BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHAEL F. ATIYAH
FRIEDRICH HIRZEBRUCH

Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 383-396
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__383_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 383 à 396.

QUELQUES THÉORÈMES DE NON-PLONGEMENT POUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES;

PAR

MICHAEL F. ATIYAH ET FRIEDRICH HIRZEBRUCH

Herrn Wolfgang KRULL *zum* 60. *Geburtstag gewidmet.*

Nous avons montré dans [1] que le théorème de Riemann-Roch [4] a des analogues différentiables. Un exposé de ces résultats a été fait par l'un des auteurs au Séminaire Bourbaki [9]. Les théorèmes de Riemann-Roch différentiables fournissent comme cas particulier certaines conditions de divisibilité pour les classes caractéristiques d'une variété différentiable que l'on peut considérer comme des analogues différentiables du théorème de Riemann-Roch de [8].

La plupart de ces conditions de divisibilité ont été prouvées précédemment dans [2], [3] et [11]. Dans ce qui suit nous démontrons à l'aide des méthodes de [1] que les classes caractéristiques d'une variété différentiable compacte orientée de dimension d satisfont aux conditions de divisibilité supplémentaires si la variété peut être différentiablement plongée dans un espace euclidien (ou ce qui est équivalent, une sphère) de dimension $2d-q$ [Théorèmes (2.6), (2.7), (3.2), (3.8)]. Ces conditions de divisibilité « non stables » nous permettent de prouver des théorèmes de non-plongement qui semblent beaucoup plus forts que ceux qui étaient connus avant (3.6). L'outil essentiel est encore le théorème de BOTT ([2], paragraphe 25.8, paragraphe 26.10 et [5])qui dit que la $n^{\text{ième}}$ classe de Chern d'un fibré vectoriel complexe sur la sphère S_{2n} est divisible par $(n-1)$!

Nous rappelons qu'une variété à n dimensions peut être plongée dans S_{2n} d'après WHITNEY [13].

Les résultats de ce mémoire ont été présentés par le second des auteurs au Colloque de Topologie [1-6 juin 1959, Lille.] Les auteurs remercient chaleureusement R. BOTT et J. MILNOR pour leurs précieuses suggestions durant le Colloque, grâce auxquelles des améliorations ont été possibles, améliorations qui ont été incorporées dans le texte.

1. Fibrés vectoriels et représentations.

1.1. — Dans [1] nous avons introduit pour un CW-complexe connexe, dénombrable X, de dimension finie, l'anneau $K(X)$: soit $F(X)$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble de toutes les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes sur X. A un triple $t=(\xi, \xi', \xi'')$ de classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels avec $\xi=\xi'+\xi''$, nous attachons l'élément $[t]=\xi-\xi'-\xi''$ de $F(X)$. Le groupe $K(X)$ est défini comme quotient de $F(X)$ par le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme $[t]$. La loi de groupe dans $K(X)$ est donc induite par la somme de Whitney de fibrés vectoriels. Le produit tensoriel définit une structure d'anneau commutatif dans $K(X)$; l'unité est fournie par le fibré trivial de dimension 1. Le caractère de Chern ([2], § 9.1) est un homomorphisme d'anneau :

$$\mathrm{ch}: K(X) \to H^*(X, Q)$$

dont l'image sera notée ch (X). L'augmentation $K(X) \to Z$ est obtenue en assignant à chaque fibré vectoriel la dimension de sa fibre. Le groupe relatif $K(X, Y)$, pour un sous-complexe non vide Y de X, est le sous-groupe de $K(X/Y)$ d'augmentation zéro, où X/Y est l'espace obtenu à partir de X en identifiant Y à un point. Le produit tensoriel fait de $K(X, Y)$ un $K(X)$-module. Le caractère de Chern :

$$\mathrm{ch}: K(X, Y) \to H^*(X, Y; Q),$$

est compatible avec la structure de $K(X)$-module de $K(X, Y)$ et la structure de $H^*(X, Q)$-module de $H^*(X, Y; Q)$.

D'une manière analogue, en utilisant des fibrés vectoriels réels ou quaternioniens, on définit des groupes $KO(X)$ ou $KSP(X)$ respectivement. $KO(X)$ est ainsi un anneau [mais pas $KSP(X)$]. Les inclusions

$$i: O(m) \to U(m)$$

et

$$j: Sp(m) \to U(2m)$$

induisent des homomorphismes

$$i_*: KO(X) \to K(X)$$

et

$$j_*: KSP(X) \to K(X)$$

où i_* est un homomorphisme d'anneau. Les images $\mathrm{ch} \circ i_*$ et $\mathrm{ch} \circ j_*$ seront notées ch $O(X)$ et ch $SP(X)$ respectivement. Une théorie relative pour les paires (X, Y) est définie comme précédemment.

