BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur le développement d'une fonction intermédiaire

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 92-98

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__92_1>

Sur le développement d'une fonction intermédiaire;
par M. HALPHEN.

(Séance du 28 mars 1879.)

On sait que la fonction Al_1 de M. Weierstrass se développe, suivant les puissances croissantes de l'argument, en une série dont les coefficients sont des polynômes entiers par rapport au carré du module. Ces polynômes se calculent successivement au moyen d'une formule récurrente qui en contient trois consécutifs. Je me propose de montrer que des polynômes analogues, se calculant de la même manière, et qui sont les coefficients d'une fonction très-peu différente, sont susceptibles de recevoir une forme notablement plus simple.

La fonction que je considère ici est la suivante :

$$(1) \qquad \mathrm{B}(z, k) = \mathrm{Al}_1(z, k)\, e^{\frac{1}{6}(1+k^2)z^2}$$

Envisageons d'abord la fonction

$$\mathrm{F}(z, k) = \frac{1}{z}\, \mathrm{B}(z, k).$$

Des deux formules connues

$$\mathrm{Al}_1(z, k) = \frac{1}{k}\, \mathrm{Al}_1\left(kz, \frac{1}{k}\right) = -ie^{-\frac{1}{2}z^2}\, \mathrm{Al}_1(iz, k')$$

on conclut, pour la fonction F, ces nouvelles formules

$$F(z, k) = F\left(kz, \frac{1}{k}\right) = F(iz, k'). \tag{2}$$

La fonction F, qui est paire, se développera ainsi :

$$F(z, k) = 1 + f_1 z^2 + f_2 z^4 + \ldots + f_n z^{2n} + \ldots,$$

et les coefficients f, fonctions entières de k^2, jouiront, en vertu de (2), de la propriété

$$f_n(k^2) = k^{2n} f_n\left(\frac{1}{k^2}\right) = (-1)^n f_n(1-k^2). \tag{3}$$

Envisageons maintenant les deux polynômes p et q suivants :

$$p(k^2) = k^4 - k^2 + 1, \quad q(k^2) = (k^2+1)(k^2-2)(2k^2-1), \tag{4}$$

qui donnent lieu aux égalités

$$\left\{\begin{aligned} p(k^2) &= k^4 p\left(\frac{1}{k^2}\right) = p(1-k^2), \\ q(k^2) &= k^6 q\left(\frac{1}{k^2}\right) = -q(1-k^2). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

De ces deux égalités on tire d'abord aisément cette conclusion connue, que toute fonction rationnelle de k^2 qui reste inaltérée quand on y remplace k^2 par son inverse ou son complément à l'unité est simplement une fonction rationnelle du quotient $p^3 : q^2$. Soient maintenant α, β deux nombres entiers satisfaisant à la condition $2\alpha + 3\beta + n = 0$, et envisageons la quantité $\varphi_n = p^\alpha q^\beta f_n$. Comme β est de même parité que n, il résulte des équations (3) et (5) que φ_n reste inaltérée par les deux substitutions ci-dessus. Donc φ_n est une fonction rationnelle de $p^3 : q^2$. Donc f_n, qui est une fonction entière de k^2, est une fonction entière des deux quantités p, q ; on peut même ajouter que *f_n est un polynôme entier des deux quantités p, q, homogène et du degré n quand on envisage p comme du second degré et q comme du troisième.*

Cette conclusion s'applique aux coefficients du développement de la fonction B, qui sont les mêmes, et l'on peut dire que *la fonction* $B(z, k)$ *est homogène et de degré* $-\frac{1}{2}$, *quand on envi-*

sage z comme de degré $-\frac{1}{2}$, *p comme du second degré et q comme du troisième.*

Je représenterai le développement de B par

$$(6)\quad B(z,k) = z + b_2 \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots + b_n \frac{z^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots.$$

D'après ce qui vient d'être dit, b_n contient seulement les termes $p^\alpha q^\beta$ correspondant aux solutions entières et positives de

$$2\alpha + 3\beta = n.$$

En conséquence, b_1 est nul; c'est pourquoi je n'ai pas écrit de terme en z^3 dans (6). Ainsi l'on voit immédiatement que b_2, b_3, b_4, b_5 seront, à des facteurs numériques près, p, q, p^2, pq. D'une manière générale :

Si n n'est pas divisible par 3, b_n *contient le facteur p*;
Si n est impair, b_n *contient le facteur q*.

