BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD RAUZY

Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 197-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__197_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 197 à 208.

ALGÉBRICITÉ DES FONCTIONS MÉROMORPHES PRENANT CERTAINES VALEURS ALGÉBRIQUES

PAR

GÉRARD RAUZY.

Introduction. — Soient s un entier $\geqq 0$, $P_0, P_1, \ldots, P_s$ des polynômes combinaisons linéaires à coefficients entiers des polynômes binomiaux $z \mapsto \binom{z}{n}$. Si R est un nombre réel positif, désignons par $D(R)$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| > R$, et posons

$$F(z, x) = P_0(z)\, x^s + \ldots + P_s(z).$$

Supposons qu'il existe un nombre réel $R > 0$ et une fonction f de $D(R)$ dans $\mathbf{C}$ holomorphe et telle que

$$\forall\, z \in D(R), \qquad F(z, f(z)) = 0$$

(cette condition est vérifiée si les degrés des polynômes P_k satisfont certaines inégalités).

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N} \cap D(R)$, $P_0(n), \ldots, P_s(n)$ sont des entiers, non tous nuls si R est assez grand, et par conséquent $f(n)$ est un nombre algébrique.

Nous nous intéressons ici à la réciproque de ce résultat : nous cherchons à définir des ensembles de nombres algébriques tels que si une fonction f « méromorphe à l'infini » prend des valeurs dans un tel ensemble, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ assez grand, elle soit nécessairement algébrique et même appartienne à certains ensembles donnés de fonctions algébriques.

Plus précisément, à certains anneaux A munis d'une valeur absolue φ nous faisons correspondre des ensembles d'entiers algébriques sur ces anneaux notés $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ (γ nombre réel > 0) dont nous donnons une caractérisation et certaines propriétés.

Soit alors K un corps commutatif muni d'une valeur absolue non triviale notée $|\ \ |$, complet pour cette valeur absolue, et soit K' le corps $K\{x^{-1}\}$ des séries de Laurent formelles

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n x^{-n} \quad \text{où l'ensemble des } n \text{ tels que } u_n \neq 0 \text{ est minoré.}$$

K' est valué complet pour la valuation à l'infini v :

$$v\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n x^{-n}\right) = \inf\{n\in\mathbf{Z} \mid u_n \neq 0\}.$$

Si A est un sous-anneau de K, nous désignons par A' le sous-anneau de K' formé des éléments π de $K[x]$ tels que

$$\forall\, \alpha\in A, \quad \pi(\alpha)\in A.$$

Nous montrons que si le couple $(A, |\ \ |)$ satisfait aux conditions imposées dans la définition des ensembles $\mathcal{S}(A, |\ \ |, \gamma)$, il en est de même du couple $(A', |\ \ |_\infty)$ où $|\ \ |_\infty$ est la valeur absolue associée à la valuation à l'infini v (en posant par exemple $|f|_\infty = 2^{-v(f)}$).

On peut donc définir des ensembles homologues

$$S(A, \gamma) = \mathcal{S}(A, |\ \ |, \gamma) \qquad \text{et} \qquad S(A', \gamma) = \mathcal{S}(A', |\ \ |_\infty, \gamma)$$

d'éléments entiers algébriques respectivement sur les anneaux A et A'.

D'autre part, soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des $f\in K'$ « *méromorphes à l'infini* » c'est-à-dire tels que

$$\overline{\lim}\, |u_n|^{1/n} < \infty.$$

Si $f\in\mathfrak{M}$, $R \geq \overline{\lim}\, |u_n|^{1/n}$, $z\in D(R) = \{z\in K \mid |z| > R\}$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n z^{-n}$ est absolument convergente dans K, et nous désignons sa somme par $f(z)$.

Nous montrons le résultat suivant :

Soit $f\in\mathfrak{M}$ non constante, et soit γ irrationnel positif, il y a équivalence entre les conditions :

(i) $f\in S(A', \gamma)$;

(ii) $\exists\, R > 0$, $\forall\, \alpha\in D(R)\cap A$, $f(\alpha)\in$, $S(A, \gamma)$.

Dans le cas où $K = \mathbf{C}$ muni de la valeur absolue ordinaire, on peut prendre $A = \mathbf{Z}$, A' est bien dans ce cas l'anneau des polynômes combinaisons linéaires à coefficients entiers de polynômes binomiaux :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

Dans le cas général, les conditions imposées à A impliquent en particulier que c'est un ensemble discret pour la topologie associée à la valeur absolue sur K.