Soit K le corps des quaternions. On peut définir des produits tensoriels [6] comme suit :

(1) Si V est un R-module et W un K-module à droite, alors $V \otimes_R W$ est un K-module à droite.

(2) Si V, W sont deux K-modules à droite, alors $V \otimes_K W$ est un R-module.

Le produit tensoriel (2) est défini en transformant W en un K-module à gauche au moyen de l'anti-isomorphisme de K qui laisse les quaternions 1 et i fixes et change le quaternion j en $-j$ (*voir* [6]). Ces produits tensoriels définissent des accouplements :

$$KO(X) \otimes_Z KSP(X) \to KSP(X)$$
$$KSP(X) \otimes_Z KSP(X) \to KO(X)$$

qui, par i_* et j_* se transforment en le produit défini dans $K(X)$ (*voir* [6]). Des remarques similaires valent pour le cas relatif.

1.2. — Soit G un groupe de Lie compact connexe et soient $(\rho_1, \rho_2, \ldots)$ les (classes d'équivalence des) représentations complexes irréductibles de G. Soit $R(G)$ le groupe abélien libre engendré par les ρ_i. Le produit tensoriel de représentations fait de $R(G)$ un anneau, que nous appellerons l'anneau de représentation de G. Les représentations complexes de G peuvent être identifiées aux éléments positifs de $R(G)$, c'est-à-dire aux combinaisons finies $\Sigma n_i \rho_i$ où les n_i sont des entiers positifs ou nuls, non tous nuls.

Soit B_G l'espace classifiant de G et soit ξ le G-fibré universel au-dessus de B_G. A chaque représentation complexe ρ de G on peut associer le fibré vectoriel complexe induit $\rho(\xi)$. Le caractère de Chern de $\rho(\xi)$ est un élément de $H^{**}(B_G, Q)$. En étendant, on obtient un homomorphisme d'anneau :

$$\mathrm{ch} : R(G) \to H^{**}(B_G, Q)$$

dont l'image sera notée $\mathrm{ch}\, R(G)$. Puisque deux représentations sont équivalentes si et seulement si leurs caractères sont égaux, il en résulte que ch est un *monomorphisme* (pour les notations utilisées dans ce numéro *voir* [2], en particulier les paragraphes 6.1, 9.1, 10.2).

Si l'on considère une approximation de dimension finie $\tilde{B}_G$ de B_G, on obtient un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \to & K(\tilde{B}_G) \\ {\scriptstyle \mathrm{ch}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{ch}}\downarrow \\ \mathrm{H}^{**}(B_G, Q) & \to & \mathrm{H}^{*}(\tilde{B}_G, Q). \end{array}$$

Soit T, un tore maximal de G. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées (mod 1) de T. Les x_i sont des éléments de $H^1(T, Z)$ et forment une base de ce groupe. Par la transgression négative dans le T-fibré universel au-dessus de B_T, les x_i peuvent être considérés comme éléments de

$$H^2(B_T, Z) \subset H^2(B_T, Q) \qquad (\textit{voir } [2], \text{ paragraphe } 10.1).$$

L'anneau de cohomologie $H^{**}(B_T, Q)$ est l'anneau de séries formelles $Q\{x_1, \ldots, x_n\}$. Les représentations irréductibles de T sont toutes de dimension 1. Chacune est donnée par un poids qui est une combinaison linéaire des x_i à coefficients entiers. Tous les poids de ce type apparaissent. Ceci correspond aux identifications standard

$$\operatorname{Hom}(T, U(1)) = H^1(T, Z) = H^2(B_T, Z).$$

Ainsi ch $R(T)$ est composé exactement des combinaisons linéaires finies à coefficients entiers des éléments e^w avec $w \in H^2(B_T, Z)$. Le fibré $(B_T, B_G, G/T)$ nous permet de considérer $H^{**}(B_G, Q)$ comme un sous-anneau de $H^{**}(B_T, Q)$. Il est clair que :

$$\operatorname{ch} R(G) \subset \operatorname{ch} R(T).$$

Si W est le groupe de Weyl de G, la théorie des représentations donne le résultat suivant :

PROPOSITION. — *ch$R(G)$ est le sous-anneau des éléments de ch$R(T)$ qui sont invariants par W; autrement dit :*

$$\operatorname{ch} R(G) = \operatorname{ch} R(T) \cap H^{**}(B_G, Q).$$

1.3. — Si l'on considère les représentations réelles ou quaternioniennes de G, on obtient alors les groupes $RO(G)$ et $RSP(G)$ dont le premier seulement est un anneau. Les inclusions

$$i : O(m) \to U(m)$$

et

$$j : Sp(m) \to U(2m)$$

induisent des homomorphismes

$$i_* : RO(G) \to R(G)$$

et

$$j_* : RSP(G) \to R(G).$$

i_* est un monomorphisme car la composition de i et de $U(m) \to O(2m)$ induit sur $RO(G)$ la multiplication par 2. De même j_* est un monomorphisme, car la composition de j et de $U(2m) \to Sp(2m)$ induit sur $RSP(G)$ la multiplication par 2.

