BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur quelques propriétés des coniques homofocales

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 66-72
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__66_0>

Sur quelques propriétés des coniques homofocales;

par M. LAGUERRE.

(Séances des 10 et 24 janvier 1879.)

I.

1. Je considère, dans un plan, un système de coniques homofocales; soient Ox et Oy les axes de ces coniques, F et F' leurs foyers réels communs, que je supposerai situés sur l'axe Ox; les deux foyers imaginaires communs Φ et Φ' seront, par suite, situés sur l'axe Oy. Pour abréger, j'appellerai simplement *conique du système* une conique ayant pour foyers les points F, F', Φ et Φ'.

Étant donné un point quelconque M du plan, deux coniques du système se croisent en ce point; désignons par N et N' les centres des deux cercles qui osculent respectivement ces deux coniques au point M, et par μ la droite qui joint ces deux points. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F'; je dirai que c'est l'axe du point M.

2. Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, il existe trois points M, M' et M'' pour lesquels cette droite est un axe.

Si l'on considère la conique du système qui touche la droite μ, *et que l'on désigne respectivement par* α *et* β *les points où la normale menée au point de contact rencontre les axes* Ox *et* Oy, *les trois points* M, M' *et* M'', *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur le cercle* A *passant par les points* α, β *et le centre* O *commun aux coniques du système.*

3. On sait que toutes les propriétés des normales et des centres de courbure d'une conique sont triples; les normales à une conique demeurent, en effet, normales à la transformée de cette conique quand on effectue une transformation homographique qui, aux deux ombilics du plan (¹), fait correspondre deux des foyers indépendants de cette conique.

(¹) Je désigne ainsi les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles tracés dans le plan.

De la proposition précédente, on déduit donc immédiatement les théorèmes qui suivent :

La conique qui, passant par le point β *et les deux foyers* F *et* F′, *a pour asymptotes l'axe* Oy *et la droite* $\alpha\beta$ *contient les trois points* M, M′ *et* M″.

La conique qui, passant par le point α *et les deux foyers* Φ *et* Φ', *a pour asymptotes l'axe* Ox *et la droite* $\alpha\beta$ *contient également les trois points* M, M′ *et* M″.

4. Les trois points qui ont pour axe la droite μ sont, comme on le voit, les trois points communs aux deux coniques dont je viens de parler et au cercle A défini précédemment [2].

Mais on peut aussi les déterminer par l'intersection de ce cercle et d'une conique avec une conique ayant pour axes les droites Ox et Oy.

Désignons, en effet, par C la conique du système qui touche la droite μ et par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C; nous pourrons énoncer la propriété suivante :

Les points M, M′ *et* M″, *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur la conique* K; *le quatrième point de rencontre de cette conique et du cercle* A *est le point* O′ *qui, sur le cercle, est diamétralement opposé au centre* O *commun aux coniques du système.*

5. *Le point* O′, *diamétralement opposé au point* O *sur le cercle* A, *est le conjugué harmonique du point* O *relativement aux points* M, M′ *et* M″.

6. *Le triangle* MM′M″ *est circonscrit à la conique* C *du système qui touche la droite* μ.

7. Considérons l'hyperbole équilatère H, qui a pour centre le point O et dont l'axe transverse, dirigé suivant Oy, a pour longueur FF′; nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Le triangle MM′M″ *est autopolaire relativement à l'hyperbole* H.

8. Soit $M'M''$ un côté quelconque du triangle $MM'M''$; du point O abaissons une perpendiculaire sur ce côté, et désignons par M_0 le point symétrique, par rapport au point O, du pied de cette perpendiculaire.

Le point M_0 *est situé sur l'axe* μ *du point* M, *et la droite* MM_0 *est perpendiculaire à cet axe.*

9. Étant donnée une conique C du système, on voit que, si la droite μ roule sur cette conique, les points correspondants M, M' et M'' décrivent la conique K, tandis que les côtés du triangle $MM'M''$ roulent tangentiellement à C elle-même.

D'où les propositions suivantes :

Étant donnée une conique quelconque C *du système, désignons par* K *la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de* C.

Cela posé, en appelant O' *un point quelconque de* K *et* O *le centre commun aux courbes du système, si, sur* OO' *comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle rencontre les axes en deux points; la droite qui joint ces deux points est normale à la conique* C.

Ce cercle rencontre de nouveau K *en trois autres points; chacun de ces points a pour axe une même droite tangente à* C.

Les côtés du triangle formé par ces points sont circonscrits à C.

Ce triangle est autopolaire relativement à l'hyperbole équilatère H.

10. Les coniques C et K, qui figurent dans l'énoncé des propositions qui précèdent, ont entre elles des relations qui méritent d'être étudiées.

Entre autres propositions, je rappellerai la suivante, que j'ai déjà fait connaître, il y a quelques années, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1) :

Si d'un point de la conique K *on mène des tangentes à la développée de la conique* C, *les quatre points de contact sont*

(1) *Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1875).

en ligne droite, et la droite qui joint ces points de contact est normale à la courbe C.

