BULLETIN DE LA S. M. F.

J.P. LAFON

Spectre premier bilatère de l'anneau des endomorphismes d'un module de type fini

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 269-275

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__269_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 269 à 275.

SPECTRE PREMIER BILATÈRE DE L'ANNEAU DES ENDOMORPHISMES D'UN MODULE DE TYPE FINI

PAR

JEAN-PIERRE LAFON

[Montpellier].

Les anneaux sont commutatifs, à élément unité. Les algèbres sont associatives.

1. Rappels.

Soit A un anneau. Une A-algèbre Ω est dite *finie* (resp. *fidèle*) si le A-module sous-jacent est de type fini (resp. fidèle). Si la A-algèbre Ω est fidèle, le morphisme structural $a \mapsto a\,1$ est injectif et permet d'identifier A à un sous-anneau de Ω.

On rappelle qu'un idéal $\mathfrak{q}$ de Ω est dit *premier* s'il est bilatère et si la condition $a\Omega b \subset \mathfrak{q}$ où a et b appartiennent à Ω implique que a ou b appartient à $\mathfrak{q}$.

On suppose Ω fidèle.

Soient S une partie multiplicative de A, $\mathfrak{q}$ un idéal premier de Ω. L'idéal $S^{-1}\mathfrak{q}$ de l'anneau $S^{-1}\Omega$ est premier.

On suppose A noethérien et Ω finie fidèle.

Les résultats suivants, du type Cohen-Seidenberg, sont connus. Les preuves s'obtiennent, soit directement, soit en se ramenant au cas commutatif par considération de sous-algèbres engendrées par un élément.

— *Soient $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ deux idéaux premiers de Ω de même trace sur A. L'inclusion $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ implique l'égalité $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*

— *Un idéal bilatère maximal est premier.*

— *Un idéal premier de Ω, dont la trace sur A est un idéal maximal, est un idéal bilatère maximal.*

2. Généralités sur les sous-modules caractéristiques.

Dans toute la suite, *on considère un anneau A et un A-module E. On note Ω l'anneau* $\mathrm{End}_A(E)$ *des A-endomorphismes de E.*

Si E est fidèle, la A-algèbre Ω est fidèle. Si E est noethérien, la A-algèbre Ω est finie. On désigne par E_Ω le *contre-module* de E défini comme suit :

— E_Ω est un Ω-module à gauche, dont le groupe abélien sous-jacent est celui de E.

— Si u appartient à Ω et x à E, on pose $ux = u(x)$, calculé dans E.

L'anneau $\mathrm{End}_\Omega(E_\Omega)$ des Ω-endomorphismes de E_Ω est le *centre* Γ de Ω.

Un sous-module C de E est dit *caractéristique* (ou *complètement caractéristique*) si $u(C) \subset C$ pour tout u de Ω. On désigne alors par C_Ω le sous-module de E_Ω dont le groupe abélien sous-jacent coïncide avec celui de E.

L'application $C \mapsto C_\Omega$ est un isomorphisme du treillis des sous-modules caractéristiques de E sur le treillis des sous-modules de E_Ω.

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal bilatère de Ω, les sous-modules caractéristiques

$$D(\mathfrak{q}) = \sum_{u \in \mathfrak{q}} u(E),$$

$$G(\mathfrak{q}) = \bigcap_{u \in \mathfrak{q}} u^{-1}(0),$$

correspondent aux sous-modules $\mathfrak{q}E_\Omega$ et $E_{\Omega_\mathfrak{q}}$, sous-module des éléments de E_Ω annulés par $\mathfrak{q}$.

On connaît (réf. [3]) la structure des sous-modules caractéristiques dans certains cas : c'est ainsi que, *si l'anneau A est local d'idéal maximal engendré par un élément nilpotent,* les sous-modules $\mathfrak{a}E_\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de A, et où $E_\mathfrak{b}$ est le sous-module des éléments de E annulés par $\mathfrak{b}$, engendrent le treillis des sous-modules caractéristiques soit par formation de sup, soit par formation de inf, ce qui est équivalent pour des raisons de dualité.

Proposition 2.1. — *Soient A un anneau noethérien, S une partie multiplicative, B l'anneau $S^{-1}A$, E un A-module de type fini.*

L'application naturelle j_E de E dans $E \otimes_A B$ définit un épimorphisme du treillis des sous-modules caractéristiques de E sur le treillis des sous-modules caractéristiques du B-module $E \otimes_A B$.