Par conséquent, *dans le cas où le module satisfait à*

$$k^4 - k^2 + 1 = 0,$$

on a

$$B(z) = z + az^7 + bz^{13} + \ldots + lz^{6n+1} + \ldots,$$

dans le cas où le module est $\sqrt{-1}$, *on a*

$$B(z) = z + a'z^5 + b'z^9 + c'z^{13} + \ldots + l'z^{4n+1} + \ldots.$$

Je vais maintenant établir une formule récurrente pour le calcul des polynômes b_n.

A cet effet, je prends l'équation linéaire aux dérivées partielles et du second ordre à laquelle satisfait la fonction Al_1, savoir

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Al}_1}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2 z^2)\,\mathrm{Al}_1 = 0.$$

En y introduisant la fonction B, je la change en l'équation suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2\,\frac{2k^2-1}{3}\,z\,\frac{\partial B}{\partial z} + 4k^2(1-k^2)\frac{\partial B}{\partial k^2} \\ &\qquad + 2\left(\frac{1-2k^2}{3} + \frac{k^4-k^2+1}{9} z^2\right) B = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est cette dernière qu'il faut transformer en y remplaçant k^2 par p, q. Tout d'abord les équations (4) donnent

$$(8) \qquad 2k^2 - 1 = \frac{q}{p-3},$$

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial k^2} = \frac{q}{p-3}\frac{\partial}{\partial p} + 3(2p-3)\frac{\partial}{\partial q},$$

$$(10) \qquad q^2 = (p-3)^2(4p-3).$$

Dans (7), je remplace $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial k^2}$ par l'expression que fournit la formule (9), k^2 par son expression (8), et j'obtiens

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial z^2} + \frac{2}{3}\frac{q}{p-3}\left[z\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} - \mathrm{B} - 6(p-1)\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p}\right] \\ &\qquad - 12(p-1)(2p-3)\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q} + \frac{pz^2}{9}\mathrm{B} = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu de l'homogénéité de la fonction B, j'ai

$$3q\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q} + 2p\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p} - \frac{1}{2}z\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} = -\frac{1}{2}\mathrm{B}.$$

Cette relation permet de faire disparaître $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}$ de (11) et d'écrire, en tenant compte de (10),

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial z^2} - 8p^2\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q} - \frac{4}{3}q\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p} + \frac{pz^2}{9}\mathrm{B} = 0.$$

Telle est la transformée cherchée. Elle donne immédiatement une formule récurrente pour les coefficients du développement de B, formule dont les coefficients se simplifient un peu si l'on pose

$$x = \frac{2}{3}p = \frac{2}{3}(k^4 - k^2 + 1),$$

$$y = \frac{2}{9}q = \frac{2}{9}(k^2+1)(k^2-2)(2k^2-1).$$

La formule définitive est la suivante :

$$(13) \qquad b_n = 4\left(x^2\frac{\partial b_{n-1}}{\partial y} + y\frac{\partial b_{n-1}}{\partial x}\right) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3}xb_{n-2}.$$

Au moyen de cette formule, on calcule avec la plus grande facilité les coefficients successifs, dont voici les premiers :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -x, \quad b_3 = -4y, \quad b_4 = -9x^2, \quad b_5 = -24xy,$$
$$b_6 = -3.2^5y^2 + 3.23x^3, \quad b_7 = 2^2.3^2.19x^2y, \quad b_8 = 3x(2^7.23y^2 + 107x^3).$$

