BULLETIN DE LA S. M. F.

BENO ECKMANN

Groupes d'homotopie et dualité

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 271-281
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__271_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 271 à 281.

GROUPES D'HOMOTOPIE ET DUALITÉ;

PAR

Beno ECKMANN

(Zurich).

I. — INTRODUCTION.

1. — Dans cet exposé je me propose de montrer comment il est possible, en partant du concept classique d'*homotopie*, d'obtenir une grande partie des notions et lois fondamentales de la topologie algébrique en réduisant l'appareil algébrique à un minimum; au lieu de l'introduire *a priori* sous forme de complexes, cochaînes, etc., on fait intervenir les structures algébriques de façon directe, par des définitions topologiques et naturelles au sens de l'homotopie. Je n'affirme nullement que cette façon de faire soit nécessaire ou supérieure aux autres, ou même qu'elle permette de se passer des procédés classiques dans les exemples les plus élémentaires. Il s'agit simplement de montrer qu'elle est possible et donne une vue d'ensemble unifiée sur la topologie algébrique, et avant tout qu'elle conduit tout naturellement à une *dualité* qui, tout au moins, a une valeur heuristique. La forme générale de cette dualité s'exprime dans *deux suites exactes* d'homotopie très générales qui contiennent comme cas particuliers presque toutes les suites exactes connues.

Il existe, dans l'algèbre des modules — ou plus généralement dans toute catégorie abélienne vérifiant certains axiomes — deux « suites d'homotopie » purement algébriques tout à fait analogues; j'en ai parlé ailleurs [1] et je ne reviens pas ici sur cette analogie. Je tiens à remarquer que le présent exposé est une introduction sommaire à des recherches faites en collaboration avec Peter J. Hilton.

2. — On va donc considérer les *applications* (continues) d'un espace A dans un espace B et les *classes d'homotopie* de ces applications, au sens habituel; par exemple A étant un cercle S_1, les classes des chemins fermés dans B. Le rôle essentiel d'un point de base, dont on a besoin pour définir une opération de groupe parmi ces classes, est bien connu. Je précise que dans ce qui suit, « espace » signifie toujours *espace avec point-base* déterminé, noté o, « application » une application $A \to B$ envoyant o de A dans o de B, et « homotopie » une déformation respectant cette condition (pour toute valeur du paramètre de déformation). L'ensemble des applications $A \to B$ sera noté (A, B), celui des classes d'homotopie de ces applications $\Pi(A, B)$; dans ce dernier il y a un élément distingué o, la classe des applications « homotopes à o », celle qui contient l'application triviale f_0, $f_0(A) = o$. L'ensemble $\Pi(A, B)$ est l'objet essentiel de ce qui suit; en essayant d'y introduire des *structures de groupe naturelles*, dans un sens précis, on sera amené aux groupes d'homotopie généraux et aux deux suites exactes duales qui constituent un accès « homotopique » à la topologie algébrique.

Pour $g : A \to A'$, notons comme d'habitude g^* l'application de (A', B) dans (A, B) induite, donnée par $g^*(f) = f \circ g : A \to A' \to B$ pour tout $f \in (A, B)$, et aussi celle de $\Pi(A', B)$ dans $\Pi(A, B)$ correspondante. De même pour $h : B \to B'$, par h_* l'application induite de (A, B) dans (A, B') ou de $\Pi(A, B)$ dans $\Pi(A, B')$, donnée par $h_*(f) = h \circ f : A \to B \to B'$, pour tout $f \in (A, B)$.

II. — GROUPES D'HOMOTOPIE.

3. — Le procédé le plus simple pour définir une structure de groupe dans $\Pi(A, B)$ se présente lorsque B est un *groupe topologique* (par exemple S_1) : On multiplie deux fonctions f et g en multipliant les valeurs, c'est-à-dire les images $f(a).g(a)$, et les axiomes de groupe sont satisfaits pour cette opération $f.g$. Il en est de même lorsque B est un groupe « à l'homotopie près » seulement, ce qu'on appelle un *H-espace*. C'est un espace B muni d'une *multiplication* M associant à b, $b' \in B$ un produit $M(b, b')$ continu, c'est-à-dire d'une application continue $M : B \times B \to B$, de telle façon que les axiomes de groupe soient satisfaits « à l'homotopie près » (par exemple l'application $M_0 : b \to M(b, o)$ est homotope à l'identité I de B, etc.); M est aussi appelée une *H-structure dans B*. Le produit $f.g$ de deux applications $A \to B$ est alors défini par $(f.g)\,(a) = M(f(a), g(a))$; il établit dans $\Pi(A, B)$ une structure de groupe.