Ceci nous permet de considérer $RO(G)$ comme un sous-anneau et $RSP(G)$ comme un sous-groupe de $R(G)$. De même qu'en (1.1), on voit que le produit de deux éléments de $RSP(G)$ est dans $RQ(G)$, et que le produit d'un élément de $RO(G)$ et d'un élément de $RSP(G)$ est dans $RSP(G)$.

1.4. — Soit z un élément de $H^*(X, Q)$ dont les composantes de dimensions impaires sont nulles. Pour $t \in Q$, soit $z^{(t)} \in H^*(X, Q)$, l'élément obtenu à partir de z en multipliant sa composante de dimension $2r$ par t^r. Si $z = e^a$ avec $a \in H^2(X, Z)$, alors, $z^{(t)} = e^{ta}$, ce qui montre que $z^{(t)} \in \mathrm{ch}(X)$ si t est un entier. On a plus généralement :

LEMME. — *Si $z \in ch(X)$ et si t est un entier, alors $z^{(t)} \in ch(X)$.*

PREUVE. — Soient T le tore maximal usuel du groupe unitaire $U(n)$, et $x_1, \ldots, x_n$ la base usuelle de $H^1(T, Z) = H^2(B_T, Z)$. Si $t \in Z$, alors d'après la proposition de 1.2,

$$\sum_{i=1}^{n} e^{t.x_i} \in \mathrm{ch}\,(R(U(n)))$$

ce qui prouve le lemme dans le cas universel.

2. Polynomes de Hilbert sur les variétés différentiables.

2.1. — Soit X une variété différentiable compacte connexe orientée. Soient p_i ses classes de Pontrjagin ($p_i \in H^{4i}(X, Z)$). Alors, comme dans [2], paragraphe 23.1, nous posons

$$\hat{A}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mathrm{A}}_j(p_1, \ldots p_j)$$

où $\{\hat{\mathrm{A}}_j\}$ est la suite multiplicative de polynomes ([8]) paragraphe 1) dont

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{z}\right)\Big/\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{z}\right)$$

est la série entière caractéristique. Pour tout $d \in H^2(X, Q)$ et tout $z \in H^*(X, Q)$, nous définissons $\hat{A}(x, d, z)$ comme le nombre rationnel obtenu en évaluant la composante de dimension maximum de $z.e^d\hat{A}(X)$ sur le cycle fondamental de X. La définition du nombre $\hat{A}(x, d, z)$ était motivée par le théorème de Riemann-Roch de [8] :

2.2. — *Soient X une variété algébrique projective, c_1 sa première classe de Chern, et ξ un fibré vectoriel complexe holomorphe sur X, alors* $\hat{A}(X, c_1/2, \mathrm{ch}(\xi))$ *est égal au nombre d'Euler de X dans la cohomologie* *à coefficients dans le faisceau des sections holomorphes de* ξ; *en particulier* $\hat{A}(X,\, c_1/2,\, \mathrm{ch}(\xi))$ *est un entier.*

2.3. — Soit X de nouveau différentiable comme dans 2.1. Il a été prouvé dans [3] et, par des méthodes complètement différentes dans [1], que $\hat{A}(X,\, d/2,\, z)$ est un entier si $z \in \mathrm{ch}(X)$ et si d est une classe entière dont la restriction mod 2 est la classe de Stiefel-Whitney $w_2(X) \in H^2(X,\, Z_2)$.

2.4. — Soient X différentiable, $d \in H^2(X,\, Q)$ et $z \in \mathrm{ch}(X)$. Il résulte immédiatement de la définition que $\hat{A}(X,\, d/2,\, z^{(t)})$ est un polynome en t à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à $(\dim X)/2$. Naturellement le polynome est identiquement nul si $\dim X$ est impaire. Supposons $\dim X = 2n$. Le coefficient de t^n dans le polynome est égal à la valeur de la composante $2n$-dimensionnelle z_n de z sur le cycle fondamental de X.

