Bulletin de la S. M. F.

Henri Cartan

Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 77-99
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__77_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 77 à 99.

VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES ET VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES;

PAR

HENRI CARTAN.

J'avais annoncé sans démonstration, en 1953 [5], quelques résultats concernant les sous-variétés analytiques réelles de l'espace numérique R^n; il s'agissait de théorèmes sur la cohomologie à coefficients dans un faisceau analytique cohérent, analogues à ceux qui concernent les variétés de Stein dans le cas analytique-complexe. L'un des buts de cet article est de donner des démonstrations de ces résultats (*voir* notamment les théorèmes 2 et 3 ci-dessous). Pour cela on a besoin de savoir que l'espace réel R^n, considéré comme plongé dans l'espace complexe C^n, possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est un domaine d'holomorphie (prop. 1 ci-dessous); on utilise aussi une extension des théorèmes fondamentaux relatifs à la cohomologie des variétés de Stein (*voir* le théorème 1 ci-dessous).

Le théorème 3 met en évidence l'intérêt de la notion de sous-ensemble analytique « cohérent ». Ceci amène à étudier un peu systématiquement les sous-ensembles analytiques (au sens analytique-réel); cette étude n'a guère été entreprise jusqu'ici (*voir* cependant [2], p. 120-122); elle fait l'objet des paragraphes 8 et 9. Dans les paragraphes 10 et 11, on cherche à caractériser, parmi les sous-ensembles analytiques de R^n, ceux qui sont définissables globalement par un nombre fini d'équations analytiques.

Il serait intéressant d'avoir des critères permettant de reconnaître si une variété analytique réelle V (réunion dénombrable de compacts) peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace numérique R^n. D'après B. MALGRANGE [10], il suffit pour cela que V admette un ds^2 analytique.

Le présent travail devait être écrit pour le Volume jubilaire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* en l'honneur de M. Arnaud DENJOY. Il n'a pu malheureusement être prêt à temps. Que Monsieur DENJOY veuille bien, malgré ce retard, l'accepter comme un hommage de ma respectueuse admiration.

1. Voisinages de R^n dans C^n.

PROPOSITION 1. — *L'espace numérique réel R^n, plongé dans l'espace numérique complexe C^n, possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est un domaine d'holomorphie.*

DÉMONSTRATION. — Soient $z_k = x_k + iy_k (1 \leqq k \leqq n)$ les n variables complexes de C^n, le sous-espace R^n étant défini par les équations $y_k = 0$. Soit $SO(n)$ le groupe orthogonal réel à n variables, et notons G le groupe-produit $SO(n) \times SO(n)$; faisons opérer G sur C^n en associant à chaque couple (s, t) d'éléments de $SO(n)$ la transformation $(x, y) \rightarrow (sx, ty)$ de C^n [on note x, resp. y, un point (x_k), resp. (y_k), de R^n]. Le sous-espace fermé R^n de C^n est stable par les opérations de G, et comme G est compact, R^n possède un système fondamental de voisinages ouverts *stables par* G. Il s'ensuit que R^n possède un système fondamental de voisinages (ouverts) dont chacun a la forme

$$\sum_k (y_k)^2 < f\left[\sum_k (x_k)^2\right],$$

où $f(t)$ est une fonction de $t \geqq 0$, à valeurs réelles > 0, et semi-continue inférieurement. De plus on peut supposer que f est *décroissante* (au sens large). Pour démontrer notre proposition, il suffira de montrer qu'étant donné une telle fonction $f(t)$ il existe une fonction $g(t)$, à valeurs > 0, *décroissante et indéfiniment dérivable*, qui satisfasse en outre aux deux conditions suivantes :

(1) $g(t) \leqq f(t)$ pour tout $t \geqq 0$;

(2) l'ouvert $\sum_k (y_k)^2 < g\left[\sum_k (x_k)^2\right]$ est un *domaine d'holomorphie.*

On va montrer que la condition différentielle

(3) $2tg''(t) < 1$ (où g'' désigne la dérivée seconde de la fonction g)

entraîne la condition (2). D'après OKA [11], si un ouvert $U \subset C^n$ est tel que chaque point de la frontière de U possède un voisinage ouvert V tel que $U \cap V$ soit un domaine d'holomorphie, alors U est un domaine d'holomorphie. D'autre part, appliquons la classique condition différentielle de LEVI-KRZOSKA (*cf.* [1], p. 54) : pour qu'un point $(x_k + iy_k)$ de la frontière de l'ensemble ouvert U défini par l'inégalité

$$\sum_k (y_k)^2 < g\left[\sum_k (x_k)^2\right]$$

possède un voisinage ouvert V tel que $U \cap V$ soit un domaine d'holomorphie, il suffit que la forme quadratique hermitienne (à n variables complexes a_k)

$$(1-g'(t))\left(\sum_k a_k\bar{a}_k\right)-2g''(t)\left|\sum_k x_k a_k\right|^2$$

induise une forme définie positive sur l'hyperplan complexe

$$\sum_k (g'(t)x_k+iy_k)a_k=0,$$

t désignant le nombre $\sum_k (x_k)^2$. Compte tenu de l'iuvariance de U par le groupe G, il suffit d'exprimer la condition précédente pour les points (x_k, y_k) tels que $x_k=0$ pour $k\geqq 2$; alors $t=(x_1)^2$, et comme la dérivée première $g'(t)$ est $\leqq 0$ par hypothèse, on voit que l'inégalité (3) entraîne bien la condition de Levi-Krzoska.

En conséquence, pour établir la proposition 1, il suffit de prouver le

LEMME 1. — *Étant donnée une fonction $f(t)$, définie pour $t\geqq 0$, à valeurs >0 et décroissante, il existe une fonction $g(t)>0$, décroissante, indéfiniment dérivable, et qui satisfasse aux conditions* (1) *et* (3).

Prouvons ce lemme. Supposons qu'on ait trouvé une fonction $h(t)$ définie pour $t\geqq t_0$ ($t_0>0$), à valeurs >0, décroissante et indéfiniment dérivable, telle que $h(t)\leqq f(t)$ pour $t\geqq t_0$, et $2t\,h''(t)<1$ pour $t\geqq t_0$; alors la fonction $g(t)=h(t_0+t)$ satisfera aux conditions du lemme. Tout revient donc à trouver une telle fonction $h(t)$, pour un t_0 convenable.

Au lieu de la fonction h, cherchons la fonction $H(u)=h(u^{-1})$, qui doit être définie pour $u>0$ assez petit, croissante, indéfiniment dérivable et à valeurs >0, et doit en outre satisfaire aux deux inégalités

$$(4)\qquad H(u)\leqq F(u),\qquad 4u^2H'(u)+2u^3H''(u)<1$$

pour $u>0$ assez petit [on a posé $F(u)=f(u^{-1})$]. On va même chercher une fonction $H(u)$ définie pour toutes les valeurs de la variable réelle u, qui soit croissante, indéfiniment dérivable, à valeurs >0 pour $u>0$, et qui satisfasse à (4) pour $u>0$ assez petit. Or la deuxième inégalité (4) est vérifiée d'elle-même pour $u>0$ assez petit du moment que H est indéfiniment dérivable pour $u=0$. Pour construire H, introduisons une fonction $\lambda(u)$ indéfiniment dérivable de la variable réelle u, à valeurs $\geqq 0$, nulle hors de l'intervalle $0\leqq u\leqq 1$, de manière que le point $u=0$ appartienne au *support* de λ, et que $\int\lambda(u)\,du=1$; il est classique qu'une telle fonction λ existe. Prenons alors pour H le produit de convolution $\lambda\star F$, c'est-à-dire

$$H(u)=\int\lambda(x)\,F(u-x)\,dx.$$

Puisque λ est indéfiniment dérivable, H l'est aussi; puisque F est croissante, H est croissante et $H(u) \leq F(u)$ pour tout u; puisque le point $u = 0$ appartient au support de λ, on a $H(u) > 0$ pour $u > 0$. Donc la fonction $H(u)$ satisfait à toutes les conditions cherchées, et le lemme 1 est démontré. En même temps est achevée la démonstration de la proposition 1.

