

# BULLETIN DE LA S. M. F.

EUGENIO CALABI

EDOARDO VESENTINI

**Sur les variétés complexes compactes  
localement symétriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 311-317

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1959\\_\\_87\\_\\_311\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__311_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES VARIÉTÉS COMPLEXES COMPACTES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES;

PAR

EUGENIO CALABI <sup>(1)</sup> ET EDOARDO VESENTINI.

---

Cet exposé donne un résumé préliminaire d'un travail en collaboration qui paraîtra prochainement. Son but est d'étudier les déformations des variétés complexes compactes  $X = D/\Delta$  qu'on peut obtenir comme quotients d'un domaine borné symétrique  $D$  de l'espace  $\mathbf{C}^n$  de  $n$  variables complexes par un groupe discontinu  $\Delta$  d'automorphismes. Nous prouverons que, si  $D$  est irréductible, de dimension  $n > 1$ , et s'il appartient à une des quatre grandes classes de la classification de Élie CARTAN (voir, par exemple, [1], p. 179-180), alors la structure complexe de  $X$  est localement stable. Cette conclusion subsiste même si  $D$  est un produit  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_l$  de  $l$  domaines bornés symétriques irréductibles  $D_i$ , pourvu que chaque  $D_i$ , appartienne à une des quatre grandes classes de la classification de É. CARTAN et que :  $\dim_{\mathbf{C}} D_i > 1$  pour  $i = 1, \dots, l$ .

Pour les détails et les démonstrations nous renvoyons à notre travail commun.

**1. Généralités sur les déformations.** — Toutes les variétés considérées ici seront supposées paracompactes. Soit  $M$  une variété différentiable (de classe  $C^\infty$ ) connexe, et soit  $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$  un espace fibré  $C^\infty$ -différentiable (localement trivial) sur la base  $M$ , tel que chaque fibre  $V_t = \pi^{-1}(t)$  ( $t \in M$ ), soit une variété analytique complexe, de dimension complexe  $n$ , connexe, dont la structure complexe soit compatible avec la structure différentiable induite par celle de  $\mathcal{V}$ .

---

(1) The research of this author was supported by the United States Air Force, through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract n° 49 (638), p. 253.

On dit que la structure complexe de  $V_t$  dépend différentiablement de  $t \in M$  et que l'espace fibré  $\mathcal{V} \xrightarrow{\bar{w}} M$  est une famille différentiable de structures complexes si, pour tout point  $x \in \mathcal{V}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbf{C}^n \times \bar{w}^{-1}(\mathcal{U})$ , de façon telle que la restriction de cet homéomorphisme à  $\mathcal{U} \cap V_t (t \in M)$  soit une transformation birégulière (au sens analytique complexe) de  $\mathcal{U} \cap V_t$  dans  $\mathbf{C}^n \times t$ .

La famille  $\mathcal{V} \xrightarrow{\bar{w}} M$  est dite *triviale* s'il existe une représentation différentiable (de classe  $C^\infty$ ) :  $\mathcal{V} \rightarrow V_0 = \bar{w}^{-1}(o) = (o \in M)$  qui transforme birégulièrement chaque fibre  $V_t = \bar{w}^{-1}(t) = (t \in M)$ , sur la fibre  $V_0$ .

Soit  $\Theta$  le faisceau des germes des champs de vecteurs tangents holomorphes sur une variété complexe, compacte  $X$ .

Un théorème fondamental de Frölicher et Nijenhuis ([2] et [8], théorème 6.3, p. 365), affirme que, si  $H^1(X, \Theta) = o$ , la structure complexe de  $X$  est localement stable; c'est-à-dire, pour chaque famille différentiable  $\mathcal{V} \xrightarrow{\bar{w}} M$  à fibres compactes, contenant  $X$  comme fibre  $X = V_0 = \bar{w}^{-1}(o) = (o \in M)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $o$  dans  $M$ , tel que la famille  $\bar{w}^{-1}(U)$  soit triviale.