Notons que dans ce cas, pour tout $h : A \to A'$, l'application induite h^* : $\Pi(A', B) \to \Pi(A, B)$ respecte le produit $f.g$. Ce procédé pour définir une structure de groupe dans $\Pi(A, B)$ pour un H-espace B et tout A, est donc « naturel »; par là nous entendons que les applications induites h^* sont toujours des *homomorphismes*.

Nous allons examiner de façon générale toutes les structures de groupe naturelles qu'on peut définir dans $\Pi(A, B)$. Soit donc donnée une règle qui, pour B fixe, fait de $\Pi(A, B)$ un groupe pour tout A, de telle façon que tous les h^* induits par $h : A \to A'$ soient des homomorphismes. L'opération dans ces groupes est notée multiplicative. Alors la classe triviale $o \in \Pi(A, B)$ est l'élément neutre de ce groupe. En effet, il en est ainsi pour $A = o$ se réduisant à un point; pour A arbitraire et $h : A \to o$, l'image de cette classe par h^* qui est égale à $o \in \Pi(A, B)$ doit être l'élément neutre, h^* étant un homomorphisme. Prenons ensuite $A = B \times B$; soient $p_1, p_2 : B \times B \to B$ les projections sur les deux facteurs, $p_1(b, b') = b$, $p_2(b, b') = b'$, et soit $p = p_1 . p_2$. On remarque que pour $l : B \to B \times B$ défini par $l(b) = (b, o)$, on a $l^*p = l^*(p_1 . p_2) = l^*p_1 . l^*p_2 = I . o = I \in \Pi(B, B)$; en effet, $l^*p_1 : b \to b \times o \to b$ est l'identité de B, $l^*p_2 : b \to b \times o \to o$ est l'application triviale. Choisissons une application M dans la classe $p : B \times B \to B$. L'application $M_0 = l^*M : b \to b \times o \to M(b, o)$ est donc homotope à l'identité I de B. De façon analogue on vérifie les autres axiomes : *M est une H-structure dans B*.

Soient f, g deux applications $A \to B$, $f \times g$ l'application $A \to B \times B$ donnée par $a \to f(a) \times g(a)$. On a pour les classes correspondantes $\in \Pi(A, B)$, $f . g = (f \times g)^* p$, donc $(f . g)(a) = M(f(a), g(a))$. En effet, $(f \times g)^* p = (f \times g)^* p_1 . (f \times g)^* p_2$; or $(f \times g)^* p_1$ est l'application $a \to f(a) \times g(a) \to f(a)$, c'est f, et $(f \times g)^* p_2 = g$. Il résulte ainsi :

Si, pour un espace B, une structure de groupe naturelle est donnée dans $\Pi(A, B)$ pour tout A, alors B est un H-espace et l'opération dans $\Pi(A, B)$ est celle définie par la multiplication (H-structure) dans B.

4. — La question qui s'impose alors est de déterminer les structures de groupe naturelles dans $\Pi(A, B)$ pour A fixe et B variable, dualité consistant à renverser le sens des flèches (des applications) ou, ce qui revient au même, à permuter le rôle de A et de B.

Supposons une telle règle donnée, définissant dans $\Pi(A, B)$ pour tout B une opération naturelle, que nous désignerons par $+$. Alors, de façon tout à fait analogue à ce qui précède, il s'ensuit que A est muni d'une *comultiplication* (*H'-structure*), et que $f + g$ est définie par cette comultiplication.

Que faut-il entendre par là ? Choisissons $B = A \vee A$, la réunion de deux exemplaires de A ayant o en commun (par exemple $A \times o \cup o \times A \subset A \times A$); appelons p_1 la classe de l'application $a \to a \times o$, p_2 celle de $a \to o \times a$, et soit $M' : A \to A \vee A$ dans la classe $p_1 + p_2$. Cette application M' vérifie des axiomes correspondant par dualité à ceux d'une H-structure; par exemple, pour $l : A \vee A \to A$ [donnée par $l(a \times o) = a$, $l(o \times a) = o$], $l_* M' : A \xrightarrow{M'} A \vee A \xrightarrow{l} A$ est homotope à l'identité I de A, etc. Nous l'appellerons une H'-structure dans A. On montre comme avant, que pour $f, g : A \to B$ on a $f + g = (f \vee g)_* M'$; c'est-à-dire $f + g$ est donnée par l'application $A \xrightarrow{M'} A \vee A \xrightarrow{f \vee g} B$ [$f \vee g$ désignant l'application $a \times o \to f(a)$, $o \times a \to g(a)$]. Comme avant, la classe triviale o est l'élément neutre de $\Pi(A, B)$.

