BULLETIN DE LA S. M. F.

WEISHU SHIH

Sur les complexes généralisés et la suite spectrale d'un fibré

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 451-453
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__451_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 451 à 453.

SUR LES COMPLEXES GÉNÉRALISÉS ET LA SUITE SPECTRALE D'UN FIBRÉ;

PAR

SHIH WEISHU.

Étant donnée une suite de morphismes :

$$f_i \in \mathrm{Hom}(E, E) \qquad (i \geqq 0),$$

E est un objet dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{array}{ll} Z_{i+1} = f_{i+1}^{-1}(B_i) \cap Z_i & B_{i+1} = (f_{i+1}(Z_i) \cap Z_i) + B_i, \\ Z_{-1} = E, & B_{-1} = 0 \qquad (i \geqq -1) \end{array}$$

pour désigner les sous-objets de E ainsi définis par récurrence.

DÉFINITION. — *Un complexe généralisé à valeur dans $\mathcal{C}$ est formé par un objet E et par une suite $f_i \in \mathrm{Hom}(E, E)$ tel que :*

$$f_{i+1}(Z_i) \subseteq Z_i, \qquad f_{i+1}(B_i) \subseteq B_i, \qquad f_{i+1}^2(Z_i) \subseteq B_i \qquad (i \geqq 1).$$

Il est évident que les complexes généralisés à valeur dans $\mathcal{C}$ forment une catégorie additive $\mathcal{G}$; un morphisme de $\mathcal{G}$

$$h: \quad G = (E, f_i) \to G' = (E', f_i')$$

est un morphisme $h \in \mathrm{Hom}(E, E)$ tel que

$$hf_i = f_i' h \qquad (i \geqq -1).$$

De plus la catégorie des complexes $\mathcal{K}$ à valeur dans $\mathcal{C}$ peut être considérée comme une sous-catégorie de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}.$$

En effet, on a un foncteur covariant de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{G}$ qui fait correspondre à chaque (E, d) le complexe généralisé (E, f_i), où $f_i = d$ $(i \geqq 0)$.

Nous définissons les foncteurs homologiques associés à $(E, f_i) \in \mathcal{G}$

$$H_i(E) = Z_i/B_i$$

en remarquant que $B_i \subseteq Z_i$ d'après la définition de $\mathcal{G}$, au cas où $E \in \mathcal{K}$, on retrouve l'homologie de E, car $H(E) = H_i(E)$ $(i \leqq 0)$.

La définition implique que f_{i+1} induit une différentielle :

$$\bar{f}_{i+1} \in \operatorname{Hom}(H_i(E),\ H_i(E))$$

telle que l'homologie $H(H_i(E))$ du complexe $(H_i(E), \bar{f}_{i+1})$ est canoniquement isomorphe à $H_{i+1}(E)$, c'est-à-dire, on a une suite de foncteurs H_i : $\mathcal{G} \to \mathcal{K}$ tels que $H_{i+1} = H \circ H_i$.

Donc l'homologie d'un complexe généralisé est munie d'une structure de suite spectrale fonctorielle bien déterminée qu'on appelle la suite spectrale associée à E.

Définition. — *Une suite spectrale E est dite triviale au sens généralisé, si elle est isomorphe à la suite spectrale associée à un complexe généralisé.*

Cette définition est en accord avec la terminologie classique; E_γ est dite triviale si $d_\gamma = 0$ pour $\gamma \geqq 2$, alors, il suffit de prendre $E = E_1$ et $f_i = d_1$ $(i \geqq 0)$.

Théorème. — *La suite spectrale d'un fibré est triviale au sens généralisé, c'est-à-dire : à chaque fibré de base B et de fibre F, il existe une structure de complexe généralisé sur*

$$C(F) \otimes C(B)$$

telle que l'homologie de ce complexe est isomorphe à la suite spectrale du fibré, et en plus :

$$\bar{f}_\gamma = d_\gamma.$$

D'après la théorie de Moore [1] on peut se restreindre, dans la démonstration, au cas où le fibré est un fibré associé à un fibré principal [2]. On construit alors pour chaque entier i un capproduit généralisé sur les chaînes. Les morphismes f_i sont alors définis comme

$$f_i(x) = e_i \cap x \qquad \text{où} \quad e_i \in C^i(B,\ C_{i-1}(\Omega(B)))$$

est la $i^{\text{ième}}$ cochaîne fondamentale de B, et $\Omega(B)$ l'espace de lacets de Kan [4].

Comme cas particulier on obtient le théorème de Hurewicz-Fadell [3] en affaiblissant les hypothèses homotopiques en des hypothèses homologiques analogues.

Ce théorème permettra de déterminer la suite spectrale d'un fibré. En utilisant ensuite la classification des extensions successives [5] on trouve les groupes d'homologies du fibré.

BIBLIOGAPHIE.

[1] BARRATT (M. G.), GUGENHEIM (V.) and MOORE (J. C.). — A paraître dans *Amer. J. Math.*, t. 86, 1959.

[2] CARTAN (Henri). — *Sur la théorie de Kan* (*Séminaire Cartan*, t. 9, 1956-1957. Quelques questions de topologie, n° 1)

[3] FADELL (Edward) and HUREWICZ Witold). — *On the structure of higher differential operators in spectral sequences* (*Annals Math.*, t. 68, 1958, p. 314-347).

[4] KAN, (Daniel M.). — *On c. s. s. complexes* (*Amer. J. Math.*, t. 79, 1957, p. 449-476).

[5] SHIH (Weishu). — *Sur les extensions successives* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 607-609).

SHIH Weishu,
Attaché de Recherches C. N. R. S.,
Pavillon H, Chambre 418,
Résidence universitaire,
Antony (Seine).