BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MALLIAVIN

Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$ (suite)

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 187-190
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__187_0>

Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 187 à 190.

CALCUL SYMBOLIQUE ET SOUS-ALGÈBRES DE $L_1(G)$ (*suite*);

PAR

PAUL MALLIAVIN
(Caen).

II. CALCUL SYMBOLIQUE MIMIMAL.

1. — Soit $b \in A(G')$, on considère la plus petite sous-algèbre fermée contenant b soit B_b. Un élément $c \in B_b$ est limite d'une suite de polynomes $P_n(b)$. En particulier $P_n(x)$ converge quel que soit $x \in b(G')$. Ceci permet d'associer à c la fonction continue définie sur $b(G')$ par $\lim P_n(x)$. On identifie ainsi B_b à une algèbre de fonctions continues sur $b(G')$, on note par (b) cette algèbre. (b) est une sous-algèbre fermée de $[b]$.

Il est facile de voir que cette inclusion peut être stricte; soit en effet a un élément satisfaisant à I.1.5, alors la dérivée de la mesure de Dirac à l'origine est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(M_n, I)$ par suite sur $[a]$; cette forme linéaire est nulle sur (a^3), d'autre part $[a^3] = [a]$ et cette forme prend la valeur 1 sur a, d'où $(a^3) \neq [a^3]$.

Soit $A_1(G')$ les fonctions

$$b(g') = \sum_{k=1}^{+\infty} (\beta_k \mathrm{Re}\langle g_k, g'\rangle + \delta_k \mathrm{Im}\langle g_k, g'\rangle),$$

telles que

$$-\sum |\beta_k| \log |\beta_k| + |\delta_k| \log |\delta_k| < \infty.$$

2. — THÉORÈME. — *Étant donné $b \in A_1(G')$, on peut trouver une suite M_n satisfaisant* I.1.2 *et* I.1.4 *telle que pour tout ouvert $O \supset b(G')$, on ait*

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset (b).$$

Preuve. — Soit

$$q(u) = \| \exp(iub(g')) \|'_1.$$

On a, si

$$N(t) = \text{nombre de } \beta_k \text{ ou de } \delta_k \text{ tels que } |\beta_k| > t \text{ ou } |\delta_k| > t,$$

$$\log q(u) < -\int_0^{+\infty} \log(1 + Bt|u|)\, dN(t) = T_1(u);$$

ceci résulte du fait, démontré en I [5], formule 5.5, que

$$\| \exp(iv \operatorname{Re}\langle g_k, g'\rangle) \|'_1 < 1 + B|v|,$$

où B est une constante numérique.

D'autre part le théorème de Fubini donne que

$$\int_1^{+\infty} T_1(u)\frac{du}{u^2} = O\left(\int_0^{+\infty} t \log t\, dN(t)\right) < +\infty$$

Le théorème des trois cercles d'Hadamard donne que $T_1(e^t)$ est une fonction convexe de t. Posons

$$T(u) = T_1(uk(u)),$$

où $k(u)$ est une fonction tendant vers l'infini assez lentement pour que I.1.4 soit vérifié et que $T(e^t)$ soit convexe. Définissons M_n par

$$M_n = \sup_{r>1} r^{n-2} \exp(-T(r)),$$

alors $\log M_n$ est une suite convexe. Soit $f \in \mathcal{C}(M_n, (-\infty, +\infty))$, f étant à support compact de mesure B_1, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f vérifiera ([2], p. 22)

2.2. $$|\hat{f}(u)| < B_1 \inf_n \rho^n M_n u^{-n} = B_1 u^{-2} \exp\left(-T\left(\frac{u}{\rho}\right)\right).$$

On aura quel que soit $g' \in G'$,

2.3. $$f(b(g')) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iub(g'))\hat{f}(u)\, du,$$

d'où en intégrant les deux membres sur G', et en intervertissant l'ordre des intégrations

$$\| f(b(g')) \|'_1 < \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(u)|\, q(|u|)\, du,$$

d'où utilisant 2.2 on obtient $f \in [b]$.

On peut éliminer l'hypothèse que f est à support compact en multipliant f par une fonction $F_0 \in \mathcal{C}(M_n, (-\infty, +\infty))$ nulle en dehors de O et égale à 1 sur $b(G')$; finalement on a démontré que

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset [b].$$

Pour remplacer $[b]$ par (b), on peut remarquer que la norme

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in O,\, n} \frac{|f^{(n)}(x)|}{\rho^n M_n}$$

définit une topologie plus fine que celle induite par la norme de $[b]$ (ceci résulte de 2.3) et que les polynomes en x sont denses dans l'espace de Banach des fonctions f telles que $\|f\|_\rho < +\infty$.

