BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur une classe de fonctions non uniformes

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 102-104
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__102_1>

Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. E. Picard.

(Séance du 28 mars 1879.)

Considérons une fonction multiforme $f(z)$ d'une variable complexe z, n'admettant dans tout le plan que des points critiques déterminés. Dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces points, la fonction est uniforme et continue. Soit A l'un de ces points critiques. Je me propose de montrer que l'on peut trouver un développement en série de la fonction, valable pour tous les points du cercle ayant A pour centre et passant par le point critique le plus rapproché, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi par la variable à l'intérieur de ce cercle. Nous supposerons que A est l'origine des coordonnées et que de plus le rayon du cercle précédent est plus petit que l'unité, cette dernière circonstance pouvant toujours se réaliser par un changement de variable $z' = kz$, où k est un nombre positif suffisamment petit.

Ceci posé, je fais la transformation

$$z' = \frac{1}{\log z}.$$

Cherchons quelle est la portion du plan des z' correspondant au cercle C décrit, dans le plan des z, de l'origine comme centre avec un rayon égal à r. En désignant par θ l'argument d'un point de ce cercle, et par lr le logarithme arithmétique de r, nous avons

$$x' + iy' = \frac{1}{lr + \theta i};$$

donc

$$x' = \frac{lr}{(lr)^2 + \theta^2}, \quad y' = \frac{-\theta}{(lr)^2 + \theta^2},$$

et l'on a par suite, en éliminant θ,

$$(C') \qquad (x'^2 + y'^2)\, lr - x' = 0,$$

équation d'un cercle passant à l'origine et dont le centre est le point $x' = +\frac{1}{2\,lr}$. De plus, si r est, comme nous le supposons, moindre que l'unité, aux points à l'intérieur du cercle C correspondront les points à l'intérieur du cercle C'. La fonction $f(z)$ deviendra une fonction $F(z')$. A toute courbe fermée située à l'intérieur du cercle C' correspondra une courbe fermée située dans C, qui ne comprendra pas l'origine dans son intérieur. Par suite, la fonction $F(z')$ sera uniforme et continue à l'intérieur de C', et l'on pourra la développer en une série procédant suivant les puissances croissantes de $\left(z' - \frac{1}{2\,lr}\right)$.

Nous aurons par suite, pour $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2\,lr}\right)^n,$$

où les A_n sont des constantes.

Ce développement est valable pour tous les points du cercle C.

Aux déterminations multiples de $\log z$ correspondront les déterminations multiples de la fonction quand la variable z, partant d'un point, décrit à l'intérieur de C un chemin embrassant une ou plusieurs fois l'origine.

Les intégrales des équations linéaires à coefficients uniformes nous présentent un exemple bien connu de fonctions rentrant dans la classe de celles que nous venons de considérer. On sait, en effet, que ces intégrales n'ont d'autres points singuliers que les points singuliers des coefficients de l'équation.

Une classe de fonctions se rattachant de très-près à celle que nous venons de considérer est celle des fonctions multiformes ayant des points critiques déterminés, mais pouvant avoir en outre un nombre quelconque de pôles situés d'une manière quelconque. On voit alors facilement qu'à l'intérieur du cercle de rayon r la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z)=\frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{2lr}\right)^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{2lr}\right)^n},$$

où les A_n et les B_n sont des constantes.

Il est aisé d'indiquer des équations différentielles dont les intégrales jouissent des propriétés précédentes. L'exemple le plus simple que l'on puisse citer est l'équation de Bernoulli :

$$\frac{du}{dz}=Xu^2+X_1u+X_2,$$

où nous supposons que les X soient des fonctions uniformes de z. Les intégrales de cette équation n'auront d'autres points critiques que les points singuliers des fonctions uniformes X, X_1, X_2, mais elles peuvent avoir des pôles situés d'une manière quelconque.