

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. SZPIRO

## Fonctions d'ordre et valuations

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 94 (1966), p. 301-311

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1966\\_\\_94\\_\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__301_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FONCTIONS D'ORDRE ET VALUATIONS

PAR

LUCIEN SZPIRO.

Les deux résultats principaux de ce travail sont :

1° Le théorème de représentation (théorème 1) qui donne une caractérisation des fonctions d'ordre homogènes discrètes sur un anneau commutatif (COHN [2] avait déjà obtenu ce résultat dans le cas des corps).

2° Le théorème 4 qui étudie le passage de la propriété, pour un anneau préadique noethérien, d'être de pas fini, à un suranneau, notamment à un suranneau entier.

### 1. Quelques propriétés des fonctions d'ordre.

DÉFINITION 1. — Soit  $A$  un anneau commutatif, unitaire; on appelle fonction d'ordre sur  $A$  toute application  $V : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  telle que :

- (o)  $V(0) = \infty$ ;
- (i)  $V(1) = 0$ ;
- (ii)  $V(x + y) \geq \inf(V(x), V(y))$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $A$ ;
- (iii)  $V(xy) \geq V(x) + V(y)$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $A$ .

Exemple. — Soient  $A$  un anneau et  $\alpha$  un idéal de  $A$ . La fonction  $V : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ , définie par  $V(x) = \sup(n \in \overline{\mathbf{N}} \mid x \in \alpha^n)$ , est une fonction d'ordre sur  $A$ , que nous appellerons la fonction d'ordre associée à l'idéal  $\alpha$ , et que nous noterons  $V_\alpha$ .

Pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ , nous noterons

$${}_\alpha V = (x \in A \mid V(x) \geq \alpha), \quad \bar{\alpha} V = (x \in A \mid V(x) > \alpha), \quad \text{gr}_\alpha = {}_\alpha V / \bar{\alpha} V.$$

DÉFINITION 2. — Soit  $A$  un anneau, et soit  $V$  une fonction d'ordre sur  $A$ . On appelle anneau gradué associé à  $V$ , et l'on note  $\text{gr}''$ , le groupe

$\sum_{\alpha \in \mathbf{R}} {}_\alpha V / \bar{\alpha} V$  muni de la multiplication suivante : soit  $x \in A$  tel que  $V(x) \geq \alpha$ ,

on notera  $\text{gr}'_{\alpha}(x)$  la classe de  $x$  dans  ${}_{\alpha}V/\bar{\alpha}V$ , la multiplication sera définie par linéarité à partir de la formule

$$\text{gr}'_{\alpha}(x) \times \text{gr}'_{\beta}(y) = \text{gr}'_{\alpha+\beta}(xy).$$

Une fonction d'ordre sera dite *homogène* (resp. une *valuation*) si son anneau gradué associé est réduit (resp. intègre).

DÉFINITION 3. — Une fonction d'ordre  $V$ , sur un anneau  $A$ , sera dite *discrète* si  $V(A - {}_{\alpha}V)$  engendre dans  $\mathbf{R}$  un sous-groupe discret; *séparée* si  ${}_{\alpha}V = (0)$ .

PROPOSITION 1 (SAMUEL [5]). — Soit  $V$  une fonction d'ordre sur un anneau  $A$ ; alors il existe une fonction d'ordre homogène  $\bar{V}$  sur  $A$ , qui est la plus petite fonction d'ordre homogène sur  $A$  qui soit plus grande que  $V$ ; de plus, pour tout  $x$  dans  $A$ , on a

$$V(x) = \lim(V(x^n)/n).$$

PROPOSITION 2 (REES [4]). — Soit  $V$  une fonction d'ordre positive sur un anneau  $A$ , soit  $A'$  un anneau entier sur  $A$ , soit  $V'$  la fonction d'ordre sur  $A'$  définie par  ${}_{\alpha}V' = {}_{\alpha}VA'$ ; alors, pour tout  $x$  dans  $A$ , on a

$$\bar{V}(x) = \bar{V}'(x).$$

En fait, ces propositions ont été démontrées par leurs auteurs dans le cas où  $V$  est une fonction d'ordre définie par les puissances d'un idéal de  $A$ , mais les démonstrations ne font appel qu'aux propriétés de la définition 1.