1. **Définition et propriétés des ensembles** $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$.

1.1. — Soit (A, φ) un couple formé d'un anneau commutatif A et d'une valeur absolue φ sur A, c'est-à-dire d'une fonction de A dans $\mathbf{R}^+$ telle que

$$\forall \alpha \in A, \qquad \varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0;$$
$$\forall \alpha \in A, \quad \forall \beta \in A, \qquad \varphi(\alpha + \beta) \leqq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta$$

et

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta).$$

Nous noterons, pour simplifier, $|\alpha| = \varphi(\alpha)$.

Un tel anneau est nécessairement intègre, et la valeur absolue se prolonge de manière unique à son corps de fractions K_0, au complété $K = \overline{K}_0$ de ce corps pour la valeur absolue φ et à la cloture algébrique $\hat{K}$ de K.

Nous imposerons à (A, φ) de satisfaire aux conditions suivantes :

(1) $\forall \alpha \in A, \ \alpha \neq 0 \Rightarrow |\alpha| \geqq 1$;

(2) La valeur absolue sur A n'est pas triviale;

(3) (lemme de Fatou). Si une série formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \in A[[X]]$$

représente de développement à l'origine d'une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$, où P et Q sont deux éléments de $K_0[X]$ premiers entre eux sur cet anneau, alors $\dfrac{1}{Q(0)} \times Q(X) \in A[X]$.

La condition (2) implique que l'anneau A contient un élément ξ tel que $|\xi| \neq 0$ ou 1. Tous les ξ^n $(n \geqq 1)$ sont alors distincts. L'anneau A contient une infinité d'éléments.

La condition (1) implique en outre que $|\xi| > 1$: *l'anneau A contient des éléments de valeur absolue aussi grande que l'on veut.*

Dans la condition (3), si l'on prend $u_n = 0$ pour $n \geqq 1$, $u_0 \neq 0$ (ce qui est possible d'après la remarque précédente), on peut prendre $P = u_0$, $Q = 1$. Donc $1 \in A$, *l'anneau A est unitaire.*

Soit $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$, où $\alpha, \beta \in A$, et supposons ρ entier algébrique sur A. $\exists\, s \geqq 1$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in A$ tels que

$$\rho^s = \alpha_1 \rho^{s-1} + \ldots + \alpha_s.$$

Si on pose $u_n = \beta^{s-1}\rho^n$, $u_n \in A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et

$$\sum_{n=0} u_n X^n = \frac{\beta^{s-1}}{1-\rho X},$$

donc $\rho \in A$, *l'anneau A est intégralement fermé dans son corps des quotients.* On montre que la condition (3) est vérifiée si l'anneau A est factoriel [3].

1.2. DÉFINITION. — *(A, φ) étant un couple satisfaisant aux conditions précédentes et γ étant un nombre réel strictement positif, nous désignerons par $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ l'ensemble des éléments θ de K entiers algébriques sur A tels que*

(*a*) $|\theta| > 1$;

(*b*) *Tous les conjugués de θ (autres que θ) par rapport à K_0 ont dans $\hat{K}$ une valeur absolue inférieure ou égale à $|\theta|^{-\gamma}$.*

En particulier, θ est séparable sur K_0.

Si nous posons $\mathcal{S}(A, \varphi) = \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$, les ensembles $\mathcal{S}(A, \varphi)$ apparaissent comme une généralisation de l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan ($A = \mathbf{Z}$, $\varphi =$ valeur absolue usuelle). De telles généralisations ont été étudiées dans le cas où A est l'anneau $F[x]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps F, la valeur absolue étant celle associée à la valuation à l'infini comme dans l'introduction, [1] et [5]. On peut également définir des ensembles analogues dans des produits indiciés par des ensembles de valeur absolue sur A [2].

On peut alors donner des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à $\mathcal{S}(A, \varphi)$ calquées, ainsi que leur démonstration, sur celles que donne C. PISOT dans le cas $A = \mathbf{Z}$, φ valeur absolue usuelle [6]. Nous utiliserons une caractérisation analogue de l'ensemble $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$.