Si, pour un espace A, une structure de groupe naturelle est donnée dans $\Pi(A, B)$ *pour tout B, alors A est un H'-espace et l'opération dans* $\Pi(A, B)$ *est celle définie par la comultiplication (H'-structure) dans A.*

Si A est un H'-espace et B un H-espace, on a donc deux opérations naturelles $+$ et $.$ dans $\Pi(A, B)$. Pour quatre éléments $f, f_1, g, g_1 \in (A, B)$ effectuons $(f+g).(f_1+g_1)$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, bend left=60, "f_1"] & & \\ A \arrow[r, "M'"] & \vee & B \times B \arrow[r, "M"] & B \\ & A \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, bend right=60, "g_1"'] & & \end{tikzcd}$$

C'est évidemment la même chose que $f.f_1 + g.g_1$, donc

$$(f+g).(f_1+g_1) = f.f_1 + g.g_1.$$

Choisissons $g = f_1 = o =$ classe triviale $\in \Pi(A, B)$:

$$(f+o).(o+g_1) = (o+g_1).(f+o) = f+g_1,$$
$$f+g_1 = f.g_1 = g_1.f,$$

c'est-à-dire : *Si A est un H'-espace et B un H-espace, les deux structures de groupe dans* $\Pi(A, B)$ *coïncident et sont abéliennes.* La structure de groupe dans $\Pi(A, B)$ ne dépend donc, dans ce cas, ni de la H- ni de la H'-structure choisie dans B et A ; il y a une seule structure de groupe naturelle dans $\Pi(A, B)$, et elle est abélienne.

5. — Il existe des procédés standard pour associer à des espaces donnés des H-espaces et des H'-espaces.

a. ΩB, *l'espace des lacets dans B* au point o [c'est-à-dire des application continues ω du segment $s = (0 \leqq t \leqq 1)$ dans B avec $\omega(0) = \omega(1) = o$] est un H-espace par rapport à une multiplication classique, la composition habituelle des chemins.

b. ΣA, *la suspension de A* (le cône double sur la base A) est définie par $A \times s$, avec $A \times (0) \cup A \times (1) \cup o \times s$ identifié en un seul point o; elle possède une comultiplication M' évidente.

On voit sans peine qu'il y a correspondance biunivoque canonique entre les éléments de $\Pi(\Sigma A, B)$ et $\Pi(A, \Omega B)$, et qu'elle respecte les opérations $+$ et $.$ induites par ces structures : $\Pi(\Sigma A, B) \simeq \Pi(A, \Omega B)$ par un isomorphisme canonique.

Pour deux espaces A et B et un entier n, définissons le $n^{\text{ième}}$ *groupe d'homotopie de A dans B* par

$$\Pi_n(A, B) = \Pi(\Sigma^n A, B) = \Pi(A, \Omega^n B) = \Pi(\Sigma^{n-k} A, \Omega^k B),$$

$0 \leqq k \leqq n$. Si n est > 1, $\Pi_n(A, B)$ est abélien. Ces groupes coïncident, dans le cas particulier où A est une sphère S_k à k dimensions, donc $\Sigma^n A = S_{n+k}$, avec les groupes d'homotopie de Hurewicz $\pi_{n+k}(B)$. Nous reviendrons sur d'autres choix particuliers importants de A ou de B.

6. — La dualité qui s'est imposée ci-dessus consiste en un procédé systématique pour obtenir, à partir d'un énoncé (définition, théorème, ...) l'énoncé dual. Sans trop insister, notons qu'on « renverse les flèches » (les directions des applications); remplacer le produit cartésien $B \times B$ par la somme $A \vee A$, ΩB par ΣA, etc. peut aussi être interprété dans ce sens.

Pour une application $f : A \to B$, appelons $N = f^{-1}(o) \subset A$ le noyau, et $C = B/f(A)$, obtenu par identification de $f(A)$ en un point o, le conoyau; N et C se correspondent dans la dualité. Notons que la suite

$$N \to A \xrightarrow{f} B \to B/f(A)$$

n'est pas « exacte » : l'image $f(A)$ n'est pas équivalente à A/N. La dualité n'a qu'un caractère heuristique, dans ce sens que le dual d'un énoncé n'est pas automatiquement valable, mais doit être redémontré.

III. — GROUPES RELATIFS, SUITES EXACTES.

7. — Les groupes d'homotopie de Hurewicz $\pi_m(B)$, cas particuliers de nos $\Pi_n(A, B)$, sont liés entre eux par une suite exacte relative, instrument fondamental et bien connu pour les raisonnements où interviennent ces groupes. Nous allons généraliser cette suite exacte dans le cas de nos groupes $\Pi_n(A, B)$.