## 2. Le théorème de représentation.

THÉORÈME 1. — Soit  $V$  une fonction d'ordre homogène, discrète sur un anneau  $A$ , alors il existe une famille  $(V_i)_{i \in I}$  de valuations discrètes sur  $A$  telle que, pour tout  $x$  dans  $A$ , on ait

$$V(x) = \inf_{i \in I} (V_i(x)).$$

Notons que, réciproquement, pour toute famille  $(V_i)_{i \in I}$  de valuations discrètes sur  $A$  prenant leurs valeurs dans un même sous-groupe discret de  $\mathbf{R}$ ,  $\inf_{i \in I} (V_i)$  est une fonction d'ordre homogène discrète sur  $A$ .

Pour faire la démonstration du théorème 1, il nous suffit de considérer le cas où  $V$  est séparée et où elle prend ses valeurs dans  $\mathbf{Z}$ .

DÉFINITION 4. — Une partie  $S$  de  $A$  sera dite *V-compatible* si c'est une partie multiplicativement stable de  $A$  ne rencontrant pas  $(0)$ , et si de plus, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $S$ , on a

$$V(xy) = V(x) + V(y).$$

LEMME 1. — *Toute partie V-compatible de A est contenue dans une partie V-compatible maximale de A pour la relation d'inclusion.*

En effet, la propriété de V-compatibilité est une propriété à caractère fini. Soit  $(S_i)_{i \in I}$  la famille des parties V-compatibles maximales de A.

LEMME 2. — *Pour tout  $i \in I$ , et pour tout  $x$  non nul dans A les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $x$  appartient à  $S_i$ ;
- (ii)  $V(xu) = V(x) + V(u)$  pour tout  $u$  dans  $S_i$ .

En effet, il est clair que (i) implique (ii); réciproquement, soit  $S$  la partie multiplicativement stable de A engendrée par  $S_i$  et  $x$ ; nous allons montrer qu'elle est V-compatible. L'élément générique de  $S$  est de la forme  $x^n u$ , où  $n$  est un entier et  $u$  est dans  $S_i$ ; alors  $V(x^n u) = V(u) + n V(x)$ , car

$$V(x^n u^n) = n(V(x) + V(u)) = V(u) + V(u^{n-1}) + V(x^n) \geq V(x^n u) + V(u^{n-1}),$$

donc

$$V(x^n u) \leq V(x^n) + V(u),$$

d'où l'égalité. Maintenant il est facile de voir que  $V$  satisfait à l'égalité voulue sur  $S$ , et que  $S \cap (0) = \emptyset$  ( $V$  a été supposée séparée).

COROLLAIRE 1. — *Soient  $z \in S_i$  et  $x \in A$ ; alors, si  $V(x) > V(z)$ ,  $(x + z) \in S_i$ .*

En effet, si  $u \in S_i$ ,

$$V((z + x)u) = V(zu + xu) = V(zu) = V(z) + V(u) = V(z + x) + V(u).$$

LEMME 3. — *Posons  $T_i = \{x \mid x S_i \cap S_i \neq \emptyset\}$ , alors on a*

- (i) «  $x$  est dans  $T_i$  » est équivalent à «  $-x$  est dans  $T_i$  »;
  - (ii)  $T_i$  est multiplicativement stable;
  - (iii) si  $y$  n'est pas dans  $T_i$  et si  $x$  est dans  $T_i$ , alors  $xy$  n'est pas dans  $T_i$ .
- (i) est évident.

(ii) Soit  $x$  dans  $T_i$  on a  $xu = v$ , où  $u$  et  $v$  sont dans  $S_i$ . De même, soient  $y$  dans  $T_i$ ,  $t$  et  $w$  dans  $S_i$ , avec  $yt = w$ ; alors  $xy(ut) = vw$ , ce qui prouve que  $xy$  est dans  $T_i$ , car  $S_i$  est multiplicativement stable.

(iii)  $x$  est dans  $T_i$ ; donc il existe  $u$  et  $v$  dans  $S_i$  tels que  $xu = v$ ; de même, si  $xy$  est dans  $T_i$ , il existe  $y$  et  $w$  dans  $S_i$  avec  $xyt = w$ ; donc  $y(xu)t = y(vt) = uw$ ; donc  $y$  est dans  $T_i$ , car  $S_i$  est multiplicativement stable, ce qui est impossible.