THÉORÈME. — *Si $\theta \in K$ et $|\theta| > 1$, alors :*

$$\theta \in \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma) \iff \exists\, c > 0, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \inf_{\alpha \in A} |\theta^n - \alpha| < c\,|\theta|^{-n\gamma}.$$

Démonstration. — Supposons $\theta \in \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$, et soient $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_s$ les conjugués de θ par rapport à K_0. On a évidemment :

$$\theta^n = \sum_{\sigma=1}^{s} \theta_\sigma^n - \sum_{\sigma=2}^{s} \theta_\sigma^n = u_n + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \quad |\varepsilon_n| \leq (s-1)\,|\theta|^{-n\gamma},$$

$$u_n = \sum_{\sigma=1}^{s} \theta_\sigma^n, \qquad u_n \in K_0$$

les u_n étant des fonctions symétriques à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de $\theta_1, \ldots, \theta_s$, donc des polynômes à coefficients entiers en les coefficients $a_1, \ldots, a_s$

du polynôme $F(X) = X^s + a_1 X^{s-1} + \ldots + a_s$, irréductible sur K_0, dont θ est racine.

Pour montrer $u_n \in A$, il suffit de montrer que $a_1, \ldots, a_s$ appartiennent à A. Or θ est entier sur A, donc est racine d'un polynôme

$$G(X) = X^t - b_1^{t-1} \ldots - b_t$$

de $A[X]$ évidemment divisible dans $K_0[X]$ par F.

u_n vérifie donc la relation de récurrence $u_{n+t} = b_1 u_{n+t-1} + \ldots + b_t$.

Si $\delta \in A$ est un dénominateur pour $u_0, \ldots, u_{r-1}$, c'est-à-dire si $\delta u_k \in A$, $\forall\, k = 0, \ldots, r-1$ et $\delta \neq 0$, on aura donc $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \delta u_n \in A$.

La fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} \delta u_n X^n = \dfrac{\delta}{F(X)}$ satisfait aux conditions du lemme de Fatou, on a donc bien $F(X) \in A[X]$.

Dans l'autre sens, on peut toujours écrire :

$$\theta^n = u_n + \varepsilon_n \qquad \text{avec} \quad u_n \in A, \qquad |\varepsilon_n| < C|\theta|^{-n\gamma}.$$

Alors, en utilisant la condition (1), on montre que le déterminant de Kronecker :

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \ldots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

s'annule dès que n est assez grand, donc que la série $\sum u_n X^n$ représente le développement à l'origine d'une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ où P et Q sont deux éléments de $K_0[X]$ premiers entre eux et tels que $Q(0) = 1$.

Dans $\hat{K}[[X]]$, on a alors $\dfrac{P(X)}{Q(X)} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n = \dfrac{1}{1-\theta X}$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$ converge pour $|z| < |\theta|^{\gamma}$. θ est donc pôle simple de Q et les autres pôles (qui comprennent nécessairement les conjugués de θ sur K_0) ont une valeur absolue inférieure ou égale à $|\theta|^{-\gamma}$. Le lemme de Fatou assure d'autre part $Q \in A[X]$, ce qui termine la démonstration.

Remarque. — Sauf pour assurer dans A l'existence d'éléments distincts de 0, la condition (2) n'a pas été utilisée dans la démonstration de ce théorème : on voit facilement que les conditions (1) et (3) étant satisfaites ainsi que $A \neq \{0\}$, *la condition* (2) *est nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{S}(A, \varphi\, \gamma)$ *ne soit pas vide.*

1.3. — Donnons une propriété topologique des ensembles $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$.

Théorème. — $\forall\, \gamma > 0$, *les ensembles* $\mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ *sont discrets pour la topologie sur* K *associée à la valeur absolue* φ.

REMARQUE. — Les propriétés des ensembles $\mathcal{S}(A, \varphi)$ sont très différentes :

— si $A = \mathbf{Z}$, $\varphi =$ valeur absolue ordinaire, l'ensemble est fermé [7];

— si $A = F[x]$, $\varphi =$ valeur absolue associée à la valuation v, l'ensemble $\mathcal{S}(A, \varphi)$ est dense dans l'ensemble des éléments de x de valeur absolue > 1 [4].