Pour tout $z \in \mathrm{ch}(X)$, le nombre $z_n[X]$ est de la forme $s(z)/n\,!$, où $s(z)$ est un entier. Si, par exemple, $z = e^a$ avec $a \in H^2(X,\, Z)$, alors $s(z) = a^n[X]$.

2.5. — Si X est algébrique et si un plongement projectif de X est donné pour lequel $a \in H^2(X,\, Z)$ est la classe de cohomologie de la section hyperplane, alors avec $z = e^a$, c_1 étant la première classe de Chern de X, *le polynome* $\hat{A}(X,\, c_1/2,\, z^{(t)})$ *en* t *est le polynome caractéristique de Hilbert pour la variété algébrique* X *dans le plongement projectif donné.*

Ceci résulte de (2.2). Ainsi, en un certain sens, nous pouvons considérer des polynomes de Hilbert pour une variété différentiable arbitraire X (2.4) : nous parlerons du polynome de Hilbert

$$H(t) \equiv \hat{A}(X,\, d/2,\, z^{(t)})$$

de X associé aux éléments d et z de $H^2(X,\, Q)$ et $\mathrm{ch}(X)$ respectivement. Selon (1.4) et (2.4), $H(t)$ a des valeurs entières pour tout t entier si $d \in H^2(X,\, Z)$ et $d \equiv w_2(X) \bmod 2$.

2.6. — Nous pouvons maintenant formuler notre résultat principal qui impliquera les théorèmes de non-plongement du paragraphe 3.

THÉORÈME. — *Soit* X *différentiable* (*comme dans* 2.1). *Soient* d *et* z *des éléments de* $H^2(X,\, Z)$ *et* $\mathrm{ch}(X)$ *respectivement. Soit* $H(t)$ *le polynome de Hilbert associé à* d *et à* z. *Supposons* $\dim X = 2n$ *et que* X *puisse être différentiablement plongée dans la sphère* S_{2n+2k} $(k > 0)$. *Alors :* $2^{n+k-1}\, H(1/2)$ *est un entier.*

2.7. — Le théorème precédent peut être amélioré dans un certains cas par un facteur 2.

THÉORÈME. — *Soient X, z, d, $H(t)$ comme dans* (2.6), *mais posons* $d=0$. *Supposons que* $\dim X = 4m$, *que X puisse être plongée différentiablement dans* S_{4m+2k}, $(k>0)$ *et que :*

ou bien (*a*) $z \in \mathrm{ch}\, O(X)$ et $2m+k \equiv 2 \bmod 4$

ou (*b*) $z \in \mathrm{ch}\, SP(X)$ et $2m+k \equiv 0 \bmod 4$.

Alors $2^{2m+k-2}.\, H(1/2)$ *est un entier.*

Nous prouverons les deux théorèmes au paragraphe 4. Au paragraphe 3, nous donnons des applications.

3. Applications.

3.1. — Pour l'entier positif n, soit $\alpha(n)$ le nombre de 1 dans le développement dyadique de n ; autrement dit, n peut être écrit comme somme de $\alpha(n)$ puissances distinctes de 2. D'après la théorie des nombres élémentaire :

$$n\,! = 2^{n-\alpha(n)}.\, o(n) \tag{1}$$

où $o(n)$ est le plus grand facteur impair de $n\,!$.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des variétés différentiables compactes, connexes, orientées de dimension paire. Plongement signifie « plongement différentiable ».

3.2. THÉORÈME. — *Soit X différentiable de dimension $2n>2$ et supposons que sa classe entière de Stiefel-Whitney W_3 soit nulle. S'il existe $z \in \mathrm{ch}(X)$ tel que $s(z)$ soit impair* (2.4), *alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $4n-2\alpha(n)$. En particulier, s'il existe $d \in H^2(X, Z)$ tel que $d^n[X]$ soit impair, alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $4n-2\alpha(n)$.*

PREUVE. — Puisque $W_3=0$, nous pouvons choisir $c_1 \in H^2(X, Z)$ dont la restriction mod 2 est $w_2(\mathrm{X})$. Considérons le polynome de Hilbert $H(t)$ associé à c_1 et z (*voir* 2.5). Il prend des valeurs entières pour tout t entier et peut ainsi être écrit sous la forme :

$$H(t) = a_n\binom{t}{n} + a_{n-1}\binom{t}{n_{-1}} + \ldots\, a_1\binom{t}{1} + a_0 \tag{2}$$

où les a_j sont entiers ($a_n = s(z)$). Supposons que X puisse être plongé dans S_{2n+2k}, $k>0$. Alors, par (2.6), le nombre $2^{n+k-1}.\, H(1/2)$ est entier. (2) implique :

$$2^{n+k-1} H(1/2) = 2^{k-1}(a_n g_1 + n g_2)/n\,! \tag{3}$$

où g_1 est impair et g_2 pair.