LEMME 4. — *Pour tout  $i$  dans  $I$ , il existe une fonction  $V_i : A \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que  $V_i(x) = \infty$  si  $x$  n'est pas dans  $T_i$ , et  $V_i(x) = V(v) - V(u)$  si  $x$  est dans  $T_i$ ,  $u$  et  $v$  dans  $S_i$  et  $xu = v$ .*

Pour cela il suffit de montrer que  $xu = v$ ,  $xt = w$  (où  $x$  est dans  $T_i$  et  $u, v, t, w$  dans  $S_i$ ) entraîne  $V(v) - V(u) = V(w) - V(t)$ . Or  $vt = xut = wu$ , donc  $V(vt) = V(wu)$ , et comme  $u, t, v, w$  sont dans  $S_i$ , le lemme est démontré.

On a  $V_i(x) = V(x)$  pour tout  $x$  dans  $S_i$  et, d'autre part,  $V_i(x) \geq V(x)$  pour tout  $x$  dans  $A$ , car  $xu = v$  entraîne  $V(v) \geq V(x) + V(u)$ . Donc  $V(x) = \inf_{i \in I} V_i(x)$  pour tout  $x$  de  $A$  car tout  $x$  non nul de  $A$  est dans un  $S_i$  pour au moins un  $i$  dans  $I$ . Il nous reste à montrer que les  $V_i$  sont des valuations.

LEMME 5. — *Si  $y$  n'est pas dans  $T_i$  et si  $x$  est dans  $S_i$ , alors il existe  $z$  dans  $S_i$  tel que  $V(yz) > V(xz)$ .*

Nous raisonnerons par récurrence sur  $n = V(x) - V(y)$ . Si  $n$  est négatif, il suffit de prendre  $z = 1$ , qui appartient à  $S_i$  pour tout  $i$ . Supposons donc le lemme démontré pour tout  $k < n = V(x) - V(y)$ . Par le lemme 2, il existe  $u$  appartenant à  $S_i$  tel que  $V(yu) > V(y) + V(u)$ .

Donc  $V(xu) - V(yu) < V(xu) - V(y) - V(u)$ , comme  $x$  et  $u$  sont dans  $S_i$ , on a

$$V(xu) = V(x) + V(u).$$

Donc

$$V(xu) - V(yu) < V(x) - V(y) = n.$$

Le lemme 3-(iii) entraîne «  $yu$  n'est pas dans  $T_i$  », comme  $xu$  est dans  $S_i$ , nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc  $v$  dans  $S_i$  tel que  $V(yuv) > V(xuv)$ , ce qui donne le résultat en posant  $z = uv$ .

LEMME 6. — *Si  $y$  n'est pas dans  $T_i$  et si  $x$  est dans  $T_i$ , alors  $x + y$  est dans  $T_i$ .*

Ramenons-nous au cas où  $x$  est dans  $S_i$ .

Soient  $x$  dans  $T_i$ ,  $u$  dans  $S_i$ ,  $x'$  dans  $S_i$ , avec  $xu = x'$ ;  $yu = y'$  n'est pas dans  $T_i$ ; alors  $x' + y' = (x + y)u$ , et «  $(x' + y')$  est dans  $T_i$  » est équivalent à «  $(x + y)$  est dans  $T_i$  ».

Ramenons-nous au cas où  $V(y) > V(x)$ .

Soit, en vertu du lemme 5,  $u$  dans  $S_i$  avec  $V(yu) > V(xu)$ , alors «  $[(x + y)u]$  appartient à  $T_i$  » est équivalent à «  $(x + y)$  appartient à  $T_i$  ».

Si  $V(y) > V(x)$  :  $V(x + y) = V(x)$ .

Soit  $z$  appartenant à  $S_i$ ; alors  $V((x + y)z) = V(xz + yz)$ .

Or,

$$V(xz) = V(x) + V(z), \quad V(y) + V(z) \leq V(yz).$$

Donc,

$$V((x + y)z) = V(xz) = V(x) + V(z) = V(x + y) + V(z),$$

d'où le résultat d'après le lemme 2.

COROLLAIRE 2. — Posons  $\mathfrak{P}_i = A - T_i$ . Alors  $\mathfrak{P}_i$  est un idéal premier de  $A$ .