2. Extension des théorèmes fondamentaux sur la cohomologie des variétés de Stein. — Soit X une variété analytique-complexe. Soit $\mathcal{O}(X)$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes aux différents points de X; c'est un *faisceau d'anneaux :* on notera $\mathcal{O}_x(X)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point $x \in X$. Ce faisceau d'anneaux est *cohérent* (au sens de Serre [13], déf. 3, p. 210) : cela résulte d'un théorème de Oka (*cf.* [12], [3] et l'exposé XV de [4]). On appelle *faisceau analytique* (sur X) un faisceau de $\mathcal{O}(X)$-modules (*cf.*. [13], p. 203). Nous renvoyons à [13] pour la définition d'un faisceau *cohérent* de modules; il nous suffit de savoir que, en vertu de la proposition 7 de [13] (p. 210), un faisceau analytique F est cohérent si et seulement si chaque point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que le faisceau induit $F(U)$ soit isomorphe (comme faisceau analytique) au conoyau d'un homomorphisme analytique de faisceaux $(\mathcal{O}(U))^p \rightarrow (\mathcal{O}(U))^q$ (p et q entiers convenables).

Rappelons le résultat fondamental (*cf.* [5], § 7, th. A et B) :

Théorème fondamental. — *Soit X une variété de Stein* (¹), *et soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in X$, le module F_x* [module sur l'anneau $\mathcal{O}_x(X)$] *est engendré par l'image de l'application naturelle*

$$H^0(X, F) \rightarrow F_x;$$

[$H^0(X, F)$ désigne, comme d'habitude, le module des sections de F au-dessus de X];

(B) *Pour tout entier $q \geq 1$, le groupe de cohomologie $H^q(X, F)$ est réduit à* 0.

En fait, ce théorème vaut, plus généralement, pour tout faisceau analytique cohérent sur un *espace analytique* (²) holomorphiquement complet (³).

Nous nous proposons ici d'étendre le théorème fondamental au cas où X est remplacé par un sous-espace fermé convenable d'une variété analytique complexe (ou même, plus généralement, d'un espace analytique). Soit X une variété analytique complexe (ou, plus généralement, un espace analytique),

(¹) Pour la définition d'une variété de Stein, *voir* par exemple [5], p. 49.

(²) Au sujet de la notion générale d' « espace analytique », due à Behnke et Stein ainsi qu'à H. Cartan, *voir* par exemple l'exposé récent [14], § 1.

(³) Au sujet de la notion d'espace « holomorphiquement complet », *voir* [8].

et soit A un sous-espace *fermé* de X. Soit $\mathcal{O}(A)$ le faisceau induit sur A par le faisceau $\mathcal{O}(X)$; c'est un faisceau d'anneaux; l'anneau $\mathcal{O}_x(A)$, pour $x \in A$, n'est autre que l'anneau $\mathcal{O}_x(X)$ des germes holomorphes de l'espace ambiant X. Il est immédiat que $\mathcal{O}(A)$ est un faisceau cohérent d'anneaux; on a, sur A, la notion de faisceau analytique, et la même caractérisation des faisceaux analytiques cohérents que ci-dessus. On se propose de démontrer (4) :

THÉORÈME 1. — *Soit X une variété analytique-complexe, réunion dénombrable de compacts. Si un sous-espace fermé $A \subset X$ possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est une variété de Stein, les conclusions du « théorème fondamental » subsistent, i. e. :*

(A) *Pour tout point $x \in A$ et tout faisceau analytique cohérent F sur A, F_x est engendré* [comme module sur $\mathcal{O}_x(A)$] *par l'image de l'application naturelle $H^0(A, F) \to F_x$;*

(B) *Pour tout entier $q \geq 1$, et tout faisceau analytique cohérent F sur A, on a $H^q(A, F) = 0$.*

REMARQUE. — La démonstration qui suivra (§ 4) montrera que dans l'énoncé précédent, on pourrait remplacer « variété analytique-complexe » par « espace analytique », et « une variété de Stein » par « holomorphiquement complet »; les assertions (A) et (B) restent vraies dans ce cas plus général.

3. Prolongement d'un faisceau cohérent donné sur un fermé. — Avant de démontrer le théorème 1, nous avons besoin d'un théorème de prolongement des faisceaux cohérents :

PROPOSITION 2. — *Soit A un sous-espace fermé d'un espace analytique X. Supposons que X soit réunion dénombrable de compacts. Si un faisceau analytique G, sur A, est $\mathcal{O}(A)$-cohérent, alors G est induit par un faisceau $\mathcal{O}(U)$-cohérent F sur un voisinage ouvert convenable U de A.*

Il s'agit, d'une manière plus précise, de trouver un voisinage U de A, un faisceau cohérent F sur U, et un isomorphisme (analytique) de G sur le faisceau $F(A)$ induit par F sur le sous-espace A.

Avant de prouver la proposition 2, nous établirons plusieurs lemmes :

LEMME 2. — *Soient F et F' deux faisceaux analytiques cohérents sur un sous-espace fermé A d'un espace analytique X, et soient f et g deux homomorphismes analytiques $F \to F'$; pour $x \in A$, soient f_x et g_x les homomorphismes $F_x \to F'_x$ induits par f et g. Alors l'ensemble des $x \in A$ tels que $f_x = g_x$ est* ouvert *dans A.*

---

(4) La démonstration suivra en gros celle donnée dans [4], exposé XIX, pour le cas où le sous-espace fermé A est compact.

Démonstration. — Soit x un point de A tel que $f_x = g_x$; on veut montrer que $f_y = g_y$ pour tout point $y \in A$ assez voisin de x. Or il existe un nombre fini de sections u_i de F au-dessus d'un voisinage U de x dans A, telles que, pour tout $y \in U$, les u_i engendrent F_y comme module sur l'anneau $\mathcal{O}_y(A)$. D'autre part, pour chaque i, il existe un voisinage ouvert U_i de x, contenu dans U, et des sections v_i (resp. w_i) de F' au-dessus de U_i, telles que, pour tout $y \in U_i$, v_i (resp. w_i) induise un élément de F'_y égal à $f_y(u_i)$ [resp. égal $g_y(u_i)$]. Puisque $f_x(u_i) = g_x(u_i)$, les sections v_i et w_i coïncident dans un voisinage de x; on a donc $f_y(u_i) = g_y(u_i)$, quel que soit i, pour tout $y \in A$ assez voisin de x; or ceci entraîne l'égalité des homomorphismes f_y et g_y, ce qui démontre le lemme.

Lemme 3. — *Soient F et F' deux faisceaux analytiques cohérents sur un espace analytique X, réunion dénombrable de compacts. Soit A un sous-espace* fermé *de X, et soit $f: F(A) \to F'(A)$ un homomorphisme analytique des faisceaux induits sur A par F et F'. Alors il existe un voisinage V de A et un homomorphisme analytique $g : F(V) \to F'(V)$, qui prolonge f.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où A est réduit à un point $x \in X$; alors f est simplement un homomorphisme $F_x \to F'_x$ pour les structures de modules sur $\mathcal{O}_x(X)$. Soient u_i des sections de F au-dessus d'un voisinage de x, en nombre fini, qui engendrent le $\mathcal{O}_y(X)$-module F_y en chaque point y assez voisin de x; et soient v_j des sections de F' au-dessus d'un voisinage de x, en nombre fini, qui engendrent F'_y en chaque point y assez voisin de x. Le faisceau F étant cohérent, le « faisceau des relations » entre les sections u_i est engendré par un nombre fini de systèmes (a^i_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ holomorphes au voisinage de x. On a donc, pour chaque k, $\sum_i a^i_k u_i = 0$ au voisinage de x; et, pour tout système de fonctions b^i, holomorphes en un point y assez voisin de x, et satisfaisant à $\sum_i b^i u_i = 0$ au voisinage de y, il existe des λ^k holomorphes en y, telles que $b^i = \sum_k \lambda^k a^i_k$ pour tout i. Cela dit, chaque $f(u_i) \in F'_x$ peut s'écrire comme combinaison linéaire $\sum_j \lambda^j_i v_j$ à coefficients λ^j_i holomophes au voisinage de x; et l'on a

$$\sum_{i,j} a^i_k \lambda^j_i v_j = 0$$

au voisinage de x. Soit alors y un point assez voisin de x; montrons qu'il existe un $\mathcal{O}_y$-homomorphisme $f_y : F_y \to F'_y$ tel que $f_y(u_i) = \sum \lambda^j_i v_j$. Il suffit de vérifier que si des b^i holomorphes en y satisfont à $\sum_i b^i u_i = 0$, on a $\sum_{i,j} b^i \lambda_i^j v_j = 0$; or cela résulte du fait que c'est vrai si $b^i = a_k^i$, quel que soit k. Les homomorphismes f_y étant maintenant définis, il est clair que la collection de ces f_y définit un homomorphisme analytique $F(U) \to F'(U)$ pour un voisinage ouvert U assez petit de x. Et ceci démontre le lemme 3 dans le cas particulier où A est réduit à un point.