Puisque le nombre donné en (3) doit être entier et que $a_n = s(z)$ est impair par hypothèse, on obtient par (1) que $k-1 \geqq n-\alpha(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME. — *Soit X différentiable de dimension $2n > 4$ avec $W_3 = 0$. Supposons que n soit divisible par 2^r où r est un entier non négatif. S'il existe $z \in \mathrm{ch}(X)$ tel que $s(z)/2^r$ soit un entier impair, alors X n'est pas plongeable dans la sphère de dimension $4n-2\alpha(n)-2r$.*

Ceci est une généralisation de (3.2)). Preuve par (2.6) et (3).

3.4. THÉORÈME. — *Soit X différentiable de dimension $4m$ avec $w_2 = 0$. Supposons que m soit divisible par 2^r, où r est un entier non négatif. S'il existe $z \in \mathrm{ch}(X)$ tel que $s(z)/2^{r+1}$ soit un entier impair, et*

ou bien (*a*) $z \in \mathrm{ch}\, O(X)$ et $\alpha(m)+r \equiv 2 \bmod 4$

ou (*b*) $z \in \mathrm{ch}\, SP(X)$ et $\alpha(m)+r \equiv 0 \bmod 4$;

alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m-2\alpha(m)-2r$.

PREUVE. — Choisissons le polynome de Hilbert $H(t)$ associé à o et à z. Il prend des valeurs entières pour tout t entier (*voir* 2.5), et est ainsi de la forme (2). Supposons X plongé dans $S_{8m-2\alpha(m)-2r}$. Alors (2.7) implique que

$$2^{4m-\alpha(m)-r-2}.H(1/2) \text{ est entier.}$$

Mais nous avons [comparer (3)].

$$2^{2m}.H(1/2) = (s(z).g_1 + 2mg_2)/(2m)!$$

où g_1 est impair et g_2 pair.

Ceci montre que $2^{2m-\alpha(m)-1}/(2m)!$ multiplié par un nombre impair est entier ce qui contredit (1).

3.5. — Il est intéressant d'observer que (3.2), (3.3) et (3.4) sont des théorèmes sur le type d'homotopie de X. Par exemple, nous obtenons par (3.2) :

THÉORÈME. — *Soit X une variété différentiable qui a le type d'homotopie de l'espace projectif complexe $P_n(C)$, $n > 1$. Alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $4n-2\alpha(n)$.*

Dans ce théorème, $P_n(C)$ pourrait être remplacé par toute variété algébrique de dimension complexe n admettant un plongement projectif de degré impair.

THÉORÈME. — *Soit X une variété différentiable qui a le type d'homotopie de l'espace projectif quaternionien $P_m(K)$, $m > 1$. Alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m-2\alpha(m)-2$. Si $d(m) \equiv 0 \bmod 4$, alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m-2\alpha(m)$.*

PREUVE. — Il existe un Sp(1)-fibré canonique au-dessus de $P_m(K)$ (voir [2], paragraphe 15.5). Ceci donne un élément z dans ch $SP(P_m(K))$ qui, dans la notation de [2] est égal à $e^{x_1}+e^{-x_1}$. Ainsi $s(z)=2$, et le théorème résulte de (3.3) et (3.4).

3.6. — REMARQUES.

1° MASSEY a prouvé que $P_{2m}(C)$ ne peut être plongé dans S_{6m+1} pour $m>1$, que $P_7(C)$ ne peut être plongé dans S_{21}, et que $P_m(K)$ ne peut être plongé dans S_{6m+1} pour $m>2$. Ces résultats sont contenus dans le nôtre sauf dans le cas de $P_3(K)$.

2° Il est aisé de prouver par les méthodes standard des classes de Stiefel-Whitney que si m est une puissance de 2, $P_{2m}(C)$ ne peut être plongé dans S_{8m-2} et que $P_m(K)$, $(m>1)$ ne peut l'être dans S_{8m-4}. Nos théorèmes (3.5) l'impliquent.

3° Dans (3.2) et (3.3), la condition $W_3=0$ pourrait peut-être être supprimée. Nous n'avons pu le faire jusqu'à présent que dans des cas particuliers.

