *de la tangente* T *à* C *en* (x, y) *appartiennent à* $k(x^2, y^2)$, *et les coordonnées* (a, b) *du point caractéristique de* T *appartiennent à* $k(x^4, y^4)$.

Il suffit de montrer que u et v appartiennent à $k(x^2, y^2)$, puisque la seconde assertion en résulte par application à l'équation tangentielle φ. Or on a

$$u = \frac{F'_{x_1}}{F'_{x_0}} = \frac{F'_{x_1}F'_{x_0}}{(F'_{x_0})^2}.$$

Par passage à des coordonnées non homogènes notre assertion va donc résulter du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient k un corps de caractéristique* 2, *et* (s, t) *un point générique sur k d'une courbe plane d'équation non homogène* $G(S, T) = 0$. *Alors* $G'_s G'_t \in k(s^2, t^2)$.

Écrivons en effet

$$G(S, T) = A(S^2, T^2) + SB(S^2, T^2) + TC(S^2, T^2) + STD(S^2, T^2).$$

Comme $G'_S = B + T.D$ et $G'_T = C + S.D$, il vient

$$G'_S . G'_T = B.C + D(S.B + T.C + ST.D);$$

d'où

$$G'_s G'_t = B(s^2, t^2)\,C(s^2, t^2) + D(s^2, t^2)\,A(s^2, t^2), \qquad \text{puisque} \quad G(s, t) = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte du théorème que le point caractéristique de la tangente T à C n'est *jamais* son point de contact (x, y) avec C.

Remarque. — Soit $uX + vY + 1 = 0$ l'élément générique d'une famille à un paramètre de droites, $k(u, v)$ étant une extension régulière de k. Si la droite $uX + vY + 1 = 0$ contient un point (a, b) tel que $k(u, v)$ soit une extension *algébrique inséparable* de $k(a, b)$, alors (a, b) est point caractéristique de cette droite. En effet il existe une k-dérivation non nulle D de $k(u, v)$ qui est nulle sur $k(a, b)$; et, par application de D à la relation $ua + vb + 1 = 0$, on obtient $(Du)a + (Dv)b = 0$.

Exemples. — 1° Un calcul direct montre aussitôt que toutes les tangentes à la *conique* $\sum_{i\leq j} a_{ij}x_ix_j = 0$ passent par le point (a_{12}, a_{02}, a_{01}). Le fait que toutes les tangentes à une conique C sont concourantes résulte aussi du théorème de Frégier et du fait que la correspondance identique sur C est une involution (puisque $t = t'$ équivaut à $t + t' = 0$ en caractéristique 2).

2° Une *cubique à point de rebroussement* peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + y^2 = 0$. Ses tangentes $x^2X + y^2(Y + 1) = 0$ passent toutes par le point $(0, 1)$, qui est l'unique point d'inflexion de la cubique.

3° Une *cubique à point double ordinaire* peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + xy = 0$. L'équation générale de ses tangentes est $X(x^2 + y) + Y(y^2 + x) + xy = 0$, ou encore $Xy^4 + Yx^4 + x^2y^2 = 0$. Son équation tangentielle est $uv + 1 = 0$. Les points caractéristiques de ses tangentes décrivent donc la droite de l'infini, qui est d'ailleurs la droite joignant les trois points d'inflexion de la cubique.

4° L'équation d'une *cubique sans singularité* peut toujours se ramener à $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0 (q \in k)$. On a

$$u = \frac{x^2 + qy^4}{(1 + qxy)^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{y^2 + qx^4}{(1 + qxy)^2}.$$

Son équation tangentielle est $u^3 + v^3 + q^2uv + 1 = 0$. Le point caractéristique de la tangente en (x, y) est $\left[\frac{u^2 + q^2v^4}{(1 + q^2uv)^2}, \frac{v^2 + q^2u^4}{(1 + q^2uv)^2}\right] = (x^4, y^4)$, et son lieu est la cubique $X^3 + Y^3 + q^4XY + 1 = 0$. Ce point caractéristique est d'ailleurs le tangentiel de (x, y) dans le cas de la cubique « équianharmonique » obtenue pour $q = 0$; en général ce tangentiel est le point (x^2u, y^2v).