Passons au cas général. D'après ce qu'on vient de démontrer, pour chaque point $x \in A$ il existe un voisinage ouvert U de x et un homomorphisme analytique $h: F(U) \to F'(U)$, de manière que l'homomorphisme $h_x: F_x \to F'_x$ induit par h soit égal à l'homomorphisme f_x induit par $f: F(A) \to F'(A)$. En vertu du lemme 2, on peut choisir U assez petit pour que $h_y = f_y$ en tout point $y \in A \cap U$. Si à chaque $x \in A$ on associe un tel ouvert U, ces ouverts et $X - A$ constituent un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de X; puisque X est paracompact, il existe deux recouvrements ouverts (U_i) et (V_i), plus fins que $\mathcal{R}$, dont chacun est *localement fini*, et tels que $\overline{V}_i \subset U_i$. Soit B la réunion de ceux des $\overline{V}_i$ qui rencontrent A; B est un *voisinage fermé* de A dans X. D'autre part, pour chaque i tel que U_i rencontre A, on a un homomorphisme analytique $g^i: F(U_i) \to F'(U_i)$ qui induit un homomorphisme

$$F(A \cap U_i) \to F'(A \cap U_i)$$

égal à celui induit par $f: F(A) \to F'(A)$; il s'ensuit que, pour $x \in A \cap U_i \cap U_j$, les homomorphismes $(g^i)_x$ et $(g^j)_x$ induits par g^i et g^j sont égaux. Soit alors $x \in B$; l'ensemble $I(x)$ des i tels que $x \in \overline{V}_i$ est fini, et l'on a $I(y) \subset I(x)$ pour $y \in B$ assez voisin de x. Le lemme 2 montre que l'ensemble des $x \in B$ tels que l'on ait $(g^i)_x = (g^j)_x$ pour tout couple (i, j) d'indices i et j appartenant à $I(x)$, est ouvert dans B; comme il contient A, c'est un voisinage V de A. Si $x \in V$, soit g_x la valeur commune des $(g^i)_x$ pour les $i \in I(x)$; il est immédiat que la collection des g_x, pour $x \in V$, définit un homomorphisme analytique $g: F(V) \to F'(V)$, et que g prolonge f. La démonstration du lemme 3 est achevée.

Démonstration de la proposition 2. — Soit $x \in A$; il résulte de la définition d'un faisceau cohérent qu'il existe un ouvert U (dans X) contenant x, un faisceau cohérent F sur U, et un isomorphisme analytique de $G(A \cap U)$ sur le faisceau $F(A \cap U)$. Si à chaque $x \in A$ on associe un tel U, ces ouverts U et l'ouvert $X - A$ constituent un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de x. Puisque X est paracompact, il existe deux recouvrements ouverts (U_i) et (V_i), plus fins que $\mathcal{R}$, dont chacun est localement fini, et tels que $\overline{V}_i \subset U_i$. Pour chaque i tel que U_i rencontre A, on a un faisceau analytique cohérent F^i sur U_i et un isomorphisme analytique f^i du faisceau $G(A \cap U_i)$ sur $F^i(A \cap U_i)$. Pour chaque couple (i, j) tel que $A \cap U_i \cap U_j$ ne soit pas vide, $f^i \circ (f^j)^{-1}$ est un isomorphisme f^{ij} de $F^j(A \cap U_i \cap U_j)$ sur $F^i(A \cap U_i \cap U_j)$; et dans $A \cap U_i \cap U_j \cap U_k$ supposé non vide, on a $f^{ij} \circ f^{jk} = f^{ik}$.

D'après le lemme 3 appliqué à l'espace $U_i \cap U_j$ et au sous-espace fermé $A \cap U_i \cap U_j$, il existe un ouvert U_{ij} contenant $A \cap U_i \cap U_j$ et contenu dans $U_i \cap U_j$, et un homomorphisme analytique $g^{ij}: F^j(U_{ij}) \to F^i(U_{ij})$ qui prolonge f^{ij}; si $i = j$, on convient que $U_{ii} = U_i$ et que g^{ii} est l'identité. Il existe un ouvert W contenant A tel que, pour tout couple (i, j), on ait

$$W \cap \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \subset U_{ij};$$

en effet, tout point $x \in A$ possède un voisinage ouvert $W(x)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini des $\overline{V}_i$; pour chaque couple (i, j) tel que $\overline{V}^i$ et $\overline{V}_j$ rencontrent $W(x)$, U_{ij} est un ouvert contenant x; l'intersection de ces U_{ij} (en nombre fini) et de $W(x)$ est un ouvert contenant x; la réunion des ouverts ainsi attachés aux points $x \in A$ est l'ouvert W cherché.

Soit maintenant V l'ensemble des points $y \in W$ tels que

$$(g^{ij})_y \circ (g^{jk})_y = (g^{ik})_y$$

quels que soient i, j, k tels que $y \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \cap \overline{V}_k$. L'ensemble V contient A et est *ouvert*. Soit enfin U la réunion des $V \cap V_i$: c'est un ouvert contenant A. On va définir un faisceau F sur U, par « recollement » : sur $U \cap V_i$, on prend le faisceau $F^i(U \cap V_i)$; dans $U \cap V_i \cap V_j$, qui est contenu dans U_{ij} (puisque $U \subset W$), on a un homomorphisme analytique $F^j(U \cap V_i \cap V_j) \to F^i(U \cap V_i \cap V_j)$, induit par g^{ij}; notons-le encore g^{ij}. Dans $U \cap V_i \cap V_j \cap V_k$, on a $g^{ij} \circ g^{jk} = g^{ik}$, puisque $U \subset V$; il en résulte notamment (pour $k = i$) que g^{ij} est un isomorphisme. Soit F le faisceau, sur U, obtenu en recollant les $F^i(U \cap V_i)$ par les isomorphismes transitifs g^{ij}; il est cohérent, puisque les $F^i(U \cap V_i)$ le sont. Le faisceau $F(A)$ induit par F sur A est obtenu par recollement des $F^i(A \cap V_i)$ au moyen des isomorphismes f^{ij}, qui sont précisément induits par les g^{ij}. Or $f^{ij} = f^i \circ (f^j)^{-1}$, f^i étant un isomorphisme

$$G(A \cap V_i) \to F^i(A \cap V_i).$$

Il en résulte que la collection de ces f_i définit un isomorphisme f du faisceau G sur le faisceau $F(A)$ induit par F sur A. Et ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Remarque. — Le faisceau G étant donné sur A comme dans la proposition 2, on a trouvé un triple (U, F, f) formé d'un ouvert U contenant A, d'un faisceau cohérent F sur U, et d'un isomorphisme analytique f de G sur le faisceau induit $F(A)$. Une telle solution (U, F, f) est *unique à un isomorphisme près*, dans le sens suivant : si (U', F', f') est une autre solution, il existe un voisinage ouvert U'' de A, contenu dans $U \cap U'$, et un isomorphisme h du faisceau induit $F(U'')$ sur le faisceau induit $F'(U'')$, tel que

$$f' = h_A \circ f,$$

en notant h_A l'isomorphisme $F(A) \to F(A')$ induit par h.

Cette assertion est une conséquence facile des lemmes 2 et 3.

4. Démonstration du théorème 1. — Nous avons encore besoin d'une proposition préliminaire :

PROPOSITION 3. — *Soit X un espace paracompact, F un faisceau de groupes abéliens sur X, et A une partie fermée de X. Pour chaque entier $q \geqq 0$, le groupe abélien $H^q(A, F)$ est limite directe des groupes abéliens $H^q(U, F)$ relatifs aux ouverts U contenant A.*

Pour $q = 0$, c'est bien connu : toute section de F au-dessus de A fermé se prolonge en une section de F au-dessus d'un voisinage ouvert U de A : et si deux sections de F au-dessus d'un ouvert U contenant A coïncident sur A, elles coïncident dans tout un voisinage de A.

Pour passer de là au cas où q est quelconque, on utilise une « résolution fine » de F, c'est-à-dire une suite exacte de faisceaux

$$0 \to F \to F^0 \to F^1 \to \ldots \to F^q \ldots,$$

où les $F^i (i \geqq 0)$ sont des faisceaux *fins*. On sait (5) qu'on a un isomorphisme canonique entre $H^q(X, F)$ et le $q^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du complexe formé de la suite de groupes abéliens

$$0 \to \Gamma(X, F^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, F^1) \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{q-1}} \Gamma(X, F^q) \xrightarrow{d^q} \ldots,$$

$\Gamma(X, F^q)$ désigne le groupe des sections $H^0(X, F^q)$. Autrement dit, on a un isomorphisme canonique entre $H^q(X, F)$ et le quotient du noyau de

$$d^q : \Gamma(X, F^q) \to \Gamma(X, F^{q+1})$$

par l'image de

$$d^{q-1} : \Gamma(X, F^{q-1}) \to \Gamma(X, F^q).$$

Ce résultat vaut aussi pour A et pour les ouverts U contenant A. Comme le complexe $\sum_{q \geqq 0} \Gamma(A, F^q)$ est la limite directe des complexes $\sum_{q \geqq 0} \Gamma(U, F^q)$ quand U parcourt l'ensemble des ouverts contenant A, et comme l'homologie des complexes commute avec la limite directe, il s'ensuit bien que $H^q(A, F)$ est limite directe des $H^q(U, F)$.