3.7. — Pour une variété différentiable de dimension $4m$, l'entier $s(X)$ est défini. Il joue un rôle important dans la théorie du cobordisme de THOM. Voir par exemple [8], paragraphe 6.3, ou [11]. Le nombre $s(X)$ est une combinaison linéaire de nombres de Pontrjagin à coefficients entiers. $2s(X)$ est égal à $s(z)$ où z est le caractère de Chern de l'extension complexe du fibré tangent réel de X. Les théorèmes (3.3), (3.4) entraînent :

COROLLAIRE. — *Soit X différentiable de dimension $4m$ avec $W_3=0$ et $s(X)$ impair. Alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m-2\alpha(m)-2$. Si, de plus, $w_2=0$ et $\alpha(m)\equiv 2 \bmod 4$, alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m-2\alpha(m)$.*

3.8. — Soit X différentiable de dimension $4m$. Son A-genre $A(X)$ est égal à $2^{4m}\hat{A}(X, 0, 1)$. Il a été prouvé dans [2], paragraphe 25, que $A(X)$ est toujours un entier. Ceci est aussi une conséquence de (2.6) puisque, selon WHITNEY [13], X peut être plongée dans S_{8m}. De plus (2.6) et (2.7) entraînent :

THÉORÈME. — *Soit X différentiable de dimension $4m$. Si X peut être plongée dans S_{8m-2q}, alors $A(X)$ est divisible par 2^{q+1}. Si, de plus, $q\equiv 2 \bmod 4$, alors $A(X)$ est divisible par 2^{q+2}.*

Le A-genre de l'espace projectif complexe $P_{2m}(C)$ est $(-1)^m\binom{2m}{m}$ et ainsi (3.1) est égal à $2^{\alpha(m)}$ multiplié par un nombre impair. Dans l'algèbre de THOM (sur les rationnels), toute variété différentiable X de dimension $4m$

est un polynome en les $P_{2j}(C)$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$) à coefficients rationnels n'ayant aucun facteur 2 aux dénominateurs. Ceci entraîne aisément que $A(X)$ est toujours divisible par $2^{\alpha(m)}$ et que

$$A_m(p_1, \ldots, p_m) = 2^{4m} \hat{A}_m(p_1, \ldots, p_m)$$

est comme polynome (*voir* [8], paragraphe 1) précisément divisible par $2^{\alpha(m)}$. Ceci explique le rôle de $\alpha(m)$ dans nos théorèmes de non-plongement.

3.9. — Le théorème (3.8) ne dépend que de la classe de cobordisme de X puisque $A(X)$ est une combinaison linéaire de nombres de Pontrjagin.

Corollaire. — *Soit X différentiable de dimension $4m$ et supposons qu'elle soit cobordante sur les rationnels à l'espace projectif complexe $P_{2m}(C)$. Alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m - 2\alpha(m)$. Si, de plus, $\alpha(m) \equiv 3 \bmod 4$, alors X ne peut être plongée dans la sphère de dimension $8m - 2\alpha(m) + 2$.*

4. Preuve des théorèmes du paragraphe 2.

4.1. — Soit T le tore maximal usuel du groupe orthogonal $SO(2k)$ et $x_1, \ldots, x_k$ la base usuelle de $H^1(T, Z)$ (*voir* [2], paragraphe 9.3). Choisissons l'ordre correspondant sur $H^1(T, Z)$, (*voir* [2], paragraphe 2.4).

Soit λ^i l'extension complexe de la représentation naturelle de $SO(2k)$ sur la $i^{\text{ième}}$ puissance extérieure de R^{2k}. Alors pour $i = k$ nous avons une décomposition de λ^k en deux représentations irréductibles λ_+^k et λ_-^k de poids maximaux $x_2 + x_2 + \ldots + x_1$ et $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} - x_k$ respectivement.

Nous considérons l'élément μ_+ de $R(SO(2k))$ (*voir* 1.2) donné par

$$\mu_+ = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \lambda^i + (-1)^k \lambda_+^k.$$

Le caractère de μ_+, au sens de (1.2) est donné par

$$(1) \qquad \operatorname{ch} \mu_+ = \frac{1}{2}(-1)^k \prod_{i=1}^{k} (e^{x_i} - e^{-x_i}) + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k} (e^{x_i} - 1)(e^{-x_i} - 1).$$

On peut vérifier cette formule comme suit. Soit T' le tore maximal usuel de $U(2k)$ et $y_1, \ldots, y_{2k}$ la base usuelle de $H^1(T', Z)$. L'injection

$$SO(2k) \to U(2k),$$

suivie d'un automorphisme intérieur convenable de $U(2k)$, devient ρ : $SO(2k) \to U(2k)$ avec (*voir* [2], paragraphe 9.4) :

$$(2) \qquad \rho(T) \subset T', \qquad \rho^*(y_{2j-1}) = -\rho^*(y_{2j}) = x_j \, (1 \leq j \leq k).$$