Pour cela, rappelons que le lien essentiel entre les $\pi_m(B)$ des différentes dimensions m est le *groupe relatif* $\pi_m(\beta)$ d'une paire β d'espaces $B_1 \subset B_2$: les eléments de $\pi_m(\beta)$ sont les classes d'homotopie des applications $(V_m, S_{m-1}) \to (B_1, B_2)$, où V_m désigne la boule à m dimensions, S_{m-1} sa frontière (où bien $V_m =$ cône sur S_{m-1}). Plus exactement, il s'agit d'une paire d'applications $f_1 : S_{m-1} \to B_1$, $f_2 : V_m \to B_2$ avec $f_2 \mid S_{m-1} = f_1$, c'est-à-dire telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_{m-1} & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow j & & \downarrow \beta \\ V_m & \xrightarrow{f_2} & B_2 \end{array}$$

($j =$ plongement de S_{m-1} dans V_m, $\beta =$ plongement de B_1 dans B_2) soit commutatif.

Il convient pour la suite de nos raisonnements de ne pas se restreindre au cas d'un plongement $\beta : B_1 \to B_2$; nous entendrons par *une « paire » simplement une application arbitraire* β de B_1 dans B_2. En passant de la *catégorie des espaces à celle des paires*, on peut refaire les raisonnements de la partie II de cet exposé; nous allons les exquisser, sans entrer dans les détails.

Soient $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ deux paires. Une application $f : \alpha \to \beta$ est formée par deux applications $f_i : A_i \to B_i$, $i = 1, 2$, telles que

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 \end{array}$$

soit commutatif. Une homotopie de $f : \alpha \to \beta$ et $g : \alpha \to \beta$ est formée par une homotopie de f_1 et une de f_2 telles que pour toute valeur du paramètre de déformation la commutativité soit conservée. L'ensemble $\Pi(\alpha, \beta)$ de ces classes d'homotopie contient un élément trivial $[f_i(A_i) = o \in B_1]$. On peut établir une structure de groupe naturelle dans $\Pi(\alpha, \beta)$ pour β fixe et α variable, si β est une *H-paire* et seulement dans ce cas; pour α fixe et β variable, si α est une *H'-paire*. Une H-paire $b : B_1 \to B_2$ est une application d'un H-espace B_1 dans un H-espace B_2 qui est un homomorphisme pour les deux H-structures; de façon analogue pour une H'-paire α. *Si α est une H'-paire et β une H-paire, les deux structures de groupe dans* $\Pi(\alpha, \beta)$ *coïncident et sont abéliennes.*

En particulier, pour $\beta : B_1 \to B_2$ arbitraire, l'application induite $\Omega\beta : \Omega B_1 \to \Omega B_2$ des lacets de B_1 dans ceux de B_2 est une H-paire. De même, pour $\alpha : A_2 \to A_2$, l'application correspondante des suspensions $\Sigma\alpha : \Sigma A_1 \to \Sigma A_2$ est une H'-paire, et l'on a $\Pi(\Sigma\alpha, \beta) \cong \Pi(\alpha, \Omega\beta)$; on pourrait définir des groupes $\Pi_n(\alpha, \beta)$, etc.

8. Ici nous allons nous borner à ce qui est nécessaire pour définir les groupes « relatifs » tels qu'ils interviennent dans les suites exactes reliant les $\Pi_n(A, B)$.

Soit β une application $B_1 \to B_2$ arbitraire, et, pour A arbitraire, ι_1 l'application qui plonge A comme base dans son cône CA. Comme $\Sigma^{n-1}CA$ est équivalent à $C\Sigma^{n-1}A$, l'application $\iota_n = \Sigma^{n-1}\iota_1 : \Sigma^{n-1}A \to \Sigma^{n-1}CA$ peut aussi s'interpréter comme plongement de $\Sigma^{n-1}A$ dans $C\Sigma^{n-1}A$. Le groupe $\Pi(\iota_n, \beta) = \Pi(\Sigma^{n-1}\iota_1, \beta)$ est noté $\Pi_n(A, \beta)$ et dit le $n^{\text{ième}}$ *groupe d'homotopie relatif de A dans la paire* β. Pour qu'il y ait effectivement une structure de groupe, il faut supposer $n > 1$; ce groupe est abélien pour $n > 2$. Les éléments de $\Pi_n(A, \beta)$ sont, dans le cas d'un plongement $\beta : B_1 \subset B_2$, les classes d'applications de $C\Sigma^{n-1}A$ dans B_2 envoyant $\Sigma^{n-1}A$ dans B_1. Si

$B_1 = o \in B_2$, on peut identifier ces applications à celles de $\Sigma^n A = C\Sigma^{n-1}A/\Sigma^{n-1}A$ dans B_2, et le groupe relatif $\Pi_n(A, \beta)$ s'identifie au groupe absolu $\Pi_n(A, B_2)$. De façon analogue, si B_2 se réduit à un point o $(\beta : B_1 \to o)$, le groupe $\Pi_n(A, \beta)$ s'identifie à $\Pi_{n-1}(A, B_1)$.