La proposition 3 étant établie, il est maintenant facile de démontrer le

(5) *Voir* par exemple [7], p. 89, th. A.

théorème 1 du paragraphe 2. En effet, grâce à la proposition 2 (§ 3) on peut supposer que le faisceau F est induit sur A par un faisceau analytique cohérent dans un voisinage U de A, faisceau que nous appellerons encore F. D'après l'hypothèse de l'énoncé, les voisinages ouverts V de A, contenus dans U, et qui sont des variétés de Stein, forment un système fondamental de voisinages de A ; donc chaque groupe $H^q(A, F)$ est limite directe des $H^q(V, F)$, d'après la proposition 3. Or le « théorème fondamental » dit que $H^q(V, F) = 0$ pour $q \geqq 1$; cela entraîne $H^q(A, F) = 0$ pour $q \geqq 1$, c'est-à-dire l'assertion (B) du théorème. Pour démontrer l'assertion (A), choisissons un V; d'après le théorème fondamental, le $\mathcal{O}_x$-module F_x est engendré par des sections de F au-dessus de V ; il l'est donc, *a fortiori*, par des sections au-dessus de A.

5. Faisceaux analytiques cohérents sur une variété analytique-réelle. — Soit V une variété analytique-réelle. On notera $\mathcal{R}(V)$ le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles aux différents points de V; $\mathcal{R}_x(V)$ désignera donc l'anneau des germes de fonctions analytiques-réelles au point $x \in V$.

PROPOSITION 4. — *Le faisceau $\mathcal{R}(V)$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

La démonstration d'Oka pour le cas analytique-complexe s'applique sans changement au cas analytique-réel. Plus généralement, il y a une démonstration uniformément valable pour tout corps valué complet non discret (*cf.* [4], exposé XV). D'ailleurs, la proposition 4 pourrait facilement se déduire du théorème d'Oka pour le cas analytique-complexe.

DÉFINITION. — Soit V une variété analytique-réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X. On dit que X est une *complexification* de V si chaque point $x \in V$ possède, dans X, un système de coordonnées locales (complexes) z_i jouissant des propriétés suivantes : au voisinage de x, V est l'ensemble des points dont les coordonnées z_i sont réelles, et les parties réelles $\mathrm{Re}(z_i)$ forment un système de coordonnées locales pour V au voisinage de x.

PROPOSITION 5. — *Soit V une variété analytique-réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X, de manière que X soit une complexification de V. Alors le faisceau $\mathcal{R}(V) \otimes_R C$, sur V, s'identifie au faisceau $\mathcal{O}(V)$ induit par $\mathcal{O}(X)$ sur V. Si, de plus, F est un faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent sur V, le faisceau $F \otimes_R C$ est un faisceau $\mathcal{O}(V)$-cohérent.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de la faire dans le cas où $V = R^n$ et $X = C^n$, R^n étant canoniquement plongé dans C^n. Si x est un point de R^n, l'anneau $\mathcal{R}_x(R^n) \otimes_R C$ n'est autre que l'anneau des fonctions analytiques au point x et à valeurs complexes ; il s'identifie à l'anneau $\mathcal{O}_x(C^n)$ des fonctions holomorphes au point x. D'où l'identification des faisceaux $\mathcal{R}(R^n) \otimes_R C$ et $\mathcal{O}(R^n)$.

Soit maintenant F un faisceau analytique cohérent (au sens réel) sur V, c'est-à-dire $\mathcal{R}(V)$-cohérent. En se restreignant à un ouvert convenable U de V, F est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique

$$(\mathcal{R}(U))^p \to (\mathcal{R}(U))^q ;$$

donc $F \otimes_R C$ est isomorphe au conoyau de $(\mathcal{R}(U))^p \otimes_R C \to (\mathcal{R}(U))^q \otimes_R C$, qui s'identifie au conoyau de $(\mathcal{O}(U))^p \to (\mathcal{O}(U))^q$, lequel est analytique cohérent au sens complexe, c'est-à-dire $\mathcal{O}(U)$-cohérent. Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 6. — *Soit V une variété analytique réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X, de manière que X soit une complexification de V. Supposons que V possède dans X un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun soit une variété de Stein. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in V$ et tout faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent F sur V, F_x est engendré* [comme module sur l'anneau $\mathcal{R}_x(V)$] *par des sections de F au-dessus de V;*

(B) *Pour tout entier $q \geq 1$, et tout faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent F sur V, on a $H^q(V, F) = 0$.*

DÉMONSTRATION [6]. — D'après la proposition 5, le faisceau $F \otimes_R C$ est $\mathcal{O}(V)$-cohérent. On peut lui appliquer le théorème 1 (dans lequel A serait remplacé par V). Donc $F_x \otimes_R C$ est engendré, comme module sur $\mathcal{R}_x(V) \otimes_R C$, par des sections de $F \otimes_R C$ au-dessus de V; cela entraîne aussitôt que F_x est engendré, comme module sur $\mathcal{R}_x(V)$, par des sections de F au-dessus de V. D'autre part, le théorème 1 dit que $H^q(V, F \otimes_R C) = 0$ pour $q \geq 1$; comme $H^q(V, F \otimes_R C) \approx H^q(V, F) \otimes_R C$, il s'ensuit que $H^q(V, F) = 0$.

On peut appliquer la proposition 6 à R^n plongé dans C^n, grâce à la proposition 1 (§ 1), et compte tenu du fait classique qu'un domaine d'holomorphie est une variéte de Stein. Ainsi :

THÉORÈME 2. — *Soit F un faisceau analytique cohérent (au sens réel) sur l'espace R^n. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in R^n$, F_x est engendré* (comme module sur l'anneau des fonctions analytiques au point x) *par des sections de F au-dessus de R^n;*

(B) *Pour tout entier $q \geq 1$, on a $H^q(R^n, F) = 0$.*

REMARQUE. — Étant donnée une variété analytique réelle V, réunion dénom-

---

(6) Cette démonstration est calquée sur celle donnée par Serre ([4], exposé XX) dans le cas où V est compacte.

brable de compacts, on peut montrer sans difficulté que V peut être plongée comme sous-espace fermé d'une variété analytique-complexe X telle que X soit une complexification de V. On ignore s'il est possible de faire en sorte que V possède, dans X, un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun soit une variété de Stein, de manière à pouvoir appliquer à V les conclusions (A) et (B) de la proposition 6. Dans le paragraphe suivant, on va démontrer (A) et (B) pour toutes les sous-variétés analytiques dans l'espace numérique R^n.

6. Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique-réelle. — Soit V une variété analytique-réelle. On dit qu'une partie A de V est un *sous-ensemble analytique* de V si A est *fermé* dans V, et si, au voisinage de chaque point $a \in A$, A peut être défini par l'annulation d'un système fini de fonctions analytiques au voisinage de a. Plus particulièrement, A est une *sous-variété analytique* de V si A est fermé dans V et si, au voisinage de chaque point $a \in A$, A peut être défini par l'annulation d'un certain nombre de coordonnées parmi celles d'un système convenable de coordonnées locales (de V) au point a; alors A porte évidemment une structure de variété analytique-réelle.

Soit A un sous-ensemble analytique d'une variété analytique-réelle V; on attache à A un faisceau d'idéaux I sur V, comme suit : si $x \notin A$, on pose $I_x = \mathcal{R}_x(V)$; si $x \in A$, I_x est l'idéal de $\mathcal{R}_x(V)$ formé des germes de fonctions analytiques qui s'annulent identiquement sur A (au voisinage de x). Les idéaux I_x forment bien un faisceau I, qu'on appellera le *faisceau d'idéaux attaché au sous-ensemble analytique* A. Cette définition est calquée sur celle du cas analytique-complexe; mais tandis que, dans le cas analytique-complexe, le faisceau d'idéaux attaché à un sous-ensemble analytique (complexe) est toujours *cohérent* ([3], th. 2), *il n'en est plus de même dans le cas analytique-réel* (*cf.* § 9).