ρ suivie de la $i^{\text{ième}}$ représentation par puissance extérieure Λ^i de $U(2k)$ est λ^i. Il est bien connu, et cela a été utilisé par GROTHENDIECK [4], que :

$$\operatorname{ch}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\Lambda^i=\prod_{i=1}^{2k}(e^{y_i}-1),$$

Or, il résulte de (2) que :

$$\operatorname{ch}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\lambda^i=\prod_{i=1}^{k}(e^{x_i}-1)(e^{-x_i}-1). \tag{3}$$

Ainsi, si Δ^+, Δ^- sont les représentations spinorielles de Spin $(2k)$, nous avons ([7]) :

$$\begin{cases} \Delta^+\otimes\Delta^+=\lambda^0+\lambda^2+\ldots+\lambda^k_+ & \text{si } k \text{ est pair,}\\ \Delta^+\otimes\Delta^+=\lambda^1+\lambda^3+\ldots+\lambda^k_+ & \text{si } k \text{ est impair.}\end{cases} \tag{4}$$

La même formule est valable avec — au lieu de +. A partir de là, en utilisant la formule pour $\operatorname{ch}\Delta^+$ et $\operatorname{ch}\Delta^-$, [2], § 26.5, nous trouvons

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\lambda^k_+-\lambda^k_-)&=\operatorname{ch}(\Delta^+\otimes\Delta^+-\Delta^-\otimes\Delta^-)\\&=\operatorname{ch}(\Delta^+-\Delta^-)\operatorname{ch}(\Delta^++\Delta^-)\\&=\prod_{i=1}^{k}(e^{x_i/2}-e^{-x_i/2})(e^{x_i/2}+e^{-x_i/2}),\end{aligned}$$

d'où :

$$(-1)^k\operatorname{ch}(\lambda^k_+-\lambda^k_-)=(-1)^k\prod_{i=1}^{k}(e^{x_i}-e^{-x_i}). \tag{5}$$

Puisque $\lambda^i=\lambda^{2k-i}$ (par dualité) et puisque $\lambda^k=\lambda^k_++\lambda^k_-$ nous déduisons (1) en ajoutant (3) et (5).

REMARQUE. — Puisque le membre de droite de (1) est invariant par le groupe de Weyl de $SO(2k)$ et puisqu'il appartient à $\operatorname{ch}R(T)$, c'est-à-dire est une combinaison linéaire d'exponentielles à coefficients *entiers*, il résulte de (1.2) qu'il appartient à $\operatorname{ch}R(SO(2k))$. Il est cependant intéressant d'avoir la formule explicite (1).

Si nous remplaçons x_k par zéro dans (1), nous obtenons zéro, ce qui montre que l'image de $\operatorname{ch}\mu_+$ dans $\operatorname{ch}R(SO(2k-1))$ est zéro. D'après (1.2), ceci prouve que μ_+ appartient au noyau de l'homomorphisme naturel :

$$R(SO(2k))\to R(SO(2k-1)).$$

4.2. — Les représentations λ^k_+ et λ^k_- sont, pour k pair, les complexifications de représentations réelles. Or, $SO(2k)$, opérant sur la $k^{\text{ième}}$ puissance extérieure de R^{2k}, laisse invariants deux sous-espaces E_1, E_2, complémentaires. $E_1(E_2)$ est l'espace des « formes » qui restent inchangées (resp. qui changent de signe), par l'opérateur de dualité. D'où, pour k pair, $\mu^+ \in RO(SO(2k))$; et il résulte de (1.3) que μ_+ appartient au noyau de

$$RO(SO(2k)) \to RO(SO(2k-1)).$$

4.3. — Soit B_r l'espace classifiant de $SO(r)$, ou mieux un squelette de cet espace de dimension finie convenable. B_{r-1} est un fibré sur B_r, de fibre S_{r-1}. Soit A_r le « mapping cylinder » de la projection : $B_{r-1} \to B_r$, B_{r-1} est alors un sous-espace de A_r. Puisque μ_+ donne zéro lorsqu'il est restreint à $SO(2k-1)$, il donne naissance à un élément v_k de $\mathrm{ch}(A_{2k}, B_{2k-1})$, uniquement déterminé par la propriété suivante : son image dans $\mathrm{ch}(A_{2k}) \approx \mathrm{ch}(B_{2k})$ est $\mathrm{ch}\,\mu_+$.

L'élément v_k appartient à $\mathrm{ch}\,O(A_{2k}, B_{2k-1})$ si k est pair, ainsi qu'il résulte de (4.2).