3. — Corollaire — *L'algèbre (a) est régulière.*

En effet d'après I.1.4, il existe dans $\mathcal{C}(M_n, O)$ des partitions de l'unité arbitrairement fines.

III. EXTENSION A m ÉLÉMENTS.

4. — Soient $a_1, \ldots, a_m$, m éléments de $A(G')$; on note par $s(a_1, \ldots, a_m)$ la partie de R_m image de G' par l'application $g' \to \{a_p(g')\}$. $[a_1, \ldots, a_m]$ notera toujours l'algèbre des fonctions F définies sur s telles que

$$F(a_1, \ldots, a_m) \in A(G') ;$$

$(a_1, \ldots, a_m)$ les fonctions $F \in [a_1 \ldots, a_m]$ qui sont limites de polynomes pour la norme de $A(G')$. D'après [1] et [3] on sait que $(a_1, \ldots, a_m)$ contient les fonctions analytiques dans un voisinage de s soit $\mathfrak{A}(s)$. On a les inclusions

$$\mathfrak{A}(s) \subset (a_1, \ldots, a_m) \subset [a_1, \ldots, a_m] \subset C(s),$$

où $C(s)$ désigne les fonctions continues sur s. Les deux énoncés qui suivent ont pour but de préciser les deux termes extrêmes de ces inclusions.

On dit que la fonction f définie sur l'ouvert Ω de R_m appartient à la classe $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ si

$$\sup_{n,\, D^n,\, x} \left| \frac{D^n f(x)}{M_n} \right|^{1/n} < +\infty,$$

où

$$D^n = \frac{\partial^{n_1}}{\partial^{n_1}_{x_1}} \cdots \frac{\partial^{n_m}}{\partial^{n_m}_{x_m}} \qquad (n_1 + n_2 \ldots + n_m = n).$$

On a alors les *théorèmes* correspondant à I.1.5 et à II.2.

5. — *Soient Ω un ouvert borné de R_m, M_n une suite satisfaisant* I.1.2, I.1.3, I.1.4, *alors on peut construire $a_1, \ldots, a_m \in A(G')$ de telle sorte que*

$$[a_1 \ldots, a_m] \subset \mathcal{C}(M_n, \Omega).$$

6. — *Soient $b_1, \ldots, b_m$, m éléments donnés de $A_1(G')$, alors on peut trouver M_n satisfaisant* I.1.2 *et* I.1.4 *de telle sorte que pour tout ouvert $O \supset s(b_1, \ldots, b_m)$ on ait*

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset (b_1, \ldots, b_m).$$

La preuve de **5** s'obtient en construisant des a_p de telle sorte que

$$\left\| \exp\left(i \sum_{p=1}^{m}{}' u_p a_p \right) \right\|'_{\infty} < e^{-T(|u|)},$$

où

$$|u| = \left(\sum u_p^2 \right)^{1/2}.$$

On peut construire les a_p à partir de la série I.1.6 en posant

$$a_p = \sum_{k \equiv p} \alpha_k \operatorname{Im} \langle g_k, g' \rangle$$

la congruence $k \equiv p$ étant prise modulo m.

On aura au préalable déterminé les α_k de telle sorte que les coefficients de chacune des séries a_p satisfaissent I.3.1.1.

La démonstration de **6** s'obtient en montrant comme en II que

$$\log \left\| \exp i \sum u_p a_p \right\|'_1 < \int_0^{+\infty} \log(1 + Bt\,|u|)\, dN(t),$$

où

$$N(t) = \text{nombre de } \beta_{k,p} \text{ et de } \delta_{k,p} \text{ tel que } |\beta_{k,p}| > t$$

ou

$$|\delta_{k,p}| > t \qquad (k = 1, 2, \ldots; p = 1, \ldots, m).$$

Remarquons pour terminer que si G' est le cercle alors les fonctions a_p construites en **5** définissent une courbe de Peano contenant l'ouvert Ω de R_m.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Arens (R.) and Calderón (A. P.). — *Analytic functions of several Banach algebra elements*, (*Ann. Math.*, t. 62, 1955, p. 204-216).

[2] Mandelbrojt (S.). — *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[3] Waelbroeck (L.). — *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives*, (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 33, 1954, p. 147-186).

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1959).

Paul Malliavin,
Prof. Fac. Sc. Caen,
252 rue de Rivoli,
Paris (1er)