Définition. — Un sous-ensemble analytique A d'une variété analytique-réelle V sera dit *cohérent* si le faisceau d'idéaux I attaché à A est un faisceau cohérent. Il est évident que toute sous-variété analytique de V est un sous-ensemble cohérent.

Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de V, et soit I le faisceau attaché à A. Le faisceau-quotient $\mathcal{R}(V)/I$ est un faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent, nul en dehors de A; il induit sur A un faisceau cohérent d'anneaux, qui s'identifie à un faisceau de germes de fonctions sur A. Dans le cas particulier où A est une sous-variété analytique de V, ce faisceau d'anneaux n'est autre que le faisceau $\mathcal{R}(A)$ des germes de fonctions analytique (réelles); dans le cas général où A est un sous-ensemble analytique cohérent, le faisceau induit sur A par $\mathcal{R}(V)/I$ se notera encore $\mathcal{R}(V)$ et s'appellera le *faisceau des germes de fonctions analytiques* sur A.

Proposition 7. — *Soit* A *un sous-ensemble analytique cohérent d'une* *variété analytique-réelle V, et soit F un faisceau $\mathcal{R}(A)$-cohérent sur A. Si F' désigne le faisceau (sur V) obtenu en prolongeant F par o en dehors de A, alors F', considéré comme faisceau de $\mathcal{R}(V)$-modules, est cohérent.*

La démonstration donnée par SERRE [13] pour le cas algébrique (*loc. cit.*, p. 232, prop. 3) est valable ici, puisqu'elle n'utilise que deux résultats de la théorie abstraite des faisceaux cohérents.

Par ailleurs, il est classique que $H^q(A, F) \approx H^q(W, F')$ avec les notations précédentes ($q \geqq 0$). Compte tenu du théorème 2, on obtient :

THÉORÈME 3. — *Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de l'espace numérique R^n* (ce qui est le cas si A est une *sous-variété analytique* de R^n). *Soit F un faisceau analytique cohérent sur A. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in A$, F_x est engendré* [comme module sur l'anneau $\mathcal{R}_x(A)$ des germes de fonctions analytiques au point x] *par des sections de F au-dessus de A;*

(B) *Pour tout entier $q \geqq 1$, on a $H^q(A, F) = 0$.*

7. Quelques conséquences du théorème 3. — On peut déduire du théorème 3 des conséquences analogues à celles que l'on tire du « théorème fondamental » (§ 2) : les démonstrations sont les mêmes; nous ne les donnerons donc pas ici, et nous renvoyons le lecteur à [4], [5] et [15].

(1) Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de R^n. Alors A peut être défini par des *équations globales* : d'une façon précise, A est l'ensemble des zéros communs aux fonctions *analytiques dans tout R^n* et qui s'annulent sur A. En fait, A peut être défini globalement par un nombre *fini* d'équations (*voir* § 10, corollaire de la proposition 15).

(2) Soit A comme dans (1); alors toute *fonction analytique* sur A [c'est-à-dire toute section du faisceau $\mathcal{R}(A)$] est induite sur A par une fonction analytique de l'espace R^n.

(3) Soit A comme dans (1); si des fonctions analytiques f_i sur A, en nombre fini, n'ont pas de zéro commun, il existe des fonctions c_i analytiques sur A, telles que $\sum_i c_i f_i = 1$.

(4) Si V est une sous-variété analytique de R^n, toute forme différentielle analytique sur V est induite par une forme différentielle analytique de R^n; de plus, l'anneau de cohomologie de l'anneau des formes différentielles analytiques sur V est canoniquement isomorphe à l'anneau de cohomologie réelle de l'espace V (*cf.* théorème de de Rham).

(5) Si une variété analytique réelle peut se plonger dans R^n, il existe toujours sur V, une fonction analytique (réelle) admettant, en chaque point d'un sous-ensemble discret de V, un développement limité arbitrairement donné.

(6) Soit V une variété analytique réelle pouvant se plonger dans R^n; tout « diviseur réel » sur V définit un élément du groupe de cohomologie $H^1(V, Z_2)$; pour que ce soit le diviseur d'une fonction méromorphe réelle, il faut et il suffit que l'élément correspondant de $H^1(V, Z_2)$ soit nul; il existe toujours un diviseur réel dont la classe de cohomologie soit un élément donné de $H^1(V, Z_2)$.

(7) Si V est une variété analytique réelle pouvant se plonger dans R^n, la classification des espaces fibrés principaux *analytiques* (réels) dont le groupe est un groupe de Lie abélien G coïncide avec la classification des espaces fibrés principaux *topologiques* de groupe G. Le cas d'un groupe de Lie non abélien mériterait d'être étudié (pour le cas analytique complexe, *voir* [9] et [6]).

8. Structure des sous-ensembles analytiques réels. — Il s'agit ici de notions plus ou moins connues, mais guère explicitées dans la littérature.

Proposition 8 (7). — *Soit A_a un germe d'ensemble analytique (réel) en un point $a \in R^n$; R^n étant plongé dans C^n, il existe dans C^n, au point a, un germe d'ensemble analytique-complexe $\tilde{A}_a$ et un seul, possédant les deux propriétés suivantes :*

(*a*) $\tilde{A}_a \supset A_a$;

(*b*) *Tout germe de fonction holomorphe (au point a) qui s'annule sur A_a s'annule sur $\tilde{A}_a$.*

On a alors $\tilde{A}_a \cap R^n = A_a$, et tout germe d'ensemble analytique-complexe qui contient A_a contient $\tilde{A}_a$. Si I_a est l'idéal de $\mathcal{A}_a(R^n)$ formé des germes de fonctions analytiques s'annulant sur A_a, et $\tilde{I}_a$ l'idéal de

$$\mathcal{O}_a(C^n) \approx \mathcal{A}_a(R^n) \otimes_R C$$

formé des germes de fonctions holomorphes s'annulant sur $\tilde{A}_a$, on a $\tilde{I}_a = I_a \otimes C$.

Démonstration. — Soit (f_i) un système fini de fonctions analytiques réelles, au voisinage de $a \in R^n$, qui engendre l'idéal I_a. Les équations $f_i(x) = 0$ définissent dans C^n, au voisinage de a, un sous-ensemble analytique-complexe; soit $\tilde{A}_a$ le germe induit par ce sous-ensemble au point a. Il est clair que $\tilde{A}_a$ possède les propriétés (*a*) et (*b*) de l'énoncé. Si B_a est un germe d'ensemble analytique-complexe contenant A_a, tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur B_a s'annule sur A_a, donc s'annule sur $\tilde{A}_a$, et par suite $B_a \supset \tilde{A}_a$; de là résulte l'unicité du germe analytique complexe $\tilde{A}_a$ satisfaisant à (*a*) et

(7) *Cf.* [2], p. 120-122.

(b). La définition explicite de $\tilde{A}_a$ montre que $\tilde{A}_a \cap R^n = A_a$. De plus, tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur $\tilde{A}_a$ s'annule sur A_a, donc est combinaison linéaire (à coefficients holomorphes en a) des f_i, et par suite appartient à l'idéal $\tilde{I}_a = I_a \otimes C$; ceci prouve que $\tilde{I}_a$ est l'idéal des germes de fonctions holomorphes s'annulant sur $\tilde{A}_a$.

DÉFINITION. — Le germe $\tilde{A}_a$ défini dans la proposition 8 s'appelle le *complexifié* du germe A_a.

PROPOSITION 9. — *Si le germe A_a est réunion d'une famille finie de germes d'ensembles analytiques réels A_a^i, le complexifié $\tilde{A}_a$ est réunion des complexifiés $\tilde{A}_a^i$. Si, de plus, les A_a^i sont les composantes irréductibles* [8] *de A_a, les complexifiés $\tilde{A}_a^i$ sont les composantes irréductibles du complexifié $\tilde{A}_a$.*

DÉMONSTRATION. — La réunion des $\tilde{A}_a^i$ contient A_a, et tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a s'annule sur la réunion des $\tilde{A}_a^i$; il résulte alors de la caractérisation axiomatique du complexifié $\tilde{A}_a$ que ce complexifié est égal à la réunion des $\tilde{A}_a^i$. De plus, si A_a est irréductible, $\tilde{A}_a$ est irréductible : car si l'on avait $\tilde{A}_a = B'_a \cup C'_a$, B'_a et C'_a étant des germes complexes distincts de $\tilde{A}_a$, on aurait

$$A_a = B_a \cup C_a, \qquad \text{avec} \quad B_a = B'_a \cap R^n, \qquad C_a = C'_a \cap R^n,$$

donc on aurait par exemple $B_a = A_a$, d'où $B'_a \supset A_a$, donc $B'_a \supset \tilde{A}_a$ et, par suite, $B'_a = \tilde{A}_a$, contrairement à l'hypothèse. Supposons maintenant que A_a admette une décomposition en composantes irréductibles A_a^i; d'après ce qu'on vient de voir, les complexifiés $\tilde{A}_a^i$ sont irréductibles, et $\tilde{A}_a$ est réunion des $\tilde{A}_a^i$; pour montrer que les $\tilde{A}_a^i$ sont les composantes irréductibles de $\tilde{A}_a$, il suffit de vérifier que $\tilde{A}_a^i \not\subset \tilde{A}_a^j$ pour $i \neq j$; or si l'on avait $\tilde{A}_a^i \subset \tilde{A}_a^j$, on aurait $A_a^i \subset A_a^j$ contrairement aux hypothèses.

