

BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE DELEANU

Une généralisation du théorème du point fixe de Schauder

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 223-226

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__223_0

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME
DU POINT FIXE DE SCHAUDER ;

PAR

ARISTIDE DELEANU.

(Bucarest).

Cette Note emploie la terminologie de [1]. $H^q(X)$ désigne le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie au sens de Čech, à coefficients rationnels de l'espace X . Un espace topologique compact est dit *simple*, quand ses groupes de cohomologie sont ceux d'un point.

Soit X un espace compact et ξ une application continue de X en lui-même, telle que le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(X)$ soit défini, dans le sens généralisé de [2]. Soit Y une partie fermée de X , telle que

$$\xi(Y) \subset Y \quad \text{et} \quad \bigcap_{n > 0} \xi^n(X) \subset Y.$$

Soit i^* l'homomorphisme de $H(X)$ dans $H(Y)$ induit par l'inclusion $i: Y \subset X$. Alors on a le lemme suivant :

LEMME. — Si $T(i^*(H^q(X)))$ désigne la trace de l'endomorphisme du groupe $i^*(H^q(X))$ induit par ξ , on a la relation

$$\Lambda_\xi(X) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q T(i^*(H^q(X))).$$

PREUVE. — On a

$$\text{image de } i^* \approx H^q(X)/\text{noyau de } i^*,$$

donc, vu la proposition (a) de [2], les traces $T(i^{*-1}(o))$ et $T(i^*(H^q(X)))$ sont définies, et l'on a

$$T(H^q(X)) = T(i^{*-1}(o)) + T(i^*(H^q(X))).$$

Mais on voit, comme dans [2], page 230, que

$$T(i^{*-1}(0)) = 0,$$

d'où le résultat cherché.

THÉORÈME. — Soit C un espace compact, qui est rétracte de voisinage d'espace convexe et soit ξ une application continue de C en lui-même. S'il existe une partie fermée et simple K de C telle que

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C) \subset K,$$

alors ξ possède au moins un point fixe; l'indice total des points fixes de ξ est $+1$.

PREUVE. — Posons

$$F = \bigcap_{n>0} \xi^n(C).$$

Supposons tout d'abord C connexe. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H(C) & \xrightarrow{i^*} & H(F) \\ & \searrow j^* & \nearrow k^* \\ & & H(K) \end{array}$$

où i^* , j^* , k^* sont les homomorphismes induits par les inclusions $i: F \subset C$, $j: K \subset C$, $k: F \subset K$.

Il en résulte, pour tout $q \geq 1$:

$$i^*(H^q(C)) = k^*j^*(H^q(C)) = k^*(0) = 0.$$

D'autre part, on a, vu la connexion de C ,

$$T(i^*(H^0(C))) = 1,$$

donc, en tenant compte du lemme ci-dessus :

$$\Lambda_\xi(C) = 1.$$

Cela signifie, en vertu du théorème 4 de [3] que ξ possède au moins un point fixe.

Si C n'est pas connexe, on sait ([3]) que C a un nombre fini de composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_r , dont chacune est un rétracte d'espace convexe. K étant simple, donc connexe, il existe un indice α tel que $K \subset C_\alpha$. En particulier, on a

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C) \subset C_\alpha.$$

Il s'ensuit, vu la compacité de C et le fait que C_α est ouvert dans C , qu'il existe un entier $m > 0$ tel que

$$\xi^m(C) \subset C_\alpha.$$

D'autre part, il existe un indice β tel que $\xi(C_\alpha) \subset C_\beta$. Si α et β étaient distincts, on aurait

$$\xi^{m+1}(C) \subset \xi(C_\alpha) \subset C_\beta \quad \text{et} \quad \xi^{m+1}(C) \subset \xi^m(C) \subset C_\alpha,$$

donc

$$\xi^{m+1}(C) = \emptyset,$$

ce qui est absurde. On a donc

$$\xi(C_\alpha) \subset C_\alpha.$$

En considérant l'espace C_α et la restriction $\xi|_{C_\alpha}$, on est ramené au cas étudié plus haut, où l'espace C était connexe : ξ possède au moins un point fixe dans C_α , et $\Lambda_\xi(C_\alpha) = 1$. Comme les autres composantes connexes de C ne peuvent contenir des points fixes de ξ , on a encore cette fois-ci,

$$\Lambda_\xi(C) = 1.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soit C un espace compact, qui est rétracte de voisinage d'espace convexe, et soient $(D_j)_{j=1, \dots, n}$ ($n \neq 1$) des ouverts de C deux à deux disjoints et tels que chaque \bar{D}_j soit un rétracte de C simple. Soit ξ une application continue de C en lui-même, telle que :

1° $\xi(\bar{D}_j) \subset \bar{D}_j$ ($j=1, \dots, n$);

2° Il existe une partie fermée et simple K de C , telle que

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C) \subset K.$$

Dans ces conditions, ξ possède au moins un point fixe dans l'ensemble

$$C - \bigcup_{j=1}^n D_j.$$

PREUVE. — Supposons que $\bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j$ ne contienne aucun point fixe de ξ . En vertu du théorème ci-dessus, on a

(1) $\Lambda_\xi(C) = 1$.

K étant simple, il existe une composante connexe C_α de l'espace C telle que $K \subset C_\alpha$. Il est aisé de vérifier que chaque intersection

$$\bar{D}_j \cap K \quad (1 \leq j \leq n)$$

est non-vidé; par conséquent, les \bar{D}_j étant simples, donc connexes, on a

$$\bar{D}_j \subset C_\alpha \quad (1 \leq j \leq n).$$

Alors, en vertu de la définition de [3], page 240 :

$$i_\xi(D_j) = i_{\xi|C_\alpha}(D_j).$$

Mais C_α est un rétracte d'espace convexe et \bar{D}_j est rétracte de C_α . On peut alors appliquer le lemme 3 de [3] :

$$i_{\xi|C_\alpha}(D_j) = i_{\xi|\bar{D}_j}(D_j).$$

En tenant compte aussi du lemme 4 de [3], il vient finalement :

$$(2) \quad i_\xi(D_j) = \Lambda_{\xi|\bar{D}_j}(\bar{D}_j) = 1 \quad (1 \leq j \leq n).$$

On déduit des relations (1) et (2) et du théorème 4 de [3] :

$$i_\xi\left(C - \bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j\right) = \Lambda_\xi(C) - \sum_{j=1}^n i_\xi(D_j) = 1 - n \neq 0,$$

ce qui signifie, toujours en vertu du théorème 4 de [3], que l'ensemble

$C - \bigcup_{j=1}^n \bar{D}_j$ contient au moins un point fixe de ξ .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] LERAY (Jean). — Sur les équations et les transformations, *J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 24, 1945, p. 201-248.
- [2] LERAY (Jean), — Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 221-233.
- [3] DELEANU (Aristide). — Théorie des points fixes : sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 235-243.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1961).

Aristide DELEANU
 Institutul de Matematică
 al Academiei R. P. R.,
 Str. M. Eminescu, 47,
 Bucuresti 3 (Roumanie).