Soient  $x \in \mathfrak{P}_i$  et  $y \in \mathfrak{P}_i$ , alors  $-y \in \mathfrak{P}_i$ , soit  $z = x - y$ ; si  $z$  appartient à  $T_i$ ,  $x = z + y \in T_i$  d'après le lemme 6, ce qui est absurde. Donc  $x - y \in \mathfrak{P}_i$ .

Si  $x \in \mathfrak{P}_i$  et  $y \in \mathfrak{P}_i$ , alors  $xy \in \mathfrak{P}_i$ ; en effet,  $x(1 + y) \in \mathfrak{P}_i$  car  $1 \in T_i$  entraîne  $(1 + y) \in T_i$ , mais  $xy = x(1 + y) - x$ , donc  $xy \in \mathfrak{P}_i$ .

Le lemme 3-(iii) dit exactement que  $x \in \mathfrak{P}_i$  et  $y \in T_i$  entraîne  $xy \in \mathfrak{P}_i$ ; donc, quel que soit  $x \in \mathfrak{P}_i$  et quel que soit  $y \in A$ , on a  $xy \in \mathfrak{P}_i$ .

Nous venons de montrer que  $\mathfrak{P}_i$  est un idéal; c'est un idéal premier, car  $T_i$ , son complémentaire, est multiplicativement stable [lemme 3-(ii)].

Montrons maintenant que  $V_i$  est une valuation. On a trivialement

$$V_i(0) = \infty, \quad V_i(1) = 0.$$

Montrons que

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Il y a trois cas à considérer :

1°  $x \in T_i, y \in T_i, u, v, t, w, \in S_i$ , avec  $xu = v, yt = w$ ; alors  $xyut = vw$ , d'où

$$V_i(xy) = V(vw) - V(ut) = V_i(x) + V_i(y).$$

2°  $x \in T_i, y \in \mathfrak{P}_i$ ; alors

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y) = \infty.$$

3°  $x \in \mathfrak{P}_i, y \in \mathfrak{P}_i$ ; alors

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y) = \infty,$$

car  $\mathfrak{P}_i$  est un idéal.

Montrons que  $V_i(x + y) \geq \inf(V_i(x), V_i(y))$ . Il y a encore trois cas :

1°  $x \in T_i, y \in T_i, u, v, w, \in S_i$ , avec  $xu = v, yu = w$ , ce qu'on peut toujours supposer car  $S_i$  est multiplicativement stable.

— Si  $(x + y) \in \mathfrak{P}_i$ , c'est démontré;

— Si  $(x + y) \in T_i$ , on peut toujours supposer, pour la même raison que précédemment, que  $(x + y)u = t$ , avec  $t \in S_i$ ; alors

$$(x + y)u = t = v + w \quad \text{et} \quad V(t) \geq \inf(V(v), V(w)),$$

donc

$$V(t) - V(u) \geq \inf(V(v) - V(u), V(w) - V(u)).$$

C. Q. F. D.

2°  $x \in T_i, y \in \mathfrak{P}_i$ , alors il existe  $z \in S_i$  tel que  $V(xz) < V(yz)$ . Donc, si l'on prend  $z$  tel que, de plus,  $xz \in S_i$ ,

$$V(yz + xz) = V_i(xz) = V(xz) = V_i(yz + xz),$$

i. e.  $V_i(x + y) = V_i(x) = \inf(V_i(x), V_i(y))$ .

3°  $x \in \mathfrak{P}_i, y \in \mathfrak{P}_i$ , alors  $(x + y) \in \mathfrak{P}_i$ , donc  $V_i(x + y) = \infty$ . Le théorème est donc démontré.

Soit  $V$  une fonction d'ordre sur un anneau  $A$ , nous noterons  $g$  l'application de  $A$  dans  $\text{gr}^V$ , définie de la façon suivante : si  $x \in A$  et  $V(x) = \alpha$ ,  $g(x)$  sera la classe de  $x$  dans  $\text{gr}_\alpha^V$ . Nous noterons  $f$  la restriction de  $g$  à l'ensemble des complémentaires des idéaux premiers minimaux de  $\text{gr}^V$ .

