

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

**Sur l'intégrale**  $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz$

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 7 (1879), p. 12-16

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1879\\_\\_7\\_\\_12\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__12_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'intégrale  $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz$ ; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 novembre 1878.)

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que  $n$  soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$(1) \quad \int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2}+zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz + V_n,$$

$\Theta_n$  désignant un polynôme entier en  $x$  et en  $z$ ,  $U_n$  et  $V_n$  deux polynômes entiers en  $x$ . Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant  $\Theta_n(z, x)$  au lieu de  $\Theta_n$ , on a d'ailleurs

$$V_n = \Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n = -\frac{d\Theta_n}{dz} + \Theta_n(z-x) + U_n,$$

et de cette relation, pour  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$ , on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants :

$$U_0 = 1, \quad \Theta_0 = 0; \quad U_1 = x, \quad \Theta_1 = 1; \quad U_2 = x^2 + 1, \quad \Theta_2 = z + x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n+1} = -nz^{n-1} + z^n(z-x) + z^n x + nz^{n-1},$$

on déduit

$$(2) \quad U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}$$

et

$$(3) \quad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de  $U_0$  et de  $U_1$ , montre immédiatement que les polynômes  $U_n$  sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de  $e^{\frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2}(x-h)^2}$  en série (1), dans le cas particulier où l'on a  $a = -1$  et  $h = -z$ .

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$(4) \quad e^{\frac{z^2}{2} + zx} = U_0 + U_1'z + \frac{U_2}{1.2}z^2 + \dots + \frac{U_n}{1.2.3\dots n}z^n + \dots$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à  $x$ ,

$$\begin{aligned} & -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_{n+1} + U_{n+1} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_{n+1} \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \left(xU_n + \frac{dU_n}{dx}\right) \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} + U_n; \end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(4) \quad \Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n,$$

$$(5) \quad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx},$$

$$(6) \quad V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

---

(1) Sur un nouveau développement en série des fonctions (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$nU_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$(7) \quad \frac{d^2U_n}{dx^2} + x \frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0,$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abrégér,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2} - zx} H_n;$$

on aura les relations suivantes :

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} z^n + xH_n + nH_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = xH_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2} + zx}$$

d'où

$$nH_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2} + zx} (U_n - z^n)$$

et

$$(8) \quad \frac{d^2H_n}{dx^2} + x \frac{dH_n}{dx} - nH_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} (z^{n+1} - zU_n - 2 \frac{dU_n}{dx}).$$

Il est remarquable que, le polynôme  $U_n$  étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} (z^{n+1} - zU_n - 2 \frac{dU_n}{dx}),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions  $\Theta$  peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions  $U$ .

On a, en effet,

$$(9) \quad \Theta_{n+1} = \Sigma A_{m,n} U_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

où, en posant, pour abrégier,  $n - m = \mu$ ,

$$A_{m,n} = z^\mu + \frac{m+1}{1} (\mu-1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} (\mu-2)(\mu-3) z^{\mu-4} \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\mu-3)(\mu-4)(\mu-5) z^{\mu-6} \dots$$

Le terme constant de cette expression est nul si  $\mu$  est impair, et, si  $\mu$  est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots\left(m+\frac{\mu}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{\mu}{2}}$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

$$(10) \quad V_{n+1} = U_n + (n-1)U_{n-2} + (n-2)(n-3)U_{n-4} + \dots$$

6. En faisant  $z = \infty$  dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons  $z - x = t$ , il viendra

$$(11) \quad \int_{-\infty}^x (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = U_n \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + V_n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre  $n$  de la fonction  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes  $U_n$  qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction  $e^{\frac{x^2}{2}}$ .

---