Donnons tout d'abord un lemme :

LEMME. — *Tout élément de $\mathcal{S}(A, \gamma)$ est de degré $\leq 1 + \frac{1}{\gamma}$ sur K_0.*

En effet, si $\theta \in \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ a pour degré s sur K_0 et si $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_s$ sont ses conjugués sur K_0, on a

$$\forall\, k \geq 2, \qquad |\theta_k| \leq |\theta|^{-\gamma}, \qquad \text{d'où} \quad \prod_{k=1}^{s} |\theta_k| \leq |\theta|^{1-(s-1)\gamma},$$

mais $\prod_{k=1}^{s} \theta_k \in A$, comme on l'a vu au paragraphe précédent, et est non nul. En vertu de la condition (1) sur (A, φ), on a bien $1-(s-1)\gamma \geq 0$.

Démonstration du théorème. — Soit $\theta \in \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ de conjugués $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_s$. Posons

$$u_n = \sum_{k=1}^{s} \theta_k^n, \qquad \text{d'où} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad |\theta^n - u_n| \leq \frac{1}{\gamma} |\theta|^{-n\gamma} \qquad \text{et} \qquad u_n \in A.$$

Soit $r > 0$ et $\theta' \in \mathcal{S}(A, \varphi, \gamma)$ tel que $|\theta' - \theta| < r$. Soient $\theta'_1 = \theta'$, $\theta'_2, \ldots, \theta'_t$ les conjugués de θ' et $v_n = \sum_{k=1}^{t} \theta'^n_k$, d'où

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad |\theta'^n - v_n| \leq \frac{1}{\gamma} (|\theta| - r)^{-n\gamma},$$

d'où

$$|u_n - v_n| < r[|\theta|^{n-1} + \ldots + (|\theta| + r)^{n-1}] + \frac{1}{\gamma}(|\theta| - r)^{-n\gamma} + \frac{1}{\gamma}|\theta|^{-n\gamma},$$

soit

$$|u_n - v_n| < nr(|\theta| + r)^n + \frac{2}{\gamma}(|\theta| - r)^{-n\gamma}.$$

Soit M un entier tel que $\frac{2}{\gamma}\left(\frac{|\theta|+1}{2}\right)^{-M\gamma} < \frac{1}{2}$, si $r < \frac{|\theta| - 1}{2}$, on a

$$\forall\, n \geq M, \qquad |u_n - v_n| < nr\left(\frac{3|\theta| - 1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

Si maintenant N est un entier quelconque $> M$ et si

$$r < \min\left(\frac{|\theta| - 1}{2}, \frac{1}{2N}\left(\frac{3|\theta| - 1}{2}\right)^{-N}\right)$$

on aura

$$\forall\, n, \qquad M \leq n \leq N \;\Rightarrow\; |u_n - v_n| < 1 \;\Rightarrow\; u_n = v_n.$$

Mais la série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n - v_n)X^n$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur a un degré $\leq st$, c'est-à-dire $\leq \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^2$, si l'on suppose $N > M + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^2$; on a donc $u_n = v_n$, $\forall\, n \geq M$.

Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$ ont donc les mêmes pôles, et $\theta = \theta'$ (puisque un seul pôle a une valeur absolue > 1).

2. Les ensembles $S(A, \gamma)$ et $S(A', \gamma)$.

2.1. — Les notations étant les mêmes que dans l'introduction, nous supposerons que l'anneau A satisfait aux conditions (1), (2). (3) du paragraphe précédent (pour la valeur absolue $|\ \ |$).

Nous allons montrer que l'anneau A' satisfait aussi à ces trois conditions quand on prend sur A' une valeur absolue associée à la valuation v : par exemple, si $f \in A'$, on posera $|f|_\infty = 2^{-v(f)}$.

Les ensembles $S(A, \gamma)$ et $S(A', \gamma)$ seront, par définition, les ensembles $\mathcal{S}(A, |\ \ |, \gamma)$ et $\mathcal{S}(A', |\ \ |_\infty, \gamma)$.

2.2. — Montrons d'abord quelques lemmes.

Lemme (A). — *Soient $P \in K[x]$, u une fonction de A dans A, ε une fonction de A dans K telle que $|\varepsilon(\alpha)| \to 0$ quand $|\alpha| \to \infty$.*

Si $\forall\, \alpha \in A$, $P(\alpha) = u(\alpha) + \varepsilon(\alpha)$. alors $P \in A'$ et ε est nulle dès que $|\alpha|$ est assez grand.