**PROPOSITION 3.** — *L'application  $f$  définie ci-dessus est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $\text{gr}^V$  sur l'ensemble des parties  $V$ -compatibles maximales de  $A$ .*

Soit  $\mathfrak{P}$  un idéal premier minimal de  $\text{gr}^V$ , soit  $\mathfrak{R}$  son complémentaire; il est bien évident que  $f(\mathfrak{P})$  est une partie  $V$ -compatible de  $A$ . Soit  $S$  une partie  $V$ -compatible de  $A$  contenant  $f(\mathfrak{P})$ , alors  $g(S)$  est une partie multiplicativement stable de  $\text{gr}^V$  qui ne rencontre pas  $(o)$ , donc qui ne rencontre pas, au moins, un idéal premier minimal  $\mathfrak{P}'$ . Supposons que  $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}'$ , comme ces deux idéaux sont gradués ([1], chap. 3, n° 1, prop. 1), il existe  $x \in A$  tel que  $g(x) \in \mathfrak{P}'$  et  $g(x) \in \mathfrak{R}$ , donc il existe  $x \in A$  tel que  $x \in f(\mathfrak{P})$  et  $x \notin S$ , ce qui n'est pas possible. Donc  $f(\mathfrak{P})$  est une partie  $V$ -compatible maximale de  $A$ , nous avons même montré que  $f$  était injective.

Or  $f$  est surjective car, si  $S$  est une partie  $V$ -compatible maximale de  $A$ , alors, en prenant pour  $\mathfrak{P}$  un idéal premier minimal de  $\text{gr}^V$  ne rencontrant pas  $g(S)$ , on a  $S = f(\mathfrak{P})$ .

**COROLLAIRE 3.** — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille de valuations du théorème 1 soit finie est que  $\text{gr}^V$  n'ait qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

### 3. Anneaux préadiques de pas fini.

Nous noterons, pour tout idéal  $\alpha$  de l'anneau  $A$ ,  $V_\alpha$  la fonction d'ordre sur  $A$  définie par les puissances de l'idéal  $\alpha$ .

**THÉORÈME 2 (REES [3]).** — *Soit  $A$  un anneau noethérien et soit  $\alpha$  un idéal de  $A$ . Alors il existe une famille finie  $(V_i)_{i=1, \dots, n}$  de valuations sur  $A$  telle que*

$$\bar{V}_\alpha(x) = \inf(V_i(x)), \quad \forall x \in A;$$

de plus, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  ${}_n V_i$  est un idéal premier minimal de  $A$ .

**THÉORÈME 3 (REES [4]).** — *Soit  $A$  un anneau noethérien intègre, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout idéal  $\alpha$  de  $A$ , il existe une constante  $k(\alpha) < \infty$  telle que*

$$0 \leq \bar{V}_\alpha(x) - V_\alpha(x) \leq k(\alpha), \quad \forall x \in A;$$

(ii) Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{P}$  de  $A$ , la complétion de  $A$  pour la topologie  $\mathfrak{P}$  préadique est réduite.

DÉFINITION 5. — Soient  $A$  un anneau,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $A$ ; on dira que l'anneau  $\mathfrak{a}$ -préadique  $A$  (ou plus simplement, si aucune confusion n'est à craindre, que l'anneau  $A$ ) est de *pas fini*, s'il existe une constante  $k$  telle que

$$(i) \quad 0 \leq V_{\mathfrak{a}}(xy) \leq V_{\mathfrak{a}}(x) + V_{\mathfrak{a}}(y) + k, \quad \forall x, y \in A;$$

la plus petite de ces constantes sera appelée le *pas de l'anneau  $\mathfrak{a}$ -préadique  $A$* , et notée  $p_{\mathfrak{a}}(A)$  [ou plus simplement  $p(A)$  si aucune confusion n'est à craindre].

LEMME 7. — Si l'anneau  $\mathfrak{a}$ -préadique  $A$  est séparé et de pas fini, alors il est intègre.

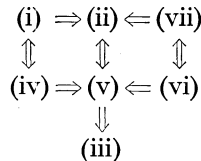
Supposons que  $xy = 0$ ; alors  $V_{\mathfrak{a}}(xy) = \infty$ , donc  $V_{\mathfrak{a}}(x)$  ou  $V_{\mathfrak{a}}(y)$  est infini en vertu de (i), et donc  $x$  ou  $y$  est égal à zéro puisque  $A$  est séparé.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 4. — Soient  $A$  un anneau noethérien  $\mathfrak{a}$ -préadique séparé intègre,  $K$  son corps de fraction,  $\hat{A}$  son complété,  $A'$  sa fermeture intégrale,  $\mathfrak{a}\hat{A} = \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}A'$ ,  $B$  un sur-anneau de  $A$  tel que  $B$  soit entier sur  $A$ , et intègre,  $L$  le corps des fractions de  $B$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}B$ . Considérons les propositions suivantes :