Pour $\beta : B_1 \to B_2$ arbitraire, on a alors une suite d'homomorphismes

$$S_*(\beta) : \quad \ldots \to \Pi_n(A, B_1) \xrightarrow{\beta_*} \Pi_n(A, B_2) \xrightarrow{J} \Pi_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, B_1) \to \ldots,$$

J s'obtient en interprétant $\Pi_n(A, B_2)$ comme $\Pi_n(A, \mathring{\beta})$, $\mathring{\beta} : o \to \mathrm{B}_2$, et en prenant l'homomorphisme de $\Pi_n(A, \mathring{\beta})$ dans $\Pi_n(A, \beta)$ induit par l'application de $\mathring{\beta}$ dans β qui est l'identité sur B_2. L'homomorphisme ∂ est donné par la restriction à $\Sigma^{n-1}A \to B_1$ des applications de ι_n dans β. On vérifie directement que *cette suite* $S_*(\beta)$ *est exacte.*

De façon duale, on définit pour une application $\alpha : A_1 \to A_2$ arbitraire et un espace B les *groupes relatifs* $\Pi_n(\alpha, B)$, $n > 1$ (ensemble sans structure de groupe pour $n = 1$), abéliens pour $n > 2$: On entend par ρ_1 la projection naturelle de EB [espace des chemins ouverts ω d'origine o dans B, $\rho_1(\omega) =$ extrémité de ω] dans B, de noyau $\rho_1^{-1}(o) = \Omega B$, et l'on pose $\rho_n = \Omega^{n-1}\rho_1$, $n > 0$. Alors ρ_n s'interprète aussi comme projection de $E\Omega^{n-1}B$ dans $\Omega^{n-1}B$, de noyau $\Omega^n B$. Le groupe $\Pi_n(\alpha, B)$ est défini par $\Pi(\alpha, \rho_n)$; si $A_2 = o$, $\Pi_n(\alpha, B)$ s'identifie à $\Pi_n(A_1, B)$, et si $A_1 = o$, à $\Pi_{n-1}(A_2, B)$. On associe à α arbitraire la *suite exacte*

$$S^*(\alpha) : \quad \ldots \to \Pi_n(A_2, B) \xrightarrow{\alpha^*} \Pi_n(A_1, B) \xrightarrow{J} \Pi_n(\alpha, B) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A_2, B) \to \ldots$$

les homomorphismes J et ∂ étant définis de façon tout à fait duale de ceux dans $S_*(\beta)$.

Si A est une sphère, et $\beta : B_1 \subset B_2$ un plongement, la suite $S_*(\beta)$ se réduit à la suite relative classique des groupes d'homotopie π_m de Hurewicz. On constate également que $S^*(\alpha)$ contient comme cas particulier, avec les restrictions habituelles sur les dimensions, la suite de *cohomotopie* (BORSUK-SPANIER), et d'autres suites connues. Le fait que la suite de Hurewicz se réduit, sous des conditions particulières (fibration), à une suite *absolue*, se retrouve pour notre suite générale $S_*(\beta)$ et de façon duale, pour $S^*(\alpha)$; entrons dans quelques détails de cette question.

9. — Appelons *fibration* une application $\beta : B_1 \to B_2$ qui jouit de la propriété de *relèvement des homotopies* (pour les applications dans B_2 d'une certaine classe d'espaces précisée suivant le cas) : pour toute application $f_2 : X \to B_2$ qui se factorise par β, $f_2 = \beta \circ f_1$, toute homotopie de f_2 se factorise également par β. Dualement, appelons *cofibration* une application $\alpha : A_1 \to A_2$ avec la propriété d'« *abaissement des homotopies* » : Pour toute application $f_1 : A_1 \to X$ qui se factorise par α, $f_1 = f_2 \circ \alpha$, toute homotopie

de f_1 se factorise également par α. En diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] & B_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "f_1"] & \\ A_2 \arrow[r, dotted, "f_2"] & X \end{tikzcd}$$

Si α est un plongement $A_1 \subset A_2$, alors cette dernière propriété n'est autre chose que celle d'*extension des homotopies*, valable en particulier pour tout polyèdre A_2 et sous-polyèdre A_1.