**2. Opérateurs différentiels sur une variété complexe.** — Soit  $E$  une structure fibrée analytique complexe à fibre vectorielle sur une variété complexe compacte  $X$ , et soient  $\mathbf{A}^{p,q}(E)$  et  $A^{p,q}(E)$  respectivement le faisceau des germes des  $(p, q)$ -formes différentielles extérieures, (à valeurs complexes et de classe  $C^\infty$ ) à coefficients dans  $E$ , et l'espace vectoriel complexe des sections globales de  $\mathbf{A}^{p,q}(E)$ .

$\mathbf{A}(E) = \Sigma \mathbf{A}^{p,q}(E)$  est un faisceau bigradué sur  $X$ . L'opérateur  $\bar{\partial}$  de différentiation extérieure, par rapport aux conjuguées des coordonnées locales complexes, définit un opérateur cobord pour le complexe  $\Gamma(\mathbf{A}(E)) = \Sigma A^{p,q}(E)$  des sections globales de  $\mathbf{A}(E)$ . Il est bien connu, d'après DOLBEAULT (voir, par exemple, [4], p. 116), que la composante de type  $(p, q)$ ,  $H^{p,q}(X, \mathbf{E})$ , de la  $\bar{\partial}$ -cohomologie de  $\Gamma(\mathbf{A}(E))$  est isomorphe au groupe de cohomologie :  $H^q(X, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^{(p)})$ , où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{T}^{(p)}$  dénotent respectivement le faisceau des germes des sections holomorphes de  $E$  et le faisceau des germes des sections holomorphes de la structure  $\mathbf{T}^{(p)}$  fibrée des  $p$ -formes holomorphes sur  $X$ .

Soit  $E^*$  la structure fibrée duale de  $E$ . Lorsqu'on se donne une métrique hermitienne (de classe  $C^\infty$ ) sur les fibres de  $E$ , dépendant différentiablement des fibres, on peut définir un isomorphisme de  $E \otimes \mathbf{T}^{(p)} \otimes \overline{\mathbf{T}^{(q)}}$  sur  $E^* \otimes \mathbf{T}^{(q)} \otimes \overline{\mathbf{T}^{(p)}}$ , et par conséquent un isomorphisme de  $A^{p,q}(E)$  sur  $A^{q,p}(E^*)$ , qui, à chaque forme  $\varphi$  de type  $(p, q)$ , à coefficients dans  $E$ , associe une forme  $\varphi^*$  de type  $(q, p)$ , à coefficients dans  $E^*$ . Lorsqu'on choisit une métrique hermitienne (de classe  $C^\infty$ ) dans la structure tangente à  $X$ , on peut définir

l'isomorphisme bien connu :

$$\star : E \otimes T^p \otimes \overline{T^{(q)}} \rightarrow E \otimes T^{(n-q)} \otimes \overline{T^{(n-p)}}$$

et par conséquent un isomorphisme de  $A^{p,q}(E)$  sur  $A^{n-q,n-p}(E)$ , qui, à chaque  $(p, q)$ -forme  $\varphi$  à coefficients dans  $E$ , associe une forme  $\star \varphi$  de type  $(n-q, n-p)$ , à coefficients dans la même structure  $E$ .

On définit par

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \wedge \star \psi^* \quad (\star \psi^* = \star(\psi^*) = (\star \psi)^*).$$

Le produit intérieur de deux formes  $\varphi, \psi \in A^{p,q}(E)$ .

Soient  $\partial, \mathfrak{d}$  et  $\bar{\partial}$  les opérateurs définis respectivement par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial\varphi)^* = \bar{\partial}(\varphi^*), & \mathfrak{d}\varphi = -\star \partial \star \varphi, \\ \bar{\mathfrak{d}}\varphi = -\star \bar{\partial} \star \varphi & (\varphi \in A^{p,q}(E)). \end{cases}$$

On vérifie que pour chaque  $\varphi \in A^{p,q}(E)$ ,  $\psi \in A^{p,q+1}(E)$ ,  $\tau \in A^{p+1,q}(E)$  on a

$$(\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathfrak{d}\psi), \quad (\partial\varphi, \tau) = (\varphi, \bar{\mathfrak{d}}\tau).$$

Soit  $\{U_i\}$ , un recouvrement ouvert fini suffisamment fin de  $X$ , et soit  $z^{\alpha} = (\alpha = 1, \dots, n = \dim_{\mathbb{C}} X)$ , un système de coordonnées locales complexes dans  $U_i$ . Si  $h_i$  dénote la représentation locale dans  $U_i$  de la métrique hermitienne choisie sur les fibres de  $E$ , la forme de type  $(1, 0)$ .

$$\theta_i = h_i^{-1} d' h_i$$

(où  $d'$  dénote l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux coordonnées locales complexes  $z^{\alpha}$ ) définit une forme globale  $\theta$  à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de structure de  $E$  qui est associé à une connexion dans la structure fibrée principale associée à  $E$ . La forme de courbure de cette connexion est donnée par  $\bar{\partial} \theta$  ([9]).