COROLLAIRE. — *Pour que le germe A_a soit irréductible, il faut et il suffit que son complexifié $\tilde{A}_a$ soit irréductible.*

DÉFINITION. — On dira qu'un germe d'ensemble analytique-complexe B_a,

---

[8] Un germe A_a est réductible s'il existe deux germes B_a et C_a tels que $A_a = B_a \cup C_a$, $B_a \neq A_a$, $C_a \neq A_a$; A_a est *irréductible* dans le cas contraire. Comme l'anneau $\mathcal{R}_a$ des germes de fonctions analytiques au point a est noethérien, on voit facilement que tout germe d'ensemble analytique-réel A_a est réunion d'une famille finie de germes irréductibles A_a^i, et que ceux-ci sont déterminés de façon unique si l'on suppose que $A_a^i \not\subset A_a^j$ pour $i \neq j$ (auquel cas les A_a^i s'appellent les « composantes irréductibles » de A_a). On a les mêmes notions et la même terminologie pour les germes d'ensembles analytiques-complexes.

en un point *réel* $a \in C^n$, est un *complexifié*, s'il existe dans R^n un germe d'ensemble analytique-réel A_a tel que B_a soit le complexifié de A_a.

Cette définition appelle diverses remarques. Si B_a est un complexifié, c'est le complexifié de $B_a \cap R^n$, donc la donnée de B_a détermine A_a. Pour que B_a soit un complexifié, il faut et il suffit qne tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur $B_a \cap R^n$ s'annule sur B_a.

De la proposition 9 résultent les faits suivants :

Toute réunion finie de germes complexifiés est un complexifié; pour qu'un germe B_a soit un complexifié, il faut et il suffit que ses composantes irréductibles soient des complexifiés.

Notions sur la dimension. — Soit B_a un germe d'ensemble analytique-complexe en un point $a \in C^n$; on sait que si B_a est *irréductible*, on définit la *dimension* (complexe) de B_a; si de plus B est un sous-ensemble analytique-complexe, dans un voisinage de a, qui induise le germe B_a, chacune des composantes irréductibles du germe B_x induit par B en un point x voisin de a a même dimension p que le germe B_a. Si un tel point x est *non singulier* pour B, alors B est, au voisinage de x, une sous-variété analytique-complexe de dimension (complexe) p. Rappelons, d'autre part, que l'ensemble S des points singuliers de B est un sous-ensemble analytique-complexe dont toutes les composantes irréductibles, en un point quelconque $x \in S$, sont de dimension $< p$.

Ceci étant rappelé, soit maintenant A_a un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage d'un point $a \in R^n$, et supposons que le germe A_a induit par A soit *irréductible*. Par définition, la *dimension* (réelle) de A au point a (ou la dimension du germe A_a) est égale à la dimension (complexe) du germe complexifié $\tilde{A}_a$, qui est irréductible. Il existe évidemment, dans un voisinage convenable de a dans C^n, un sous-ensemble analytique-complexe B tel que le germe B_a induit par B soit le complexifié de A_a; alors $B \cap R^n$ et A coïncident au voisinage de a. Soit S l'ensemble des points singuliers de B; le germe S_a induit par S ne contient pas A_a, sinon il contiendrait $\tilde{A}_a$, ce qui est impossible puisque les composantes irréductibles de S_a sont de dimension strictement plus petite que la dimension de $B_a = \tilde{A}_a$. Ainsi A possède des points, arbitrairement voisins de a, qui sont *non singuliers* pour B; au voisinage d'un tel point, A est une *sous-variété analytique-réelle dont la dimension est égale à la dimension p du germe A_a*. En effet, cela résulte de la proposition suivante (*cf.* [2], p. 120-122) : *soient des f_i analytiques réelles au voisinage d'un point $b \in R^n$, telles que les équations $f_i(z) = 0$ définissent, dans un voisinage complexe de b, une sous-variété analytique-complexe V de dimension (complexe) p; alors $V \cap R^n$ est, au voisinage de b, une sous-variété analytique-réelle de dimension p.* Pour le voir, on observe que V est stable pour l'automorphisme $(z_1, \ldots, z_n) \rightarrow (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$; on peut ranger les coordonnées (supposées nulles en b) dans un ordre tel que

V soit définie par des équations

$$z_k = g_k(z_1, \ldots, z_p), \qquad p+1 \leq k \leq n,$$

où g_k est holomorphe au voisinage de l'origine. Soit

$$\bar{g}_k(z_1, \ldots, z_p) = \overline{g_k(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)};$$

on a $z_k = \bar{g}_k(z_1, \ldots, z_p)$ sur V, donc $g_k - \bar{g}_k = 0$ sur V, et comme $z_1, \ldots, z_p$ sont des coordonnées locales sur V, les fonctions g_k et $\bar{g}_k$ sont identiques; ainsi g_k est à coefficients réels, et $V \cap R^n$ est défini par les n-p équations réelles $x_k = g_k(x_1, \ldots, x_p)$.

Avant de résumer les résultats obtenus, observons que si un sous-ensemble analytique-réel induit un germe A_a irréductible de dimension p, alors, en tout point $x \in A$ assez voisin de a, toutes les composantes irréductibles du germe induit A_x sont de dimension $\leq p$; car si un sous-ensemble analytique-complexe B est tel que le germe B_a soit le complexifié de A_a, le germe B_x *contient* le complexifié de A_x et, par suite, les dimensions des composantes irréductibles de $\tilde{A}_x$ sont au plus égales à p.

Finalement, nous avons démontré ceci :

PROPOSITION 10. — *Soit A un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage de $a \in R^n$; supposons que le germe A_a soit irréductible et de dimension p. Alors, en chaque point de A assez voisin de a, les composantes irréductibles de A sont de dimension $\leq p$. De plus, il existe un sous-ensemble analytique-réel $A' \subset A$ jouissant des propriétés suivantes :* 1° *les composantes irréductibles de A' au point a sont de dimension $< p$;* 2° *$A - A'$ possède des points arbitrairement voisins de a, et en chacun de ces points A est une sous-variété analytique-réelle de dimension p.*

(Il suffit de prendre pour A' l'intersection $A \cap S$, S désignant comme ci-dessus l'ensemble des points singuliers de B.)

REMARQUE. — Sous les hypothèses précédentes, il peut exister des points de A arbitrairement voisins de a, en lesquels la dimension de A est *strictement inférieure à p*. Par exemple, dans l'espace R^3 (coordonnées x, y, z), le cône d'équation

$$z(x^2+y^2) = x^3$$

est irréductible à l'origine (0, 0, 0); il est de dimension 2 en ce point; mais, au voisinage de chaque point (0, 0, z) tel que $z \neq 0$, il se réduit à la droite d'équations $x = 0$, $y = 0$. Bien entendu, ces points sont *singuliers* pour le complexifié du cône à l'origine, complexifié qui n'est autre que le cône (complexe) défini par la même équation. Ce dernier fait résulte de la

PROPOSITION 11. — *Soit B_a un germe irréductible d'ensemble analytique-complexe en un point réel $a \in C^n$, et soit p la dimension (complexe) de*

B_a. Pour que B_a soit un complexifié, il faut et il suffit que $B_a \cap R^n$ soit un germe (analytique réel) irréductible de dimension p. Il suffit que B_a contienne un germe analytique-réel, irréductible et de dimension p.