Pour une *fibration* $\beta : B_1 \to B_2$, soit $B_0 = \beta^{-1}(o)$ la fibre-type et $\nu : B_0 \subset B_1$ le plongement de B_0 dans B_1. On démontre alors sans peine que, pour A arbitraire,

$$\Pi_n(A, \nu) \cong \Pi_n(A, B_2) \qquad \text{et} \qquad \Pi_n(A, \beta) \cong \Pi_{n-1}(A, B_0)$$

par des isomorphismes canoniques; le premier fait de $S_*(\nu)$ une suite absolue

$$\ldots \to \Pi_n(A, B_0) \to \Pi_n(A, B_1) \to \Pi_n(A, B_2) \to \Pi_{n-1}(A, B_0) \to \ldots,$$

et le second de $S_*(\beta)$ la même suite (à des signes près).

Pour une *cofibration* $\alpha : A_1 \to A_2$, appelons *cofibre* le quotient $A_2/\alpha A_1 = A_3$ (le conoyau de α), et γ l'application $A_2 \to A_3$ donnée par l'identification de αA_1 en un point o. On démontre alors que, pour B arbitraire,

$$\Pi_n(\gamma, B) \cong \Pi_n(A_1, B) \qquad \text{et} \qquad \Pi_n(\alpha, B) \cong \Pi_{n-1}(A_3, B),$$

et l'on obtient une suite exacte absolue

$$\ldots \to \Pi_n(A_3, B) \to \Pi_n(A_2, B) \to \Pi_n(A_1, B) \to \Pi_{n-1}(A_3, B) \to \ldots.$$

Dans le cas d'une cofibration $\alpha : A_1 \subset A_2$, l'isomorphisme

$$\Pi_n(\alpha, B) \cong \Pi_{n-1}(A_3, B)$$

peut s'interpréter ainsi : Le groupe relatif $\Pi_n(\alpha, B)$ de $\alpha : A_1 \to A_2$ ne dépend que du quotient A_2/A_1, c'est-à-dire ne change pas si l'on enlève de $A_1 \subset A_2$ les points intérieurs. C'est donc simplement la *propriété d'excision* comme on la rencontre en homologie et cohomologie. La propriété duale $\Pi_n(A, \beta) \cong \Pi_{n-1}(A, B_0)$ dans le cas d'une fibration $\beta : B_1 \to B_2$ exprime que le groupe relatif $\Pi_n(A, \beta)$ ne dépend que de $B_0 = \beta^{-1}(o)$.

IV. — COHOMOLOGIE ET HOMOTOPIE A COEFFICIENTS.

10. La suite exacte $S_*(\beta)$ se réduit, si l'on prend pour A la sphère S_{m-n}, à la suite exacte des groupes de Hurewicz π_m.

Soit maintenant B un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, m)$, où G est un groupe abélien et m un entier $\geqq 0$; c'est-à-dire $\pi_n(B) = 0$ pour $n \neq m$, et $\pi_m(B) = G$. On sait que pour tout G et m il existe un polyèdre de ce genre, et que son type d'homotopie est déterminé par G et m. De plus, il est immédiat que $\Omega K(G, m+1)$ est un espace $K(G, m)$; si A est un polyèdre, les éléments de $\Pi(A, K(G, m))$ et de $\Pi(A, \Omega K(G, m+1))$ se correspondent de façon biunivoque. $\Pi(A, K(G, m))$ est donc un groupe, $\cong \Pi_n(A, K(G, m+n))$ pour tout $n \geqq 0$, noté $H^m(A; G)$. Si A n'est pas un polyèdre, sous-entendons qu'on remplace A par son polyèdre singulier.

De façon analogue, définissons pour $\alpha : A_1 \to A_2$, un groupe abélien G et un entier m, le groupe *relatif* $H^m(\alpha; G)$ par

$$H^m(\alpha; G) = \Pi_1(\alpha, K(G, m)) = \Pi_n(\alpha, K(G, m+n-1));$$

pour $\alpha : o \to A_2$ il se confond avec $\Pi_{n-1}(A_2, K(G, m+n-1)) = H^m(A_2; G)$.