Soit :

$$\chi = \sqrt{-1} \bar{\partial} \theta.$$

On démontre que la différenciation covariante  $D$  par rapport à la connexion  $\theta$  est donnée par :

$$D = \partial + \bar{\partial}$$

Les deux opérateurs :

$$\square' = \bar{\partial} \mathfrak{d} + \mathfrak{d} \bar{\partial}, \quad \square'' = \partial \bar{\mathfrak{d}} + \bar{\mathfrak{d}} \partial$$

sont strictement elliptiques. Puisque  $X$  est compacte, les espaces vectoriels complexes  $\mathbf{H}'^{p,q}(X, E)$  et  $\mathbf{H}''^{p,q}(X, E)$  des formes  $\varphi \in A^{p,q}(E)$  telles que :

$$\square' \varphi = 0 \quad \text{ou, respectivement,} \quad \square'' \varphi = 0$$

ont une dimension finie. On obtient des (1) que :

$$\mathbf{H}^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}^{q,p}(X, E^*).$$

KODAIRA a démontré que :

$$\mathbf{H}^{p,q}(X, E) \simeq H^q(X, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^{(p)}).$$

LEMME 1. — Si la métrique choisie dans (la structure tangente à)  $X$  est kählerienne. pour chaque forme  $\varphi \in A^{p,q}(E)$ , on a

$$(\varphi, \square' \varphi) - (\varphi, \square'' \varphi) = (e(\chi) \Delta \varphi - \Delta e(\chi) \varphi, \varphi),$$

où  $e(\chi)$  dénote le produit extérieur de  $\chi$  considérée comme opérateur sur les formes vectorielles extérieures.

On en déduit le théorème suivant :

THÉOREME 2. — Si la métrique choisie dans  $X$  est kählerienne. pour chaque  $\varphi \in \mathbf{H}^{p,q}(X, E)$ , on a :

$$(\Delta e(\chi) \varphi - e(\chi) \Delta \varphi, \varphi) = (\varphi, \square' \varphi) = (\partial \varphi, \partial \varphi) + (\bar{\partial} \varphi, \bar{\partial} \varphi) \geq 0.$$

**3. Variétés complexes localement symétriques.** — Les domaines bornés symétriques  $D$  de l'espace  $\mathbf{C}^n$  de  $n$  variables complexes ont été classifiés complètement par É. CARTAN. Selon la numérotation de C. L. SIEGEL ([10] et [1], p. 178-179) on a les types suivants :

Type  $I_{r,s}$ . —  $D$  est l'ensemble des matrices  $Z$  complexes de type  $r \times s$  telles que

$$(2) \quad I_s - {}^t Z \cdot \bar{Z} > 0,$$

où  $I_s$  est la matrice unité de  $GL(s, \mathbf{C})$ . On a :  $n = \dim_{\mathbf{C}} D = rs$ .

Type  $II_r$ . —  $D$  est l'ensemble des  $r \times r$  matrices complexes antisymétriques  $Z$  satisfaisant la (2) avec  $s = r$ . On a  $n = \dim_{\mathbf{C}} D = r(r-1)/2$ .

Type  $III_r$ . —  $D$  est l'ensemble des  $r \times r$  matrices complexes symétriques  $Z$  à partie imaginaire définie positive. On a  $n = \dim_{\mathbf{C}} D = r(r+1)/2$ .

Type  $IV_n$ . —  $D$  est l'ensemble des  $n \times 1$  matrices  $Z$  complexes telles que :

$$2({}^t Z \cdot \bar{Z}) < 1 + |{}^t Z \cdot Z|^2 < 2.$$

Pour  $n = 2$ ,  $D$  est le produit de deux demi-plans de Poincaré.