II.

11. Soit M un point quelconque du plan; par ce point passent deux coniques du système. En désignant par N et N′ les centres des cercles qui osculent ces coniques au point donné, je dirai que N et N′ correspondent au point M.

Réciproquement, étant donné un point N du plan, on peut chercher combien de points M lui correspondent, c'est-à-dire combien existent de cercles ayant le point M pour centre et osculateurs d'une conique du système.

12. Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les considérations suivantes.

Étant donné un point N du plan, si de ce point on mène les normales à une conique du système, les tangentes aux points de contact touchent une parabole P tangente aux axes de la conique. Cette parabole est la même quelle que soit la conique du système que l'on considère; elle est l'enveloppe des polaires du point N relativement aux diverses coniques qui ont pour foyers les points F et F′.

13. Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette importante proposition, due à M. Chasles :

Le lieu des pôles d'une droite relativement aux coniques qui forment un système homofocal est une droite qui rencontre la droite donnée au point où elle touche la conique du système qui lui est tangente.

Soient P l'enveloppe des polaires dont je viens de parler (on voit immédiatement que c'est une parabole tangente aux axes), C une conique du système, et T une tangente commune à C et à P. En désignant par M le point où elle touche C, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite menée par M normalement à C; en vertu du théorème de M. Chasles que je viens de rappeler, cette droite passe par le point N; donc NM est normale à la conique C.

Réciproquement, abaissons du point N une normale à la conique C, et soit M le pied de cette normale. En désignant par T la tangente menée en ce point, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite MN. Il y existe donc une conique du système pour laquelle le pôle de T se confond avec le point N; par suite, la droite T est tangente à la parabole P.

La proposition que j'ai énoncée est donc entièrement établie (1).

14. Le foyer de la parabole P peut se déterminer aisément. On peut, en effet, la définir de la façon suivante :

Si autour du point N *on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, l'enveloppe de ces perpendiculaires est la parabole* P (2).

Pour avoir le foyer de la parabole, il faut chercher les droites isotropes tangentes à cette courbe. On les obtiendra si l'on considère les transversales isotropes passant par le point N. En désignant par I l'un des ombilics du plan, soit NI l'une de ces transversales; menons par les foyers F et F′ des parallèles à cette droite. Le foyer φ de la parabole se trouve sur la droite isotrope conjuguée harmonique de NI relativement aux deux droites dont je viens de parler; des conséquences analogues se déduiraient de la considération de la transversale isotrope passant par le second ombilic J.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Le foyer de la parabole P *est le conjugué harmonique du point* N *relativement aux deux foyers* F *et* F′ *communs à toutes les courbes du système.*

---

(1) On démontrerait de même que :

Si d'un point N *de l'espace on mène les normales à une surface du second ordre, les pieds des normales sont les points de contact des plans qui touchent la surface et sont osculateurs de la cubique gauche enveloppée par les plans polaires de* N, *relativement aux diverses surfaces du second ordre qui ont les mêmes focales que la surface donnée.*

(2) Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 145.

J'ajouterai que :

La directrice de cette parabole est la droite ON *qui joint le point* N *au centre commun des coniques du système.*

15. Du théorème précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si l'on imagine, dans le plan des deux axes Ox *et* Oy, *deux droites quelconques* D *et* D′, *le foyer de la parabole qui touche ces quatre droites a pour conjugué harmonique, relativement aux foyers* F *et* F′, *le point de rencontre des normales menées aux deux courbes du système qui touchent* D *et* D′.

Et, si l'on suppose que les droites D et D′ viennent se confondre :

Si en un point M *d'une conique on mène la tangente, et si l'on imagine la parabole qui touche cette tangente au point* M *et en outre est tangente aux axes de la conique, le conjugué harmonique du foyer de cette parabole, relativement aux deux foyers de la courbe, est le centre du cercle qui oscule cette courbe au point* M.

16. Cela posé, pour trouver les points M correspondant à un point donné M, construisons le point M_0, conjugué harmonique de M relativement aux deux foyers F et F′, et imaginons la parabole P, qui a pour foyer le point M_0 et pour directrice la droite OM.

Il est clair, par ce qui précède, que :

Les points N *correspondant au point* M *sont les pieds des normales abaissées de ce dernier point sur la parabole* P.

Ces points sont donc au nombre de trois, et, si l'on désigne par I le milieu du segment M_0M, ils s'obtiendront en cherchant l'intersection de P avec le cercle décrit sur M_0I comme diamètre.

17. Le triangle formé par ces trois points jouit de diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles je me bornerai à mentionner la suivante :

Le triangle formé par les trois points correspondant à un point donné du plan est circonscrit à une conique du système.

Je me réserve de revenir sur ce sujet et d'étendre aux surfaces homofocales du second ordre les résultats contenus dans cette Note.