Avec ces définitions, la suite exacte $S^*(\alpha)$ avec $B = K(G, m+n)$ prend la forme

$$\ldots \to H^m(A_2; G) \xrightarrow{\alpha^*} H^m(A_1; G) \xrightarrow{J} H^{m+1}(\alpha; G) \xrightarrow{\partial} H^{m+1}(A; G) \to \ldots.$$

On y reconnaît la *suite de cohomologie*, lorsque α est un plongement $A_1 \subset A_2$, J étant le « cobord » et ∂ induit par l'application

$$\begin{array}{ccc} o & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\ {\scriptstyle\mathring{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_2 \end{array}$$

de $\mathring{\alpha}$ dans α donnée par $f_2 =$ Identité de A_2.

Quant aux autres axiomes de cohomologie (Eilenberg-Steenrod), on vérifie sans peine qu'ils sont satisfaits pour les H^m ici définis; pour cela il est entre autre, nécessaire de se débarrasser de la condition $\alpha(o) = o$ pour les applications $\alpha : A_1 \to A_2$ et définir l'homomorphisme induit α^* dans le cas général. L'axiome d'*excision* est satisfait pour toute cofibration $A_1 \subset A_2$ (donc pour des polyèdres). On est donc en présence d'une théorie de cohomologie « légitime »; elle coïncide pour les polyèdres avec la cohomologie habituelle — cela peut, du reste, aussi être vérifié directement. La convention de remplacer, si A est un espace arbitraire, dans la définition $H^m(A, G) = \Pi(A, K(G, m))$, l'espace A par son polyèdre singulier conduit naturellement à la *théorie singulière*. Il est clair comment il faudrait procéder pour obtenir d'autres théories de cohomologie.

Si G est un groupe topologique, on peut donner une *topologie* à $\Pi(A, K(G, m))$, compacte si G est compact. Cela permet de définir les groupes d'*homologie* par rapport à un groupe de coefficients discret G par $H_m(A; G) = \operatorname{Car} H^m(A; \operatorname{Car} G)$, où Car désigne le passage au groupe des caractères (Pontrjagin). Ces groupes H_m coïncident avec les groupes d'homologie habituels (simpliciaux, singuliers, etc., suivant le cas).

11. — Notre dualité pour les groupes $\Pi_n(A, B)$, qui s'exprime en particulier dans les deux suites exactes $S_*(\beta)$ et $S^*(\alpha)$, contient ainsi comme cas spécial une *dualité entre homotopie (groupes de Hurewicz π_m) et cohomologie H^m*. Pour la rendre plus complète, il convient de définir des *groupes d'homotopie à coefficients*, par rapport à un groupe de coefficients abélien G arbitraire.

Soit $K'(G, m)$ un espace à homologie entière triviale excepté en dimension m, où $H_m = G$, et avec $\pi_1 = H_1$ (espace de Moore); m est un entier > 0. Si c'est un polyèdre, et si $m > 1$, son type d'homotopie est déterminé par G et m; la suspension $\Sigma K'(G, m-1)$ est un $K'(G, m)$. En vertu de cette H'-structure, $\Pi(K'(G, m), B)$ est un groupe pour $m > 1$, abélien pour $m > 2$, que nous notons $\pi_m(G; B)$. Pour $\beta : B_1 \to B_2$ arbitraire, le groupe relatif $\Pi_1(K'(G, m), \beta)$ est noté $\pi_{m+1}(G; \beta)$; ce groupe s'identifie à $\pi_{m+1}(G; B_2)$ pour $\beta : o \to B_2$. Notons que

$$\pi_m(G; B) = \Pi_n(K'(G, m-n), B) \qquad \text{et} \qquad \pi_m(G; \beta) = \Pi_n(K'(G, m-n), \beta)$$

où n est arbitraire dans des limites évidentes; de la suite exacte $S_*(\beta)$ on déduit la suite exacte des groupes d'homotopie à coefficients

$$\ldots \to \pi_m(G; B_1) \xrightarrow{\beta_*} \pi_m(G; B_2) \xrightarrow{J} \pi_m(G; \beta) \xrightarrow{\partial} \pi_{m-1}(G; B_1) \to \ldots,$$

De cette façon, les $\pi_m(G; B)$ vérifient des axiomes duaux de ceux des $H^m(A; G)$; en particulier, la propriété duale de l'excision exprime que pour une fibration β le groupe relatif $\pi_m(G; \beta)$ ne dépend que de $\beta^{-1}(o) = B_0 \subset B_1$. On peut baser une axiomatique des groupes d'homotopie à coefficients sur ces axiomes duaux, où le cas d'un plongement $\beta : B_1 \subset B_2$ ne joue aucun rôle, mais doit être remplacé par celui d'une fibration $\beta : B_1 \subset B_2$.