- (i)  $A$  est de pas fini;
- (ii)  $\bar{V}_{\mathfrak{a}}$  est une valuation;
- (iii) le nilradical de  $\text{gr}^{\mathfrak{a}}$  est un idéal premier;
- (iv)  $\hat{A}$  est de pas fini;
- (v)  $\bar{V}_{\mathfrak{a}}$  est une valuation;
- (vi)  $\bar{V}_{\mathfrak{b}}$  est une valuation;
- (vii)  $\bar{V}_{\mathfrak{a}}$  est une valuation sur  $A$  dont l'unique prolongement à  $K$  n'a qu'une seule extension à  $L$ .

Alors



De plus, si  $A$  est analytiquement réduit, (i) est équivalent à (ii).

— (i)  $\Rightarrow$  (ii) :

$$0 \leq \frac{V_{\mathfrak{a}}(x^n y^n)}{n} - \frac{V_{\mathfrak{a}}(x^n)}{n} - \frac{V_{\mathfrak{a}}(y^n)}{n} \leq \frac{k}{n}, \quad \forall x, y \in A$$



et  $\forall n \in \mathbf{N}$ , donc

$$\overline{V}_\alpha(xy) = \overline{V}_\alpha(x) + \overline{V}_\alpha(y).$$

— (ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Considérons l'anneau gradué  $\text{gr}^{\overline{V}_\alpha} = \overline{\text{gr}}^\alpha$ . Il est intègre; de plus, si  $\mathfrak{N}$  est le nilradical de  $\text{gr}^\alpha$ , alors  $\text{gr}^\alpha(A)/\mathfrak{N}$  s'injecte dans  $\overline{\text{gr}}^\alpha(A)$ , donc est intègre.

C. Q. F. D.

Remarquons que jusqu'ici nous ne nous sommes pas servis du fait que  $A$  est noethérien.

— (i)  $\Rightarrow$  (iv) : C'est évident, car si  $A$  est noethérien,  $\hat{a}^n \cap A = a^n$  pour tout  $n$  entier, et l'application  $V_\alpha : A \rightarrow \mathbf{N}$  est continue;

— (v)  $\Rightarrow$  (ii) : C'est évident par la proposition 2;

— (ii)  $\Rightarrow$  (v) : Si  $\overline{V}_\alpha$  est une valuation, alors  $A - (o) = S$  est  $\overline{V}_\alpha$ -compatible. Pour démontrer (v), il suffit, posant  $V$  égale au prolongement de  $\overline{V}_\alpha$  à  $K$ , de démontrer que

$$\overline{V}_{\alpha'}(x) = V(x), \quad \forall x \in A'.$$

Si  $x$  est dans  $A$ , c'est déjà vrai. Soit  $x \in A'$ ,  $x \notin A$ ,  $A_1 = A[x]$ ,  $\alpha_1 = \alpha A_1$ ; on a

$$\overline{V}_{\alpha_1}(y) = \overline{V}_{\alpha'}(y), \quad \forall y \in A,$$

toujours en vertu de la proposition 2.  $A_1$  est un  $A$ -module de type fini, donc son conducteur,  $\mathfrak{f}$  dans  $A$  est non nul.  $A$  étant noethérien,  $A_1$  l'est aussi, et donc, pour toute partie  $\overline{V}_{\alpha_1}$ -compatible maximale  $S$ , on a  $T(S) = A_1 - (o)$ . Soit  $u \in \mathfrak{f}$ ,  $u \neq o$ , il existe  $a \in S$  tel que  $au \in S$ , donc

$$t = au \in S \cap \mathfrak{f} \subset A.$$

D'autre part, il existe  $b$  et  $c \in S$  tels que  $bx = c$ , donc  $x(bt) = ct$ , en posant

$$bt = b' \in A \cap S \quad ct = c' \in A \cap S \quad \text{et} \quad bx = c'.$$

Soit  $W$  la valuation de  $A_1$  déduite de  $S$ , alors

$$W(x) = W(c') - W(b'),$$

mais  $b'$  et  $c'$  appartiennent à  $A \cap S$ , donc

$$W(b') = \overline{V}_\alpha(b') = V(b') \quad \text{et} \quad W(c') = \overline{V}_\alpha(c') = V(c'),$$

et donc  $V(x) = W(x)$  pour toute valuation  $W$  appartenant à la représentation de  $\overline{V}_\alpha$ , et donc  $\overline{V}_{\alpha'}(x) = V(x)$ .

