BULLETIN DE LA S. M. F.

T. MATSUZAWA

Sur les équations quasi-elliptiques et les classes de Gevrey

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 243-263
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__243_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 243 à 263.

SUR LES ÉQUATIONS QUASI-ELLIPTIQUES ET LES CLASSES DE GEVREY

PAR

TADATO MATSUZAWA.

0. Introduction.

Dans un travail à paraître [8] nous avons étudié les problèmes au bord pour les équations quasi-elliptiques,

$$(0.1) \qquad P(x, D)u = f \qquad \text{dans} \quad x_n > 0.$$

$$(0.2) \qquad Q_j(x', D) = g_j \qquad \text{sur} \quad x_n = 0, \qquad 1 \leq j \leq \nu,$$

où $P(x, D)$ est un opérateur quasi-elliptique et $\{ Q_j(x', D) \}_{j=1}^{\nu}$, $(x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}))$ est un système des opérateurs au bord vérifiant la condition complémentaire à l'origine $\{ O \}$. Dans [8], nous avons déduit l'inégalité de la forme

$$(0.3) \qquad \| v \|_m \leq C \left(\| P(x, D) v \|_0 + \sum_{j=1}^{\nu} | Q_j(x', D) v |_{s_j} + \| v \|_0 \right),$$

pour $v \in C_0^\infty(S_\delta)$, $S_\delta = \{ | x | < \delta ; x_n \geq 0 \}$ (théorème 1.1).
Puis, comme application de cette inégalité, la régularité des solutions de (0.1) et (0.2) a été démontrée.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème 1.2, c'est-à-dire que nous démontrons, dans le § 4 les estimations plus précises des dérivées successives pour les solutions des problèmes au bord (0.1) et (0.2).

CAVALLUCCI [2] a étudié le même problème pour les opérateurs quasi-elliptiques avec la condition au bord de Dirichlet. D'autre part, VOLEVIČ [13] a démontré la régularité et les estimations intérieures des dérivées successives pour les solutions des systèmes quasi-elliptiques. Pour l'effectuer, il a travaillé précisément sur les normes fractionnaires introduites par SLOBODECKIJ [12].

Nous prenons [2] pour modèle de la démonstration, mais il est nécessaire d'utiliser quelques résultats de VOLEVIČ [13] sur les normes fractionnaires pour traiter les conditions au bord générales (0.2).

Dans le § 1, nous rappelons la définition des opérateurs quasi-elliptiques. Dans le § 2, nous énumérons les résultats de VOLEVIČ [13] que nous utiliserons dans la suite. Dans le § 3, nous démontrons quelques lemmes pour préparer la démonstration du théorème 1.2 (dans le § 4).

Dans le § 5, nous faisons une remarque sur l'estimation pour l'opérateur itéré.

1. Rappels sur les opérateurs quasi-elliptiques et le résultat.

Désignons par $(x, y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ le point générique de R^n. Les demi-espaces $y > 0$ et $y \geq 0$ sont notés par $\overline{R^n_+}$ et par R^n_+ respectivement. Nous utiliserons la notation familière :

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \leq j \leq n-1, \qquad D_n = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (i^2 = -1),$$
$$D = (D_1, \ldots, D_n), \qquad D^\alpha = D^{\alpha_1} \ldots D^{\alpha_n},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice avec des entiers $\alpha_j \geq 0$;

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!.$$

Un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients constants, s'écrit sous la forme

$$P(D) = P(D_x, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \tag{1.1}$$

où les coefficients a_α sont complexes. Le polynôme caractéristique correspondant s'écrit

$$P(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{\alpha'} \eta^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \eta^{\alpha_n},$$

où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$. Étant donné un système d'entiers $\{m_j\}_{j=1}^n$, nous posons

$$m = \max_{1 \leq j \leq n} m_j, \qquad q_j = \frac{m}{m_j} \quad (\geq 1), \qquad q = (q_1, \ldots, q_n),$$

et

$$\langle \alpha, q \rangle = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n.$$