5° La *quartique non singulière* C d'équation $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ (coordonnées homogènes) a pour tangente $Xz^4y^2 + Yx^4z^2 + Zy^4x^2 = 0$. Celle-ci passe par les points (z^2, x^2, y^2) et (x^8, y^8, z^8), qui sont des points de C comme on le vérifie par élévation de l'équation de C aux puissances 2 et 8. Passons aux coordonnées non homogènes en faisant $z = 1$; comme $k(u, v) = k\left(\frac{1}{x^2y^2}, \frac{x^2}{y^4}\right) = k(x^2y^2, y^6)$, est une extension 2-radicielle de $k(x^8, y^8)$, le point (x^8, y^8) est, d'après la remarque ci-dessus, le point caractéristique de la tangente en (x, y). L'équation tangentielle de C est $u^5v + v^5w + w^5u + u^2v^2w^2 = 0$.

6° La courbe C d'équation $x^{2^n+1} + y^{2^n+1} + 1 = 0$, qui est non singulière, a pour tangente $Xx^{2^n} + Yy^{2^n} + 1 = 0$, et son équation tangentielle est $u^{2^n+1} + v^{2^n+1} + 1 = 0$. Le point caractéristique de la tangente est $(u^{2^n}, v^{2^n}) = (x^{2^{2n}}, y^{2^{2n}})$, et son lieu est la courbe C. La tangente à C au point (x, y) a un contact d'ordre 2^n avec C en (x, y).

2. Théorème 2. — *Sur un corps k de caractéristique 2, la classe d'une courbe plane C de degré n est au plus* $\frac{1}{2}n(n - 1)$ [et non $n(n - 1)$ comme dans le cas classique].

Au moyen d'un choix convenable des coordonnées, il va nous suffire de majorer le nombre des tangentes menées à C par le point à l'infini sur Ox. Si $F(X, Y) = 0$

désigne l'équation de C, nous avons ainsi à majorer le nombre de points communs à C et à la courbe $F'_X(X, Y) = 0$ (certains de ces points pouvant être des points multiples de C). Or, en écrivant $F(X, Y) = A(X^2, Y) + X.B(X^2, Y)$, on a $F'_X(X, Y) = B(X^2, Y)$, et nous sommes ramenés à majorer le nombre des points communs aux courbes $A(X^2, Y) = 0$ et $B(X^2, Y) = 0$. Or, ce sont là des courbes de degrés au plus n et $n - 1$, dont toutes les tangentes sont parallèles à Ox. Donc chacun de leurs points d'intersection compte au moins pour deux et il y en a au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$ distincts.

Exemples. — 1° le maximum $\frac{1}{2}n(n-1)$ est atteint par les courbes non singulières des exemples 4° et 5° ci-dessus, mais non par la courbe non singulière de l'exemple 6°.

2° Pour étudier directement la classe d'une *cubique*, on peut remarquer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \tag{1}$$

ait une racine double est que l'on ait $ad + bc = 0$ [en effet l'équation dérivée est $at^2 + c = 0$, et, en éliminant t^2 entre cette dernière et l'équation (1) élevée au carré, on obtient $a^2d^2 + b^2c^2 = 0$]. Il en résulte que les tangentes menées par O à la cubique C (plus, éventuellement, la droite joignant O au point double de C) d'équation

$$g_3(x, y) + g_2(x, y) + g_1(x, y) + g_0 = 0 \qquad (g_i,\ \text{forme de degré } i)$$

sont représentées par

$$g_0 g_3(x, y) + g_1(x, y) g_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Il y en a en général 3. Lorsque O est un point simple de C l'équation (2) se décompose en $g_1(x, y) = 0$ représentant la tangente à C en O, et en $g_2(x, y) = 0$. Dans le cas de la forme réduite $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0$, mettons l'origine au point (x_0, y_0) de C en posant $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$; l'équation $g_2(X, Y) = 0$ s'écrit alors $x_0X^2 + y_0Y^2 + qXY = 0$; si $q \neq 0$ elle représente deux droites distinctes, et chaque point de C est le tangentiel de deux points de C; dans le cas de la cubique « équianharmonique » $q = 0$ (ce nom ne répond ici à rien, puisqu'il ne peut être question du birapport des quatre tangentes menées à C par un point de C) elle représente une seule droite (comptée deux fois), et chaque point de C est tangentiel d'un seul point de C.

3° On voit de même qu'une cubique à point double ordinaire est de classe 2, et qu'une cubique à point de rebroussement est de classe 1.

146754. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 997. — Dépôt légal, Éditeur, 1955, n° 585.