C. Q. F. D.

(vii)  $\Rightarrow$  (ii) : C'est bien évident.

(vii)  $\Rightarrow$  (vi) : Si  $B$  est contenu dans  $K$ , c'est déjà démontré.

On peut donc supposer que  $B$  contient  $A'$  en vertu de la proposition 2. Notons  $V$  l'unique extension de  $\bar{V}_a$  à  $B$ . Nous allons démontrer que si

$$(1) \quad x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_s = 0$$

est l'équation minimale de  $x \in B$  sur  $K$ , alors,

$$V(x) = \inf_{i=1, \dots, s} \frac{\overline{V}_{a'}(a_i)}{i} = \bar{V}_b(x).$$

Posons  $K_1$  égale à la plus petite extension semi-galoisienne de  $K$  contenant  $x$ . Soient  $x_1 = x, x_2, \dots, x_s$  les conjugués de  $x$  sur  $K$ , i. e. les racines du polynôme minimal de  $x$  sur  $K$ . Soit  $V_1$  un prolongement, de  $V$  restreinte à  $K[x]$ , à  $K_1$ . Soit  $\sigma_i$  l'automorphisme de  $K_1$  sur  $K$  tel que  $\sigma_i(x) = x_i$ . Posons, pour tout  $y \in K[x]$ ,

$$V_i(y) = V_1(\sigma_i(y));$$

les  $V_i$  sont des valuations de  $K[x]$  qui prolongent  $\bar{V}_a$ , donc elles sont toutes égales par hypothèse, donc  $V_i(x_i) = V(x)$  pour tout  $i = 1, \dots, s$ . Dans l'équation minimale de  $x$ , dont tous les coefficients  $a_i$  sont dans  $A'$ , les  $a_i$  sont des polynômes homogènes symétriques de degré  $i$  en les  $x_j$ , donc

$$V(a_i) \geq iV(x), \quad \forall i = 1, \dots, s.$$

D'autre part, il existe  $i_0$  tel que  $V(a_{i_0} x^{s-i_0}) = \inf_{i=1, \dots, s} (V(a_i x^{s-i}))$ , donc

$$sV(x) = V(x^s) \geq V(a_{i_0} x^{s-i_0}) = V(a_{i_0}) + V(x) \times (s - i_0),$$

donc

$$V(x) = \inf_{i=1, \dots, s} \frac{V(a_i)}{i} = \frac{V(a_{i_0})}{i_0}.$$

Soient  $A_1$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K_1$ ,  $b_1$  l'idéal  $\mathfrak{a}A_1$ ; on a

$$\bar{V}_{b_1}(y) = \bar{V}_a(y), \quad \forall y \in A'.$$

D'autre part, pour tout  $i, \sigma_i(\mathfrak{a}^n) = \mathfrak{a}^n$  et  $\sigma_i(A_1) = A_1$ ; donc  $(b_1^n) = b_1^n$ , donc

$$V_{b_1}(\sigma_i(y)) = V_{b_1}(y), \quad \forall y \in A_1,$$

donc

$$\bar{V}_{b_1}(\sigma_i(y)) = \bar{V}_{b_1}(y), \quad \forall y \in A_1,$$

donc, dans l'équation (1),  $\bar{V}_{b_1}(a_i) \geq iV(x)$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ ; de même que précédemment, il existe  $j_0$  tel que

$$\bar{V}_{b_1}(x) = \frac{\bar{V}_{b_1}(a_{j_0})}{j_0},$$

donc

$$\bar{V}_{\mathfrak{b}_1}(x) = \inf_{i=1, \dots, s} \frac{\bar{V}_{\mathfrak{b}_1}(a_i)}{i} = \inf_{i=1, \dots, s} \frac{V(a_i)}{i} = V(x).$$