DÉMONSTRATION — Supposons que B_a soit le complexifié d'un germe A_a; alors A_a est irréductible (corollaire de la proposition 9), et la dimension réelle de A_a est égale à la dimension complexe p de B_a (par définition de la dimension d'un germe analytique-réel). Réciproquement, supposons que B_a contienne un germe analytique-réel A_a, irréductible et de dimension p; soit B un sous-ensemble analytique complexe, dans un voisinage complexe de a, qui induise le germe B_a, et soit A un sous-ensemble analytique-réel, dans un voisinage réel de a, qui induise le germe A_a. Puisque $A_a \subset B_a$, on peut supposer $A \subset B$. Si f est un germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a, f s'annule en des points non singuliers de B arbitrairement voisins de a, à savoir les points de A où A est une sous-variété de dimension p. Comme B_a est irréductible, f s'annule identiquement sur B au voisinage de a. Ainsi tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a s'annule sur B_a, et, par suite, B_a est le complexifié de A_a.

9. — **Propriétés des sous-ensembles analytiques cohérents.** — Soit A un sous-ensemble analytique d'une variété analytique-réelle V, et soit I le faisceau d'idéaux attaché à A. Pour que I soit cohérent, il faut et il suffit que I soit *cohérent en chaque point* $a \in A$; ceci signifie qu'il existe un système fini de fonctions analytiques réelles au voisinage de a, qui engendrent l'idéal I_x en chaque point x assez voisin de a. Or la propriété, pour le faisceau I attaché à A, d'être cohérent au point $a \in A$, est une propriété qui ne dépend que du germe d'ensemble A_a induit par A au point a. On a donc la notion de *germe* (d'ensemble analytique réel) *cohérent*; pour que A soit cohérent, il faut et il suffit que les germes A_a induits par A aux points $a \in A$ soient cohérents. Tout revient donc à caractériser les germes cohérents; on peut se borner à étudier la cohérence des germes dans l'espace numérique R^n.

PROPOSITION 12. — *Soit A_a un germe d'ensemble analytique-réel en un point $a \in R^n$. Soit B un sous-ensemble analytique-complexe, dans un voisinage complexe de a, tel que le germe induit B_a soit le complexifié de A_a. Pour que A_a soit cohérent, il faut et il suffit que, pour tout point x réel assez voisin de a, le germe B_x induit par B soit un complexifié.*

DÉMONSTRATION. — La condition est nécessaire; soit en effet A un sous-ensemble analytique-réel induisant A_a, et soit (f_i) un système fini de fonctions analytiques réelles au voisinage de a, qui engendre, en chaque point réel x assez voisin de a, l'idéal I_x du faisceau I attaché à A. Les équations $f_i = 0$ définissent, dans un voisinage complexe de a, l'ensemble B. En chaque point x réel assez voisin de a, B_x est donc le complexifié de A_x.

La condition est suffisante; car soit, en chaque point x d'un voisinage complexe de a, J_x l'idéal du faisceau attaché au sous-ensemble analytique-complexe B. Les J_x forment un faisceau cohérent. Si x est un point réel, B_x est, en vertu de l'hypothèse, le complexifié de $B_x \cap R^n$, c'est-à-dire de A_x; donc $J_x = I_x \otimes C$, en notant I_x l'idéal attaché à A au point x. Soit (f_i) un système fini de fonctions holomorphes dans un voisinage complexe de a, qui engendre l'idéal J_x en tout point x d'un voisinage complexe de a; alors les parties réelle et imaginaire des f_i sont des fonctions analytiques réelles qui, en tout point réel x voisin de a, engendrent l'idéal I_x. Ceci prouve que le faisceau I est cohérent au point a, c'est-à-dire que le germe A_x est cohérent.

Proposition 13. — *La réunion d'une famille finie de germes cohérents est un germe cohérent. Pour qu'un germe d'ensemble analytique-réel soit cohérent, il faut et il suffit que ses composantes irréductibles soient des germes cohérents.*

Démonstration. — Soient A^i des sous-ensembles analytiques-réels en nombre fini, dans un voisinage de a, tels que les germes $(A^i)_a$ soient cohérents. Soient B^i des sous-ensembles analytiques-complexes, dans un voisinage complexe de a, tels que $(B^i)_x$ soit le complexifié de $(A^i)_x$, pour tout point réel x voisin de a. Soit B la réunion des B^i; si x est un point réel voisin de a, le germe B_x, réunion des $(B^i)_x$, est le complexifié de la réunion des $(A^i)_x$ (prop. 9), c'est-à-dire de A_x. Ceci établit la première assertion de l'énoncé.

Il reste à montrer que si A_a est cohérent, ses composantes irréductibles A^i_a sont des germes cohérents. Or soient B^i_a les complexifiés des A^i_a; ce sont les composantes irréductibles du germe B_a complexifié de A_a (prop. 9). Chaque intersection $B^i_a \cap B^j_a (i \neq j)$ se compose de composantes irréductibles de dimension strictement plus petite que la plus petite des dimensions de B^i_a et de B^j_a; donc, en chaque point x voisin de a, chaque composante irréductible de $B^i_x \cap B^j_x$ est de dimension strictement inférieure à la plus petite des dimensions de B^i_x et de B^j_x; il en résulte que l'ensemble des composantes irréductibles de B_x est la réunion (quand i varie) des ensembles de composantes irréductibles des B^i_x. Puisque B_x est un complexifié, il en est de même des B^i_x d'après la proposition 9; donc chaque germe A^i_a est cohérent, en vertu de la proposition 12.

Proposition 14. — *Soit A un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage de $a \in R^n$, tel que le germe induit A_a soit irréductible et de dimension p. Si A_a est cohérent, alors, en tout point $x \in A$ assez voisin de a, toutes les composantes irréductibles de A_x sont de dimension p.*

En effet, avec les notations de la proposition 12, les complexifiés des composantes irréductibles de A_x sont des composantes irréductibles de B_x, qui sont de dimension p.

Remarque. — La proposition 14 montre que le cône $z(x^2+y^2) = x^3$ *n'est pas cohérent* à l'origine (0, 0, 0), puisqu'il est de dimension 1 aux points (o, o, z) tels que $z \neq 0$. D'autre part, la condition nécessaire énoncée à la proposition 14 pour que A_a soit cohérent *n'est pas suffisante*; considérons par exemple le cône

$$z(x+y)(x^2+y^2)=x^4;$$

en chaque point (x, y, z) voisin de (o, o, o) et distinct de (o, o, o) c'est une sous-variété de dimension 2; cependant il n'est pas cohérent à l'origine, car son complexifié est le cône complexe ayant même équation, et ce cône induit en chaque point (o, o, z) tel que $z \neq 0$ un germe complexe qui n'est pas un complexifié.

10. Sous-ensembles analytiques de R^n définissables par des équations analytiques. — On a vu (§ 7) que tout sous-ensemble analytique cohérent A de R^n est l'ensemble des zéros communs à une famille de fonctions analytiques dans tout R^n. On va montrer que A peut être défini par un nombre *fini* d'équations $f_i(x)=0$, les f_i étant analytiques dans R^n. De plus, la classe des sous-ensembles analytiques de R^n qui peuvent être définis par un nombre fini d'équations analytiques est plus vaste que celle des sous-ensembles analytiques cohérents, comme le montre l'exemple du cône $z(x^2+y^2)=x^3$ dans R^3.

PROPOSITION 15. — *Soit A un sous-ensemble analytique de R^n. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :*

(a) *Il existe sur R^n un faisceau cohérent d'idéaux I tel que A soit le lieu des zéros de I* [i. e. A est l'ensemble des points x tels que $I_x \neq \mathcal{O}_x(R^n)$];

(b) *Il existe un voisinage ouvert U de R^n dans C^n, et un sous-ensemble analytique-complexe B de U, tel que $B \cap R^n = A$;*

(c) *Il existe un nombre fini de fonctions analytiques réelles f_i dans R^n, tel que A soit l'ensemble des solutions du système d'équations $f_i(x)=0$.*

DÉMONSTRATION. — On va montrer que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit I un faisceau cohérent d'idéaux, comme en (a). Alors $I \otimes_R C$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur R^n, au sens analytique complexe. Ce faisceau est induit par un faisceau cohérent d'idéaux J sur un voisinage ouvert U de R^n. Soit B le lieu des zéros de J; B est un sous-ensemble analytique-complexe de U, et $B \cap R^n = A$.

$(b) \Rightarrow (c)$: D'après la proposition 1, on peut supposer que U est un domaine d'holomorphie. B est alors un sous-ensemble analytique-complexe d'une variété de Stein U, donc ([9]) B est l'ensemble des solutions d'un

([9]) On le prouve au moyen d'un raisonnement dû à Grauert, et que voici : choisissons un point dans chaque composante connexe de $U - B$; d'après la théorie des variétés de système fini d'équations $g_j = 0$, les g_j étant holomophes dans U. Les g_j induisent sur R^n des fonctions analytiques à valeurs complexes ; en égalant à zéro leurs parties réelles et imaginaires, on trouve un système fini d'équations $f_i = 0$ qui définit A.