La preuve se déduit du fait que l'application de $\mathrm{End}_A(E) \underset{A}{\otimes} B$ dans $\mathrm{End}\left(E \underset{A}{\otimes} B\right)$, qui à l'élément $v \otimes b$ fait correspondre l'élément w tel que

$$w(x \otimes b') = (v(x)) \otimes (bb')$$

est un isomorphisme de B-algèbres, et du lemme suivant :

LEMME. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.1, *si* $\overline{F}$ *est un sous-module de* $E \underset{A}{\otimes} B$, *on a l'égalité*

$$\mathrm{Hom}_A\left(E, j_E^{-1}(\overline{F})\right) = j_{\mathrm{End}(E)}^{-1}\left(\mathrm{Hom}_B\left(E \underset{A}{\otimes} B, \overline{F}\right)\right).$$

En appliquant la proposition au cas où S est le complémentaire d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, on obtient le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE. — *Soient* A *un anneau noethérien,* E *un* A*-module de type fini,* C *un sous-module caractéristique. Les composantes primaires isolées de* C *sont aussi caractéristiques.*

Remarques. — Un sous-module caractéristique de E est dit *maximal* (resp. *minimal*) s'il est maximal (resp. minimal) dans l'ensemble des sous-modules caractéristiques distincts de E (resp. de o).

Si l'anneau A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on voit que :

— Si A est noethérien, un sous-module caractéristique maximal du A-module de type fini E contient $\mathfrak{m}E$;

— Si A est artinien, un sous-module caractéristique minimal est contenu dans le socle $E_{\mathfrak{m}}$ de E.

3. **Sur certains idéaux de l'anneau Ω.**

Soient A un anneau, E un A-module, F un sous-module. On note $\mathfrak{d}(F)$ [resp. $\mathfrak{g}(F)$] l'idéal à droite (resp. à gauche) de l'anneau Ω des endomorphismes de E dont les éléments sont les endomorphismes d'image contenue dans F (resp. de noyau contenant F).

Si F est un sous-module caractéristique, il est clair que les idéaux $\mathfrak{d}(F)$ et $\mathfrak{g}(F)$ sont bilatères. L'idéal $\mathfrak{d}(F)$ ou $\mathfrak{g}(F)$ peut être bilatère sans que F soit caractéristique, mais il n'y a pas à s'arrêter à ce fait, car

— si $\mathfrak{d}(F)$ est bilatère, le sous-module $F' = \sum_{u \in \mathfrak{d}(F)} u(E)$ est caractéristique, et $\mathfrak{d}(F') = \mathfrak{d}(F)$;

— si $\mathfrak{g}(F)$ est bilatère, le sous-module $F'' = \bigcap_{u \in \mathfrak{g}(F)} u^{-1}(\mathrm{o})$ est caractéristique, et $\mathfrak{g}(F'') = \mathfrak{g}(F)$.

Si C est un sous-module caractéristique, on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathfrak{d}(C) \to \operatorname{End}(E) \to \operatorname{End}(E/C),$$
$$0 \to \mathfrak{g}(C) \to \operatorname{End}(E) \to \operatorname{End}(C).$$

Proposition 3.1. — *Soient A un anneau, E un A-module de type fini fidèle, F un sous-module.*

1° *Si A est noethérien, l'égalité $\mathfrak{d}(F) = 0$ équivaut à $F = 0$.*

2° *Si A est artinien, l'égalité $\mathfrak{g}(F) = 0$ équivaut à $F = E$.*

La preuve du 1° figure dans ([2], théorème 2, p. 358). Aussi, en déduirons nous celle du 2° par dualité.

Il est loisible de supposer A local. Soit I l'enveloppe injective de son corps résiduel. On pose

$$E^* = \operatorname{Hom}_A(E, I), \qquad F^* = \operatorname{Hom}_A(F, I).$$

L'isomorphisme naturel de E sur son bidual E^{**} et l'isomorphisme naturel

$$\operatorname{Hom}_A(E, E^{**}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(E^*)$$

montrent que la transposition est un isomorphisme de A-algèbres de $\operatorname{End}(E)$ sur $\operatorname{End}(E^*)$.

L'image de $\mathfrak{g}(F)$ par cet isomorphisme est l'ensemble des éléments u^* de $\operatorname{End}(E^*)$ tels que F^* soit quotient du conoyau de u^*. Si G^* est le sous-objet de E^* tel que $E^*/G^* = F^*$, on voit que l'image de $\mathfrak{g}(F)$ est $\mathfrak{d}(G^*)$. Or, la fidelité de E implique celle de E^*. L'égalité $\mathfrak{g}(F) = 0$ implique donc successivement

$$\mathfrak{d}(G^*) = 0, \quad G^* = 0, \quad F^* = E^* \quad \text{et} \quad F = E.$$

Corollaire. — *Si A est artinien et si F est un sous-module distinct de E* (resp. de 0), *l'annulateur à gauche* (resp. *à droite*) *de l'idéal $\mathfrak{d}(F)$* [resp. $\mathfrak{g}(F)$] *est non nul.*

Ceci résulte de l'égalité $\mathfrak{g}(F)\,\mathfrak{d}(F) = 0$.