C. Q. F. D.

(vi)  $\Rightarrow$  (vii) : Notons  $V$  l'unique prolongement de  $\bar{V}_{\mathfrak{b}}$  à  $L$ . Soit  $W$  une autre valuation de  $L$  prolongeant l'unique extension de  $\bar{V}_{\mathfrak{a}}$  à  $A$ . On a  $V(x) \geq V_{\mathfrak{a}}(x)$ ,  $\forall x$  appartenant à  $A$ ; d'autre part, l'anneau de  $W$  contenant  $A$ , il contient aussi  $B$ , et comme  $\mathfrak{b}^n = \mathfrak{a}^n B$ ,  $W(x) \geq V_{\mathfrak{b}}(x)$ ,  $\forall x \in B$ , donc

$$W(x) \geq \bar{V}_{\mathfrak{b}}(x), \quad \forall x \in B.$$

Supposons que  $W$  soit distinct de  $V$ , comme  $V$  et  $W$  sont de rang 1 et prolongent une même valuation, elles sont inéquivalentes. Donc il existe  $x \in L$  tel que  $W(x) < 0$  et  $V(x) > 0$ . On peut écrire  $x = \frac{y}{z}$ , avec  $y \in B$  et  $z \in A$ . En effet, on peut en tous cas supposer  $z \in B$ ; de plus, si  $z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r = 0$ , avec  $a_i \in A$ , est l'équation de dépendance intégrale de  $z$  sur  $A$ , alors

$$z(z^{r-1} + \dots + a_{r-1}) = -a_r \in A,$$

et, en multipliant haut et bas  $\frac{y}{z}$  par  $(z^{r-1} + \dots + a_{r-1})$ ,  $x$  est bien de la forme voulue. On a donc  $W(z) > W(y) \geq V(y) > V(z)$ , ce qui est impossible car  $z \in A$ , et donc  $W(z) = V(z)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Supposons maintenant  $A$  analytiquement réduit, par le théorème 2 de Rees, il existe une constante  $k$  telle que  $0 \leq \bar{V}_{\mathfrak{a}}(x) - V_{\mathfrak{a}}(x) \leq k$ ,  $\forall x \in A$ , donc si  $\bar{V}_{\mathfrak{a}}$  est une valuation

$$V_{\mathfrak{a}}(xy) - V_{\mathfrak{a}}(x) - V_{\mathfrak{a}}(y) \leq \bar{V}_{\mathfrak{a}}(xy) - \bar{V}_{\mathfrak{a}}(x) - \bar{V}_{\mathfrak{a}}(y) + 2k = 2k.$$

C. Q. F. D.

EXEMPLES :

(0) Un anneau local régulier est de pas nul.

(1) Un anneau local  $(A, \mathfrak{m})$  noethérien complet intègre de hauteur 1 est de pas fini (pour sa filtration  $\mathfrak{m}$ -adique). En effet, sa clôture intégrale est un anneau de valuation discrète.

(2) Soit  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local noethérien complet intègre de hauteur  $d$  équicaractéristique; alors il existe une réduction  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{m}$  (i. e. il existe  $r$  tel que  $\mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^r$ , donc  $\mathfrak{m}^{r+h} = \mathfrak{q}^h \mathfrak{m}^r$ ,  $\forall h$  entier) engendrée par  $d$  éléments  $x_1, \dots, x_d$  analytiquement indépendants sur  $k = A/\mathfrak{m}$ ,

et donc  $\overline{V}_m = \overline{V}_q$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit de pas fini est que la valuation canonique du corps  $k((x_1, \dots, x_d))$  n'ait qu'une seule extension au corps de fractions de  $A$ .

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*, chap. 3-4, 5-6. — Paris, Hermann, 1961-1964 (*Act. scient. et ind.*, 1293 et 1308; *Bourbaki*, 28 et 30).
- [2] COHN (P. M.). — An invariant characterization of pseudo-valuations on a field, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 50, 1954, p. 159-177.
- [3] REES (Daniel). — Valuations associated with ideals, II, *J. London math. Soc.* t. 31, 1956, p. 221-227.
- [4] REES (Daniel). — Valuations associated with a local ring, II, *J. London math. Soc.*, t. 31, 1956, p. 228-235.
- [5] SAMUEL (Pierre). — Some asymptotic properties of powers of ideals, *Annals of Math.*, Series 2, t. 56, 1952, p. 11-21.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1967.)

Lucien SZPIRO,  
Assistant à la Faculté des Sciences de Paris,  
43, rue Lacépède, 75-Paris, 5<sup>e</sup>.

---