Outre ces quatre grandes classes de domaines bornés symétriques, il y a deux types exceptionnels, de dimensions complexes respectives  $n = 16$ , et  $n = 27$ , dont les définitions sont plus compliquées que les précédentes et que nous n'indiquerons pas ici.

Les types  $I_{1,1}$ ,  $II_2$ ,  $III_1$  et  $IV_1$  sont équivalents au demi-plan de Poincaré. On a aussi les équivalences suivantes :  $I_{1,3}$  et  $II_3$ ;  $I_{2,2}$  et  $IV_4$ ;  $III_2$  et  $IV_3$ ;  $IV_6$  et  $II_4$ ;  $I_{r,s}$  et  $I_{s,r}$ .

D'après un résultat de H. CARTAN, le groupe  $\mathfrak{A}(D)$  des automorphismes d'un domaine borné  $D$ , muni de la topologie de la convergence compacte, est un groupe de Lie. Les groupes discontinus d'automorphismes de  $D$  sont exactement les sous-groupes discrets de  $\mathfrak{A}(D)$ .

Soit  $D$  un domaine borné symétrique *irréductible* appartenant à un des types I-IV et soit  $\Delta$  un sous-groupe discontinu d'automorphismes de  $D$ , tel que :

- 1° le quotient  $X = D/\Delta$  soit compact;
- 2° l'identité soit le seul élément de  $\Delta$  ayant des points unis dans  $D$ .

D'après un résultat de Kodaira [7],  $X = D/\Delta$  est une variété projective non singulière.

A l'aide du théorème 2 (ou d'une inégalité de S. NAKANO [9]) on peut démontrer la proposition suivante, qui est le résultat central de cet exposé :

**THÉORÈME 3.** — Soit  $\Theta$  le faisceau des germes des champs de vecteurs holomorphes tangents à  $X = D/\Delta$ . On a :

$$H^q(X, \Theta) = 0,$$

lorsque  $D$  est irréductible et

- 1°  $q < r + s - 1$  pour chaque domaine  $D$  de type  $I_{r,s}$ ;
- 2°  $q < 2r - 3$  » »  $D$  »  $II_r$  ( $r \geq 2$ );
- 3°  $q < r$  » »  $D$  »  $III_r$ ;
- 4°  $q < n - 1$  » »  $D$  »  $IV_n$  ( $n \geq 3$ ).

En particulier sous les hypothèses précédentes, si  $n > 1$ ,

$$(3) \quad H^1(X, \Theta) = 0.$$

Il suit de là, par le théorème de Frölicher-Nijenhuis, le

**THÉORÈME 4.** — Si  $n > 1$ , et si  $D$  est irréductible, la structure complexe de  $X = D/\Delta$  est localement stable.

En vertu du théorème 3 et à l'aide d'une formule de type Künneth (voir, par exemple, [3], p. 244), on peut démontrer que :

$$H^1(X, \Theta) = 0 \quad [\text{et } H^0(X, \Theta) = 0]$$

même si  $D$  est un produit  $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_l$  de domaines bornés symétriques *irréductibles*  $D_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) de type I-IV et de dimensions complexes  $> 1$ . Il découle que le théorème 4 subsiste même pour des domaines bornés symétriques réductibles satisfaisants aux conditions ci-dessus.

4. **Un cas particulier.** — Le théorème de Riemann-Roch ([4], p. 154) appliqué à la structure fibrée des vecteurs complexes tangents à  $\mathcal{X} = D/\Delta$  permet de calculer la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie  $H^q(\mathcal{X}, \Theta)$  non compris dans l'énoncé du théorème 3, mais naturellement il ne peut pas donner en général aucun renseignement sur les dimensions de tous ces groupes.