Proposition 3.2. — *Soient A un anneau noethérien, S une partie multiplicative de A, E un A-module de type fini, F un sous-module.*

On a les formules

$$S^{-1}(\mathfrak{d}(F)) = \mathfrak{d}(S^{-1}F),$$
$$S^{-1}(\mathfrak{g}(F)) = \mathfrak{g}(S^{-1}F).$$

Ces formules s'obtiennent, en effet, par tensorisation par $S^{-1}A$ des suites exactes

$$0 \to \mathfrak{d}(F) \to \operatorname{End}(E) \to \operatorname{Hom}_A(E, E/F),$$
$$0 \to \mathfrak{g}(F) \to \operatorname{End}(E) \to \operatorname{Hom}_A(F, E).$$

La première est, évidemment, fort classique.

4. Sur certains idéaux premiers de l'anneau Ω.

La définition qui suit est inspirée de [3].

Définition. — *Un idéal premier $\mathfrak{q}$ de l'anneau Ω des A-endomorphismes d'un module fidèle E est dit caractéristique à droite* (resp. *à gauche*), *si $\mathfrak{p}$ désignant la trace de $\mathfrak{q}$ sur A, on a la condition*

$$\sum_{v \in \mathfrak{q}_\mathfrak{p}} v(E_\mathfrak{p}) \neq E_\mathfrak{p} \qquad \left[\text{resp. } \bigcap_{v \in \mathfrak{p}_\mathfrak{q}} v^{-1}(0) \neq 0.\right]$$

Théorème. — *Soient A un anneau, E un A-module de type fini, fidèle.*

1° *Si A est noethérien, l'application $\Phi : C \mapsto \mathfrak{d}(C)$ du treillis des sous-modules caractéristiques de E dans l'ensemble des idéaux bilatères de Ω, induit une surjection de l'ensemble des sous-modules caractéristiques C, tels que* Ann (E/C) *soit un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et que C soit maximal pour cette propriété, sur l'ensemble des idéaux premiers caractéristiques à droite admettant $\mathfrak{p}$ pour trace sur A.*

2° *Si A est artinien, l'application $\Psi : C \mapsto \mathfrak{g}(C)$ du treillis des sous-modules caractéristiques de E dans l'ensemble des idéaux bilatères de Ω, induit une surjection de l'ensemble des sous-modules caractéristiques C, tels que* Ann(C) *soit un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et que C soit minimal pour cette propriété, sur l'ensemble des idéaux premiers caractéristiques à gauche admettant $\mathfrak{p}$ pour trace sur A.*

Preuve. — La proposition 2.1 et son lemme permettent de se ramener au cas où A est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. La preuve du 1°, dans ce cas, se trouve dans ([2], théorème 1, p. 350). Celle du 2° s'en déduit par dualité. Donnons-en une démonstration directe.

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal bilatère maximal tel que $\mathfrak{G}(\mathfrak{q}) = \bigcap_{u \in \mathfrak{q}} u^{-1}(0)$ soit $\neq 0$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{G}(\mathfrak{q}))$ est un idéal bilatère de Ω, distinct de Ω et contenant $\mathfrak{q}$. On a donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(\mathfrak{G}(\mathfrak{q}))$. Si C est un sous-module caractéristique minimal contenu dans $\mathfrak{G}(\mathfrak{q})$, on a aussi $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(C)$.

Réciproquement, si C est un sous-module caractéristique minimal, soit $\bar{u}$ la restriction à C de l'élément u de Ω, et soit $\bar{S}$ l'image de Ω dans End(C), isomorphe à $\Omega/\mathfrak{g}(C)$.