12. — Les deux suites générales $S_*(\beta)$ et $S^*(\alpha)$ pour les groupes $\Pi_n(A, B)$ contiennent également les *suites exactes* de cohomologie et d'homotopie *relatives aux coefficients*. En effet, soit $h : G_1 \to G_2$ un homomorphisme de groupes abéliens; il peut être « réalisé » par une application

$$\beta : K(G_1, m) \to K(G_2, m)$$

telle que l'homomorphisme des π_m induit par β soit égal à h, la classe d'homotopie de β étant déterminée par h (on peut même choisir pour β une fibration). L'homomorphisme β_* de $H^m(A; G_1) = \Pi(A, K(G_1, m))$ dans $H^m(A; G_2) = \Pi(A, K(G_2, m))$ est déterminé par h et noté h_*. Soit alors $0 \to G_0 \xrightarrow{j} G_1 \xrightarrow{h} G_2 \to 0$ une suite exacte de groupe abéliens; si l'on réalise h par une fibration $\beta : K(G_1, m+n) \to K(G_2, m+n)$, la fibre est un $K(G_0, m+n)$ et la suite exacte $S_*(\beta)$ donne

$$\ldots \to H^m(A; G_0) \xrightarrow{j_*} H^m(A; G_1) \xrightarrow{h_*} H^m(A; G_2) \to H^{m+1}(A; G_0) \to \ldots,$$

la suite de coefficients en cohomologie.

De façon duale, on peut « réaliser » $o \to G_0 \xrightarrow{j} G_1 \xrightarrow{h} G_2 \to o$ par une cofibration $\alpha : K'(G_0, m-n) \subset K'(G_1, m-n)$ de cofibre $K'(G_2, m-n)$, et la suite $S^*(\alpha)$ donne la suite de coefficients pour l'homotopie

$$\ldots \to \pi_m(G_2; B) \xrightarrow{h^*} \pi_m(G_1; B) \xrightarrow{j^*} \pi_m(G_0; B) \to \pi_{m-1}(G_2; B) \to \ldots.$$

Il faut toutefois remarquer que pour les groupes d'homotopie à coefficients les homomorphismes notés h^* et j^* ci-dessus ne sont en général pas déterminés entièrement par h et j. Comme en cohomologie, on déduit de cette dernière suite exacte un « *théorème de coefficients universels* » pour les groupes $\pi_m(G; B)$: Pour $G = Z$ (groupe cyclique infini), $\pi_m(Z; B) = \pi_m(B)$ est le $m^{\text{ième}}$ groupe de Hurewicz, et l'on a une suite exacte

$$o \to \mathrm{Ext}(G, \pi_{m+n}(B)) \to \pi_m(G; B) \to \mathrm{Hom}(G, \pi_m(B)) \to o.$$

$\pi_m(G; B)$ *est donc déterminé par les groupes* $\pi_m(B)$, $\pi_{m+1}(B)$ *et* G, à une extension près (qui n'est en général pas triviale, même si B est un polyèdre).

13. — La dualité entre cohomologie et homotopie telle que je viens de l'exposer suggère beaucoup de problèmes et méthodes faisant intervenir de façon systématique les groupes d'homotopie à coefficients. Mentionnons pour terminer quelques-uns de ces aspects, qui seront traités ailleurs :

a. Opérations homotopiques pour les groupes $\pi_m(G; B)$ dans les cas d'un groupe de coefficients $G \neq Z$ (par exemple $G = Z_2$ ou Z_p).

b. Notion générale de transgression, contenant comme cas particuliers la transgression cohomologique dans les espaces fibrés et son dual homotopique pour les cofibrations.

c. Classification des cofibrations $A_1 \subset A_2$ de cofibre $A_2/A_1 = K'(G, m)$, et classes caractéristiques de ces cofibrations.

d. Décomposition homologique d'un espace simplement connexe (dual de la décomposition de Postnikov) : on peut caractériser le type d'homotopie (singulier) d'un tel espace par ses groupes d'homologie entière et certains éléments de groupes d'homotopie à coefficients.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Eckmann (B.). — *Homotopie et dualité* (*Colloque de Topologie algébrique*, Louvain, Centre belge de Recherches mathématiques, 1956, p. 41-53).

[2] Eckmann (B.) et Hilton (Peter J.). — *Groupes d'homotopie et dualité* ... (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 2444-2447, 2555-2558 et 2991-2993).
ainsi que les Mémoires cités dans [1] et dans [2].

[3] Eckmann (B.) et Hilton (Peter J.) — *Transgression homotopique et cohomologique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 620-623).

Beno Eckmann,
Professeur à l'École polytechnique fédérale,
Zurich (Suisse).