Il y a seulement un cas où le théorème 3 et le théorème de Riemann-Roch permettent d'achever le calcul des dimensions des groupes  $H^q(\mathcal{X}, \Theta)$ . C'est le cas d'un domaine borné symétrique irréductible  $D$  de type  $I_{1,s}$ ; c'est-à-dire le cas où  $D$  est la boule ouverte de rayon un de  $\mathbf{C}^n$  ( $n = \dim_{\mathbf{C}} D = s$ ). Dans ce cas, en vertu du théorème 3, le seul groupe de cohomologie  $H^q(\mathcal{X}, \Theta)$  qui n'est pas nécessairement zéro est le groupe  $H^n(\mathcal{X}, \Theta)$ . Par un résultat de IGUSA ([6], théorème 8, p. 676 et [5]) on obtient, à partir du théorème de Riemann-Roch que la dimension de  $H^n(\mathcal{X}, \Theta)$  est complètement déterminée par la mesure invariante  $\nu(\mathcal{X})$  de  $\mathcal{X}$  dans son revêtement universel  $D$ . En effet, la caractéristique

$$\chi(\mathcal{X}, \Theta) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(\mathcal{X}, \Theta)$$

est égale à

$$\chi(\mathcal{X}, \Theta) = (-1)^n \frac{n(n+2)n!}{\pi^n} \nu(\mathcal{X})$$

ou même, en vertu d'une formule de IGUSA ([6], p. 676), à

$$\chi(\mathcal{X}, \Theta) = \frac{n(n+2)}{n+1} E(\mathcal{X}),$$

où  $E(\mathcal{X})$  dénote la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{X}$ .

Par conséquent, en vertu du théorème 3,

$$(4) \quad \dim H^n(\mathcal{X}, \Theta) = \frac{n(n+2)n!}{n} \nu(\mathcal{X}) = (-1)^n \frac{n(n+2)}{n+1} E(\mathcal{X}).$$

Puisqu'on a l'isomorphisme canonique ([8], (11.9), p. 386)

$$H^q(\mathcal{X}, \Theta) \simeq H^{n-q}(\mathcal{X}, \mathbf{T}^{(1)}) \otimes \mathbf{K},$$

où  $\mathbf{K}$  dénote la structure linéaire canonique sur  $\mathcal{X}$ , on obtient de (4) que la dimension de  $H^0(\mathcal{X}, \mathbf{T}^{(1)}) \otimes \mathbf{K}$ , c'est-à-dire le « nombre » des formes linéaires holomorphes à coefficients dans  $\mathbf{K}$ , est donné par :

$$\dim H^0(\mathcal{X}, \mathbf{T}^{(1)}) \otimes \mathbf{K} = \frac{n(n+2)n!}{\pi^n} \nu(\mathcal{X}) = (-1)^n \frac{n(n+2)}{n+1} E(\mathcal{X}).$$

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOREL (A.). — *Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes* *Bull. Soc. math. France*, t. 80, 1952, p. 167-182).
- [2] FRÖLICHER (A.) and NIJENHUIS (A.). — *A theorem of stability of complex structures* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 43, 1957, p. 239-241.)
- [3] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. — Paris, Hermann, 1958, (*Act. scient. et ind.*, 1252).
- [4] HIRZEBRUCH (F.). — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*. — Berlin, Springer-Verlag, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, neue Folge, 9).
- [5] HIRZEBRUCH (F.). — *Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch* (*Symposium on algebraic topology*, 1956, Mexico, p. 129-144). — Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.
- [6] IGUSA (Jun-Ichi). — *On the structure of a special class of Kähler varieties* (*Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 669-678).
- [7] KODAIRA (K.). — *On Kähler varieties of restricted type* (*Annals Math.*, t. 60, 1954, p. 28-48).
- [8] KODAIRA (K.) and SPENCER (D. C.) — *On deformations of complex analytic structures* (*Annals Math.*, t. 67, 1958, p. 328-466).
- [9] NAKANO (S.). — *On complex analytic vector bundles* (*J. Math. Soc. Japan*, t. 7, 1955, p. 1-12).
- [10] SIEGEL (C. L.). — *Analytic functions of several complex variables*. — Princeton, Institute for advanced Study, 1949 (Notes miméogr.).
- [11] YANO (K.) and BOCHNER (S.). — *Curvature and Betti numbers*. — Princeton, Princeton University Press, 1953 (*Annals Math. Studies*, 32).

Eugenio CALABI,  
 Institute of Technology,  
 University of Minnesota  
 Minneapolis 14 (États-Unis).

Edoardo VESENTINI,  
 Istituto Matematico « Leonida Tonelli »,  
 Università degli Studi,  
 Pisa (Italie).