Montrons ce lemme par récurrence sur le degré de P. Si le degré de P est nul, le résultat est évident en vertu de la condition (2) (il existe, dans A, des éléments de valeur absolue aussi grande que l'on veut) et de la condition (1) ($\varepsilon \in A$ et $|\varepsilon| < 1$ dès que α assez grand).

Supposons la proportion vraie pour tout polynôme de degré $\leq n$, soit P de degré $n + 1$ satisfaisant aux conditions du lemme.

Si $Q(x) = P(x + \alpha) - P(x)$, $\alpha \in A$, Q est de degré inférieur ou égal à n, on a

$$\forall\, \beta \in A,$$
$$Q(\beta) = P(\beta + \alpha) - P(\beta) = u(\alpha + \beta) - u(\beta) + \varepsilon(\alpha + \beta) - \varepsilon(\beta).$$

Quand $|\beta|\to\infty$, $|\alpha+\beta|\geqq|\beta|-|\alpha|\to\infty$, donc on peut appliquer le lemme à Q, et en particulier $Q(x)\in A'$.

Soit alors $\xi\in A$,

$$P(\xi)=P(\alpha+\xi)-Q(\xi)=u(\alpha+\xi)-Q(\xi)+\varepsilon(\alpha+\xi),$$

comme on pouvait faire le raisonnement précédent quel que soit α, et que lorsque $|\alpha|\to\infty$ il en est de même de $|\alpha+\xi|$, $P(\xi)$ est aussi proche que l'on veut d'un élément de A et, en vertu de la condition (1) sur $(A, |\ \ |)$, est dans A.

Donc $\forall\ \xi\in a$, $P(\xi)\in A$ c'est-à-dire $P\in A'$.

D'autre part, si $|\xi|$ est assez grand, $|\varepsilon(\xi)|<1$ et $\varepsilon(\xi)=P(\xi)-u(\xi)\in A$, donc $\varepsilon(\xi)=0$.

Lemme (B). — *Soit $f\in\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire $f\in K\{x^{-1}\}$ et méromorphe à l'infini), si $\exists\ R$ tel que $\forall\ \alpha\in D(R)$, $\alpha\in A\Rightarrow f(\alpha)\in A$, alors $f\in A'$.*

On peut en effet écrire

$$f=P+g \qquad \text{avec} \quad P\in K[X] \quad \text{et} \quad g\in\mathfrak{M}, \qquad v(g)\geqq 1.$$

Si on pose

$$u(\alpha)=f(\alpha) \qquad \text{pour} \quad \alpha\in A\cap D(R),$$
$$\varepsilon(a)=P(\alpha)-u(\alpha)=\text{n'importe quoi ailleurs.}$$

Pour $\alpha\in D(R)\cap A$, $u(\alpha)\in A$ et $\varepsilon(\alpha)=-g(\alpha)\to 0$ quand $|\alpha|\to\infty$. On peut appliquer le lemme précédent, d'où $P\in A'$ et $g(\alpha)=0$ dès que $|\alpha|$ est assez grand (et $\alpha\in A$).

Mais si g n'est pas nulle, $v(g)=m<\infty$ et, quand $|z|\to\infty$ $(z\in K)$, $|z|^m|g(z)|$ tend vers une limite finie non nulle. Comme il existe dans A des éléments de valeur absolue arbitrairement grande, il y aurait contradiction. On a donc $g=0$ et $f=P\in A'$.

2.3. — Nous pouvons alors montrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si $(A, |\ \ |)$ satisfait aux conditions* (1), (2), (3) *du premier paragraphe, il en est de même de $(A', |\ \ |_\infty)$.*

A' satisfait évidemment la condition (1) et la condition (2) (puisque $A\neq\{0\}$, $\exists\ \alpha\in A$, $\alpha\neq 0$, $\alpha x\in A'$).

Reste à montrer la condition (3). Soit K'_0 le corps des quotients de A' et soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,X^n\in A'[[X]]$ une série formelle représentant le développement d'une fraction rationnelle $\dfrac{P(x, X)}{Q(x, X)}$ de $K'_0(X)$, les polynômes P et Q étant premiers entre eux sur $K'_0[X]$.

Quitte à multiplier haut et bas par un élément de A', nous supposerons que $P(x, X)$ et $Q(x, X) \in A'[X]$. De même, nous écrirons l'identité de Bezont (valable dans $K'_0[X]$) avec des coefficients dans $A'[X]$ et A' :

$\exists$ $U(x, X)$ et $V(x, X) \in A'[X]$ tels que

$$W(x) = U(x, X)P(x, X) + V(x, X)Q(x, X)$$

soit un élément non nul de A'.