4.4. Proposition. — *Soit X différentiable* (*comme dans* 2.1), *de dimension* $2n$ *et supposons-la différentiablement plongée dans* S_{2n+2k}. *Écrivons les classes de Pontrjagin du fibré normal comme fonctions symétriques élémentaires de* $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2$. *Pour* $z \in \mathrm{ch}(X)$, *considérons le nombre* $B(X, z)$ *obtenu en évaluant la composante à* $2n$-*dimensions*

$$B(X, z) = (z/2)\left\{(-1)^k.\prod_{i=1}^{k}((e^{x_i}-e^{-x_i})/x_i) + \prod_{i=1}^{k}((e^{x_i}-1)(e^{-x_i}-1)/x_i)\right\}$$

sur le cycle fondamental de X. *Alors*, $B(X, z)$ *est un entier. Si de plus*, $k \equiv 0 \bmod 2$, *et*

ou bien	(*a*)	$z \in \mathrm{ch}\,O(X)$	*et*	$n+k \equiv 2 \bmod 4$,
ou	(*b*)	$z \in \mathrm{ch}\,SP(X)$	*et*	$n+k \equiv 0 \bmod 4$,

alors $B(X, z)$ *est un entier pair.*

Preuve. — Soit A un voisinage tubulaire fermé de X dans S_{2n+2k} dont la frontière E est un fibré sphérique sur X associé au fibré normal principal. Ce dernier peut être induit du fibré universel. L'élément v_k de 4.3 est envoyé sur un élément $w_k \in \mathrm{ch}(A, E)$ et $z.w_k$ appartient à $\mathrm{ch}(A, E)$ [*voir* 1.1. Nous avons identifié $\mathrm{ch}(X)$ et $\mathrm{ch}(A)$].

$z.w_k$ détermine alors un élément u de $\mathrm{ch}(S_{2n+2k})$. Il résulte de (1) que u est l'image de $B(X, z)$ par l'homomorphisme de Gysin :

$$H^*(X, Q) \to H^*(S_{2n+2k}, Q).$$

Notons que $x_1 x_2 \ldots x_k$ est la classe d'Euler. Alors $B(X, z)$ est égal à la valeur u' de la composante maximum de u sur le cycle fondamental de S_{2n+2k}, et cette valeur est entière d'après le théorème de Bott (comparer avec l'Introduction).

Si $k \equiv 0 \bmod 2$, alors $w_k \in \operatorname{ch} O(A, E)$ puisque $v_k \in \operatorname{ch} O(A_{2k}, B_{2k-1})$, (*voir* 4.3). Dans le cas (a), $u \in \operatorname{ch} O(S_{2n+2k})$, tandis que dans le cas (b), $u \in \operatorname{ch} SP(S_{2n+2k})$ (*voir* 1.1). Dans chaque cas, u' est maintenant un entier pair, d'après les théorèmes de Bott [6], (comparer aussi [2], paragraphe 26.10).

4.5. — Le second terme dans l'expression de $B(X, z)$, soit :

$$(z/2).\prod_{i=1}^{k}(e^{x_i}-1)(e^{-x_i}-1)/x_i$$

est divisible par $\prod_{i=1}^{k} x_i$, ce qui est la classe d'Euler.

Or, pour un plongement dans une sphère, il est bien connu que la classe d'Euler est nulle (*voir* [12], corollaire III, [5], nous supposons ici que $k > 0$). Donc, seul le premier terme fournit une contribution à $B(X, z)$, et dans les notations de (1.4), (2.1) et (4.4), cela donne :

$$B(X, z) = (-1)^k . 2^{n+k-1} . \hat{A}(X, 0, z^{(1/2)}). \tag{6}$$

PREUVE. — $(z/2).\prod_{i=1}^{k}(e^{x_i}-e^{-x_i})/x_i$ et $2^{n+k-1}.z^{(1/2)}\prod_{i=1}^{k}\dfrac{\sinh x_i/2}{x_i/2}$ ont des composantes $2n$-dimensionnelles égales (la dimension formelle de x_i est 2). Puisque la seconde expression est $2^{n+k-1}.z^{(1/2)}.\hat{A}(X)$, la formule (6) est démontrée.

4.6. — Les théorèmes (2.6), (2.7) sont des conséquences faciles de (4.4) et (6). Terminons en remarquant que la démonstration donnée dans ce paragraphe est très semblable aux démonstrations de [1] et [9], où la différence $\Delta^+ - \Delta^-$ jouait le rôle pris ici par μ_+.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). — *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds* (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 65, 1959, p. 276-281).

[2] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). — *Characteristic classes and homogeneous spaces*, I, II (*Amer. J. of Math.*, t. 80, 1958, p. 458-538 et t. 81, 1959, p. 315-382).

[3] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). — *Characteristic and homogeneous spaces*, III (à paraître).