Si $u \notin \mathfrak{g}(C)$. il est clair que

$$\bigcap_{x \in \Omega} (ux)^{-1}(0)$$

est sous-module caractéristique de E. Il ne contient pas C puisque $u^{-1}(o)$ ne contient pas C. La minimalité de C implique l'égalité

$$C \cap \left(\bigcap_{x \in \Omega} (ux)^{-1}(o) \right) = o$$

et, par restriction,

$$\bigcap_{x \in \bar{S}} (\bar{u}\bar{x})^{-1}(o) = o.$$

Ceci implique que $\bar{S}$ est *semi-simple* : si le radical $\mathfrak{r}$ de $\bar{S}$ était non nul, il existerait un entier $p > 1$ tel que $\mathfrak{r}^p = o$ et $\mathfrak{r}^{p-1} \neq o$. Si $\bar{v}$ était un élément non nul de $\mathfrak{r}$, on aurait

$$\bar{v}^{-1}(o) = \bar{v}^{-1} \left(\bigcap_{\bar{x} \in \bar{S}} (\bar{u}\bar{x})(o) \right) = \bigcap_{\bar{x} \in \bar{S}} (\bar{u}\bar{x}\bar{v})^{-1}(o) = \bar{E}.$$

Ceci impliquerait $\bar{v} = o$, contrairement à l'hypothèse.

La *simplicité* de $\bar{S}$ résulte alors de ce que tout idempotent *central* de $\bar{S}$ est o ou 1 car, si $\bar{u}$ est un tel indempotent non nul,

$$(1 - \bar{u})^{-1}(o) = \bigcap_{\bar{x} \in \bar{S}} (\bar{u}\bar{x}(1 - \bar{u}))^{-1}(o) = \bigcap_{\bar{x} \in \bar{S}} (\bar{u}(1 - \bar{u})\bar{x})^{-1}(o) = \bar{E}.$$

Remarques.

1° *Si l'anneau A est artinien, les notions d'idéal premier caractéristique à droite et à gauche sont intrinsèques*, i. e. ne dépendent que de l'anneau Ω et pas du A-module E tel que $\mathrm{End}(E) = \Omega$.

On peut, en effet, supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Il résulte du théorème qu'un idéal caractéristique à droite (resp. à gauche) est de la forme $\mathfrak{d}(C)$ [resp. $\mathfrak{g}(C)$] où C est un sous-module distinct de E (resp. de o). Il en résulte que l'annulateur à gauche (resp. à droite) de cet idéal est non nul (prop. 3.1).

D'autre part, si l'idéal $\mathfrak{q}$ n'est pas caractéristique à droite (resp. à gauche), on déduit de la condition $\sum_{u \in \mathfrak{q}} u(E) = E \left[\text{resp. } \bigcap_{u \in \mathfrak{q}} u^{-1}(o) = o \right]$ que son annulateur à gauche (resp. à droite) est o.

2° On remarque que l'existence d'idéaux premiers non caractéristiques à droite (resp. à gauche) tient à la non commutativité de Ω.

On peut, évidemment, se limiter au cas des idéaux bilatères *maximaux*. Si $\mathfrak{q}$ est un tel idéal non *caractéristique à droite*, on a l'égalité

$$\mathfrak{q}E_\Omega = E_\Omega$$

avec les notations du 2°.

Or, la commutativité de Ω impliquerait $\mathfrak{q} = \Omega$, car E_Ω est un Ω-module (à gauche) de type fini, et l'on peut écrire, si e_i ($i = 1, \ldots, n$) est un système fini de générateurs de E,

$$e_i = \sum a_{ij} e_j,$$

où $a_{ij} \in \mathfrak{q}$, soit

$$(\delta_{ij} - a_{ij}) e_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

d'où

$$\det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$$

et $1 \in \mathfrak{q}$.

De même, si $\mathfrak{q}$ n'est pas *caractéristique à gauche*, on a l'égalité

$$E_{\Omega\mathfrak{q}} = 0$$

qui implique $\mathfrak{q} = 0$, *si l'anneau A est artinien.*

3° On peut se reporter à [2] pour le fait que Φ (resp. ψ) induisent des *surjections* et non des *bijections* en général.

BIBLIOGRAPHIE.

Les lignes ci-dessus constituent un développement d'une Note aux *Comptes rendus* :

LAFON (Jean-Pierre). — Spectre premier bilatère de l'anneau des endomorphismes d'un module de type fini, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, Série A, t. 262, 1966, p. 1098-1099.

Il y a lieu de signaler que la proposition 1 de cette Note, reprise ici en proposition 2.1, était énoncée sous des hypothèses trop générales.

[1] BAER (Reinhold). — Automorphism rings of primary abelian operator groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 44, 1943, p. 192-227.
[2] LAFON (Jean-Pierre). — Anneau des endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 11, 1961, p. 313-384 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1960).
[3] SHIFFMAN (Max). — The ring of automorphisms of an abelian group, *Duke math. J.*, t. 6, 1940, p. 579-597.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1966.)

Jean-Pierre LAFON,
Professeur
à la Faculté des Sciences
de Montpellier,
7, rue de l'Imprimerie, Montpellier (Hérault).