Addition. — J'avais déjà livré à l'impression la Note qu'on vient de lire quand mon attention s'est trouvée attirée sur deux Mémoires qui m'étaient inconnus, bien qu'ils ne soient pas tout récents. Le premier, intitulé *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen,* est dû à M. Kiepert et se trouve au Tome 76 (année 1873) du *Journal de M. Borchardt;* le second, intitulé *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem,* est dû à M. Max Simon et se trouve au Tome 81 (année 1876) du même Recueil. Ces deux savants auteurs donnent pour point de départ à leurs recherches personnelles des résultats dus à M. Weierstrass, communiqués dans ses Cours à ses élèves par cet illustre géomètre, mais connus du public seulement grâce aux deux Mémoires que je viens de citer. Les résultats dont il s'agit se rapportent à une théorie des fonctions elliptiques dans laquelle, au lieu du sinus d'amplitude, on introduit systématiquement la fonction $\mathfrak{p}(z)$, définie par

$$(14) \qquad z = \int_\infty^{\mathfrak{p}(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

Voici quel est le point de départ de cette théorie. Soit

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

une quantité dans laquelle, ω et ω' étant fixes, m et n reçoivent successivement tous les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, sauf le système $m = n = 0$. On considère la fonction

$$(15) \qquad \sigma(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}},$$

qui est intermédiaire. Effectivement, si l'on désigne par $\zeta(z)$ la dérivée logarithmique de $\sigma(z)$, la fonction $\zeta'(z)$ admet les périodes ω et ω'. Cela résulte immédiatement de la formule (15).

Par une analyse assez courte, on prouve ensuite que, si l'on pose

$$g_2 = \quad 2[\zeta'^2(\omega) + \zeta'^2(\omega') + \zeta'^2(\omega + \omega')],$$
$$g_3 = -4\zeta'(\omega)\zeta'(\omega')\zeta'(\omega + \omega'),$$

la fonction $\mathrm{p}(z)$ définie par (14) coïncide avec celle-ci :

$$(16) \qquad \mathrm{p}(z) = -\zeta'(z) = -\frac{\partial^2 \log \sigma(z)}{\partial z^2}.$$

Ceci posé, M. Max Simon rapporte comme due à M. Weierstrass et démontre, avec le point de départ que je viens d'indiquer, l'équation suivante à laquelle satisfait la fonction $\sigma(z)$:

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} + \frac{1}{12} g_2 z^2 \sigma = 0,$$

dont la ressemblance avec mon équation (12) est frappante. Ces deux équations coïncident même si l'on fait

$$(18) \qquad p = \frac{3}{4} g_2, \quad q = \frac{27}{4} g_3$$

et qu'on remplace B par σ. Les deux fonctions $\mathrm{B}(z)$ et $\sigma(z)$, développées suivant les puissances croissantes de z, commencent toutes deux par le même terme z. Donc, eu égard à la formule récurrente (13), *sous le bénéfice des équations* (18), *les fonctions* $\mathrm{B}(z)$ *et* $\sigma(z)$ *coïncident.*

Cette coïncidence peut être démontrée autrement. Posons

$$(19) \qquad v = \mathrm{Sn}\, z = -\left(u + \frac{1 + k^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et introduisons la variable u sous le signe d'intégration dans l'égalité

$$z = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}}.$$

Le calcul fait, on retrouve dans le polynôme soumis au radical les quantités p et q définies par les équations (4); voici le résultat :

$$z = \int_\infty^u \frac{du}{\sqrt{4u^3 - \frac{4}{3} p u - \frac{4}{27} q}}.$$

C'est précisément l'équation (14) si l'on remplace p et q par les expressions (18). J'ai donc ainsi prouvé l'égalité suivante, transformée de (19):

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{\operatorname{Sn}^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

qui, suivant la définition de la fonction Al_1, de la fonction B et la définition de σ fournie par (16), devient

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log \mathrm{B}(z)}{\partial z^2}.$$

Cette dernière prouve maintenant l'identité des deux fonctions σ et B, sans l'intervention de l'équation (17). En conséquence, mon analyse fournit une démonstration de cette équation (17), très-différente de celle qu'a rapportée M. Max Simon.