On a d'autre part $Q(x, X) = q_0(x) + q_1(x)X + \ldots + q_r(x)X^r$, et $q_0(x)$ est un élément non nul de A' (sinon P et Q ne seraient pas premiers entre eux).

Dès que $|\alpha|$ est assez grand, $(\alpha \in A)$, $W(\alpha)$ n'est pas nul. Les polynômes $P(\alpha, X)$ et $Q(\alpha, X)$ sont donc premiers entre eux sur $K_0[X]$ (K_0, corps des quotients de A), et le développement de la fraction $P(\alpha, X)/Q(\alpha, X)$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha)X^n \in A[[X]]$, on peut donc appliquer le lemme de Fatou dans $A[[X]]$. Il en résulte que, dès que $|\alpha|$ est assez grand, $(\alpha \in A)$, $q_0(\alpha) \neq 0$ et $\forall\, k = 1, \ldots, r$, $\dfrac{q_k(\alpha)}{q_0(\alpha)} \in A$, le lemme (B) du paragraphe précédent permet d'en déduire $\dfrac{q_k(x)}{q_0(x)} \in A'$, ce qui démontre le théorème.

3. **Démonstration du théorème principal.**

THÉORÈME. — *Si γ est irrationnel, il y a équivalence entre les conditions suivantes :*

(i) $f \in \mathfrak{M}$, *f non constante et, dès que* $\alpha \in A$ *est assez grand*, $f(\alpha) \in S(A, \gamma)$;
(ii) $f \in S(A', \gamma)$.

3.1. — Montrons tout d'abord que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Soit $f \in \mathfrak{M}$, f non constante convergeant au moins pour

$$z \in D(R) = \{ z \mid |z| > R \}$$

et telle que, $\forall\, \alpha \in D(R)$, $\alpha \in A \Rightarrow f(\alpha) \in S(A, \gamma)$.

Il est impossible que $v(f) \geq 0$. Sinon $f(z)$ convergerait quand $|z| \to \infty$ vers un élément de K [nul si $v(f) > 0$]. $S(A, \gamma)$ étant discret et A contenant des éléments de valeur absolue aussi grande que l'on veut, il en résulterait que f est constante sur $A \cap D(R)$, donc constante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons donc $v(f) = -r < 0$.

Quand $|z|\to\infty$, $\frac{f(z)}{z^r}$ tend vers une limite non nulle dans k, quitte à prendre R plus grand, nous supposerons $\forall\, z\in D(R)$, $|f(z)|>C|z|^r$, où $C>0$.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2, on peut écrire alors :

$$\forall\, \alpha\in A\cap D(R),\quad \forall\, n\geq 1,\qquad f(\alpha)^n=u_n(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha),$$

avec

$$u_n(\alpha)\in A,\qquad |\varepsilon_n(\alpha)|<\frac{1}{\gamma}(C|\alpha|^r)^{-n\gamma}.$$

D'autre part, f^n est la somme d'un polynôme P_n et d'une fonction méromorphe η_n telle que $v(\eta_n)>0$, on a donc

$$\forall\, z\in D(R),\qquad f(z)^n=P_n(z)+\eta_n(z)\qquad \text{et}\qquad \eta_n(z)\to 0\quad \text{quand } |z|\to\infty.$$
$$\forall\, \alpha\in A\cap D(R),\quad \forall\, n\geq 1,\qquad P_n(\alpha)=u_n(\alpha)+\varepsilon_n(\alpha)-\eta_n(\alpha).$$

D'après le lemme (A) du paragraphe 2.2, on en déduit $P_n\in A'$ et il existe R' tel que

$$\forall\, \alpha\in A\cap D(R'),\qquad \varepsilon_n(\alpha)=\eta_n(\alpha),\qquad \text{d'où}\quad |\eta_n(\alpha)|<\frac{1}{\gamma}(C|\alpha|^r)^{-n\gamma}$$

(R' dépend évidemment de n).