$(c) \Rightarrow (a)$: Si A est défini par un système fini d'équations analytiques $f_i = 0$, les f_i engendrent, en chaque point $x \in R^n$, un idéal I_x; les idéaux I_x forment un faisceau cohérent I, et A est le lieu des zéros de I.

Corollaire de la proposition 15. — *Tout sous-ensemble analytique cohérent A de R^n est l'ensemble des solutions d'un système fini d'équations analytiques $f_i(x) = 0$.*

[En effet, la condition (a) est satisfaite.]

11. Exemple d'un sous-ensemble analytique de R^3 qui n'est pas définissable globalement par des équations analytiques. — Soit $a(z)$ la fonction d'une variable réelle z, nulle pour $z \leqq -1$ et pour $z \geqq +1$, et égale à $\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$ pour $-1 < z < +1$. Soit S l'ensemble des points de R^3 (coordonnées x, y, z) défini par l'équation

$$z(x^2+y^2) = x^3 a(z).$$

Comme $a(z)$ est une fonction continue, S est *fermé*. De plus S est un sous-ensemble analytique de R^3 : il suffit de le vérifier aux points de S où $z = \pm 1$. En ces points, on a $x = 0$, $y = 0$. Considérons par exemple le point $(0, 0, 1)$; au voisinage de ce point, S peut être défini par le système d'équations $x = 0$, $y = 0$. Ainsi S est bien un sous-ensemble analytique. On va prouver :

Proposition 16. — *S étant défini comme ci-dessus, si une fonction $f(x, y, z)$, analytique réelle dans R^3, s'annule en tout point de S, elle est identiquement nulle.*

Démonstration. — R^3 possède un voisinage ouvert U dans C^3, tel que f se prolonge en une fonction holomorphe dans U; on la notera encore f. Consi-

Stein, il existe une fonction g_1 holomorphe dans U, nulle sur B et égale à 1 en ces points. Soit B_1 le sous-ensemble analytique, ensemble des zéros de g_1; B_1 contient B; sur chacune des composantes irréductibles (au sens global dans U) de B_1 qui ne sont pas contenues dans B, choisissons un point n'appartenant pas à B; soit g_2 une fonction holomorphe dans U, égale à 1 en chacun de ces points, et nulle sur B. Soit B_2 le sous-ensemble analytique, ensemble des zéros communs à g_1 et g_2; B_2 contient B; celles des composantes irréductibles (globales) de B_2 qui ne sont pas contenues dans B sont de dimension $n-2$, et l'on peut choisir dans chacune d'elles un point n'appartenant pas à B. En poursuivant ainsi, on obtient n fonctions $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes dans U, et l'ensemble de leurs zéros communs contient, outre B, un ensemble de points *isolés*. Si g_{n+1} est holomorphe dans U, nulle sur B et égale à 1 en ces points isolés, B est l'ensemble des zéros communs à $g_1, \ldots, g_{n+1}$.

dérons, dans C^3, l'ensemble S' des solutions complexes de l'équation

$$z(x^2+y^2)=x^3\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right) \qquad (z^2\neq 1).$$

S' est un sous-ensemble analytique (complexe) dans l'ouvert de C^3, complémentaire de la réunion des deux plans $z=1$ et $z=-1$; à l'origine, S' est le complexifié de S. On peut supposer U assez petit pour que les points *réguliers* de S' contenus dans U soient exactement ceux pour lesquels x est $\neq 0$. Considérons l'ensemble des points réguliers de S' contenus dans U; soit M celle des composantes connexes de cet ensemble qui contient les points réguliers voisins de $(0, 0, 0)$. Comme f est holomorphe et s'annule en ces derniers points, f est nulle en tout point de l'adhérence de M. On va montrer que ceci implique que *f s'annule en tout point de S' assez voisin du point* $(0, 0, 1)$.

D'abord, tout point $(0, 0, z_0)$, où z_0 est réel et $-1<z_0<+1$, possède un voisinage tel que les points réguliers de S' contenus dans ce voisinage appartiennent à M. Il suffit donc de prouver ceci : quel que soit $\varepsilon>0$, si deux points $(x_0, y_0, z_0)\in S'$ et $(x_1, y_1\, z_1)\in S'$ sont tels que

$$0<|x_i|<\varepsilon, \qquad |y_i|<\varepsilon, \qquad |z_i-1|<\varepsilon \qquad (\text{pour } i=0, 1),$$

ils peuvent être joints par un arc formé de points de S' situés dans la région

$$0<|x|<\varepsilon, \qquad |y|<\varepsilon\sqrt{3}, \qquad |z-1|<\varepsilon.$$

Voici comment on trouve un tel arc. Appelons $\lambda(z)$ la fonction

$$\frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right).$$

Joignons z_0 à z_1 par un arc Γ situé dans la couronne $0<|z-1|<\varepsilon$, et soit M la borne supérieure de $|\lambda(z)|$ sur Γ. Soit $\eta>0$ tel que $M\eta^3+\eta^2\leqq 1$. Joignons le point (x_0, y_0, z_0) à un point de la forme $(\eta x_0, y'_0, z_0)$ par des points de la forme (x, y, z_0), où $x=tx_0$ (t réel variant de 1 à η), $y=\sqrt{\lambda(z_0)x^3-x^2}$. Comme $|\lambda(z_0)x_0^3|<2\varepsilon^2$, on a constamment $|y|^2<3\varepsilon^2$. On peut joindre de même le point (x_1, y_1, z_1) à un point $(\eta x_1, y'_1, z_1)$. Il reste alors à joindre les points $(\eta x_0, y'_0, z_0)$ et $(\eta x_1, y'_1, z_1)$ par des points de la forme $(\eta x, y, z)$, z décrivant Γ, x variant de x_0 à x_1 dans le domaine $0<|x|<\varepsilon$, et y étant égal à $\sqrt{\lambda(z)\eta^3x^3-\eta^2x^2}$.

Ainsi il est démontré que $f(x, y, z)$ s'annule en tout point de S' assez voisin du point $(0, 0, 1)$. Fixons alors les nombres $x_0\neq 0$ et $y_0\neq 0$ assez voisins de 0; d'après le théorème de Picard appliqué au point singulier $z=1$ de la fonction $\lambda(z)$, il existe une infinité de points (x_0, y_0, z) de S' pour lesquels z est arbitrairement voisin de 1 ; comme f est holomorphe et s'annule en ces points, $f(x_0, y_0, z)$ est nulle quel que soit z réel. Ce résultat vaut quels que soient x_0 et y_0 comme ci-dessus, donc $f(x, y, z)$ est identiquement nulle. Ceci achève la démonstration.

Autre exemple. — La fonction $a(z)$ ayant la même signification que ci-dessus, considérons le sous-ensemble $\Sigma \subset R^3$ défini par l'équation

$$z^2(1-2z^2)(x^2+y^2) = (x^4+y^4)\,a(z).$$

C'est un sous-ensemble analytique de R^3, et il est *compact* (contrairement à ce qui avait lieu pour S). En raisonnant comme pour la proposition **16**, on démontre que *toute fonction $f(x, y, z)$ analytique réelle dans* R^3 *qui s'annule sur Σ, est identiquement nulle.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Behnke et P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Ergebn. Math.*. 1934).

[2] F. Bruhat, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 84, 1956, p. 97-205).

[3] H. Cartan, *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 29-64).

[4] H. Cartan, *Séminaire Éc. Norm. sup.*, 1951-1952.

[5] H. Cartan, *Variétés analytiques complexes et cohomologie* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 41-55).

[6] H. Cartan, *Espaces fibrés analytiques* (à paraître dans le volume du *Symposium de Topologie de Mexico*, 1956).

[7] P. Dolbeault, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 83-130).

[8] H. Grauert, *Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume* (*Math. Ann.*, t. 129, 1955, p. 233-259).

[9] H. Grauert, *Approximationssätze und analytische Faserräume* (*Math. Ann.*, à paraître prochainement).

[10] B. Malgrange, *Plongements des variétés analytiques réelles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 101-113.

[11] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VI. *Domaines pseudoconvexes* (*Tohoku Math. J.*, t. 49, 1942, p. 15-52); IX. *Domaines finis sans point critique intérieur* (*Jap. J. Math.*, t. 23, 1953, p. 97-155).

[12] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VII. *Sur quelques notions arithmétiques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 1-27).

[13] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. Math.*, t. 69, 1955, p. 197-278)

[14] J. P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 1-42).

[15] J. P. Serre, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 57-68).