Par un raisonnement déjà fait (en vertu du fait que $\forall\, R''\ A\cap D(R'')\neq\emptyset$), il en résulte que

$$v(\eta_n)\geq rn\gamma\qquad \text{où}\quad r=-v(f).$$

On a donc

$$\forall\, n\geq 1,\qquad |f^n-P_n|_\infty\leq|f|_\infty^{-n\gamma},$$

et d'après le théorème du paragraphe 1.2, on en déduit $f\in S(A',\gamma)$.

3.2. — Réciproquement (ii) $\Rightarrow$ (i).

Évidemment, si $f\in S(A',\gamma)$, on a $v(f)<0$, donc f n'est pas constante.

D'autre part, les considérations classiques sur le polynôme de Newton montrent que $f\in S(A',\gamma)$ si, et seulement si, f est l'unique racine de valuation négative d'un polynôme $F(X)$, où

$$F(X)=X^s+Q_1X^{s-1}+\ldots+Q_s,\qquad Q_1,\ldots,Q_s\in A;$$
$$\deg Q_1>0,\qquad \deg Q_k\leq(1+\gamma-\gamma k)\deg Q_1\qquad \text{pour}\quad k=2,\ldots,s.$$

γ étant par hypothèse irrationnel, on peut remplacer les inégalités, sur $\deg Q_k$, par des inégalités strictes : si l'on pose

$$\gamma_0 = \sup \{ \rho \in \mathbf{R} \mid \forall\, k = 2, \ldots, s;\ \deg Q_k \leqq (1 + \rho - \rho k) \deg Q_1 \},$$

on a $\gamma_0 > \gamma$.

La méthode classique des séries majorantes montre que les développements formels en série de $\left(\frac{1}{z}\right)^{1/d}$ que l'on peut obtenir pour les racines d'une équation algébrique convergent pour $|z|$ assez grand. Il en résulte, en particulier, que f est méromorphe à l'infini, et, comme $v(f) < 0$, que, pour $|z|$ grand, $|f(z)| > 1$. De même, les autres racines de l'équation,

$$X^s + Q_1(z)\, X^{s-1} + \ldots + Q_s(z) = 0,$$

ont des valeurs absolues bornées supérieurement dès que $|z|$ assez grand par

$$\frac{C}{|z|^{-\gamma_0 v(f)}} \leqq \frac{C'}{|f(z)|^{\gamma_0}}$$

et, pour $|z|$ grand,

$$\frac{C'}{|f(z)|^{\gamma_0}} < \frac{1}{|f(z)|^{\gamma}}.$$

D'autre part, si $\alpha \in A$ et $|\alpha|$ grand, $f(\alpha)$ vérifie l'équation

$$f(\alpha)^s + Q_1(\alpha)\, f(\alpha)^{s-1} + \ldots + Q_s(\alpha) = 0$$

à coefficients dans A, $f(\alpha)$ est donc entier algébrique sur A et les autres conjugués sont aussi racines de cette équation (qui n'est pas nécessairement irréductible), donc ont une valeur absolue $\leqq |f(\alpha)|^{-\gamma}$ ce qui implique $f(\alpha) \in S(A, \gamma)$.

Remarque. — Si γ était rationnel, on concluerait que les conjugués de $f(\alpha)$ ont une valeur absolue $\leqq C|f(\alpha)|^{-\gamma}$, donc $f(\alpha) \in S(A, \gamma')$ avec $\gamma' < \gamma$ aussi proche qu'on le veut de γ dès que α est assez grand en valeur absolue.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bateman (P. T.) and Duquette (A. L.). — The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, *Illinois J. of Math.*, t. 6, 1962, p. 594-606.

[2] Bertrandias (Françoise). — Ensembles remarquables d'adèles algébriques, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire n° 4, 1965, 98 pages (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1965).

[3] Dress (François). — *Familles de séries formelles et ensemble de nombres algébriques* (*Thèse Sc. math.*, Paris) [à paraître].

[4] Grandet-Hugot (Marthe). — Une propriété des « nombres de Pisot » dans un corps de séries formelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, série A, p. 39-41.

[5] Grandet-Hugot (Marthe). — Nombre de Pisot dans un corps de séries formelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 8e année, 1966-1967, no 4, 12 pages.

[6] Pisot (Charles). — La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1938).

[7] Salem (Raphaël). — A remarkable class of algebraic integers, proof of a conjecture of Vijayaraghavan, *Duke math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108.

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1967.)

Gérard Rauzy,
Faculté des Sciences de Marseille,
1, place Victor-Hugo,
13-Marseille, 3e.