DÉFINITION 1.1. — Un opérateur $P(D)$ est dit *quasi-elliptique* de poids q s'il satisfait aux conditions suivantes :

$$P(D) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leqq m} a_\alpha D^\alpha. \tag{1.2}$$

La partie principale de P, par rapport au poids q, est

$$P^0(D) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle = m} a_\alpha D^\alpha.$$

Pour le polynôme caractéristique $P^0(\xi, \eta) = P^0(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta)$, il y a une constante C (¹) telle que

$$\sum_{1 \leqq j \leqq n-1} |\xi_j|^{m_j} + |\eta|^{m_n} \leqq C|P^0(\xi, \eta)| \quad \text{pour tout } (\xi, \eta) \in R^n. \tag{1.3}$$

Désignons par $\zeta_1(\xi), \ldots, \zeta_{m_n}(\xi)$ les racines de $P^0(\xi, \zeta) = 0$, à chaque point $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$ $(\neq 0)$. Dans le cas $n > 2$, nous voyons [condition (1.3)] que le nombre ν des racines à partie imaginaire positive est indépendant de ξ $(\neq 0)$, et dans ce cas, nous appelons $P(\xi, \eta)$ [et $P(D)$] « determined type ν ». Dans le cas $n = 2$, nous supposons remplie cette condition sur le nombre des racines de $P^0(\xi, \zeta)$. Par « réarrangement », s'il est nécessaire, nous pouvons supposer que

$$\operatorname{Im} \zeta_k(\xi) > 0, \qquad 1 \leqq k \leqq \nu, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Im} \zeta_k(\xi) < 0, \qquad \nu < k \leqq m_n. \tag{1.5}$$

Nous posons

$$P_+^0 = \prod_{k=1}^{\nu} (\eta - \zeta_k(\xi)).$$

De même, nous considérons des opérateurs au bord de la forme

$$Q_j(D) = \sum_{\langle\beta, q\rangle \leqq p_j} b_\beta D^\beta, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \qquad 0 \leqq p_j \leqq m - q_n. \tag{1.6}$$

Le polynôme correspondant à chaque $Q_j^0(D)$ est

$$Q_j^0(\xi, \eta) = \sum_{\langle\beta, q\rangle = p_j} b_\beta \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_{n-1}^{\beta_{n-1}} \eta^{\beta_n}.$$

DÉFINITION 1.2 (*Condition complémentaire*). — Nous disons que le système $\{Q_j(D)\}_{j=1}^{\nu}$ recouvre $P(D)$, si $Q_j^0(\xi, \eta)$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ sont

(¹) Dans la suite, nous utiliserons le même symbole C pour exprimer plusieurs constantes.

linéairement indépendants modulo $P_+^0(\xi, \eta)$ comme polynômes en η pour chaque $\xi \in R^{n-1}$ ($\neq 0$).

Soit Ω un domaine dans R_+^n, et supposons que sa frontière contient un ouvert $\omega(\ni 0 = (0, \ldots, 0))$ dans l'hyperplan $y = 0$. Nous considérons les opérateurs à coefficients variables

$$(1.7) \qquad P(x, y, D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} a_\alpha(x, y) D^\alpha,$$

où $a^\alpha(x, y) \in C^\infty(\Omega \cup \omega)$ pour tout α et

$$(1.8) \qquad Q_j(x, D) = \sum_{\langle \beta, q \rangle \leq p_j} b_\beta(x) D^\beta,$$

où $b_\beta(x) \in C^\infty(\omega)$ pour tout β.

Nous supposons que $P(0, 0, D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} a_\alpha(0, 0) D^\alpha$ soit un opérateur quasi-elliptique de poids q, du « determined type ν » et que $\{ Q_j(0, D) \}_{j=1}^{\nu}$ recouvre $P(0, 0, D)$.

Or, désignons par $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ l'ensemble des fonctions $v(x)$ indéfiniment différentiables dans $\overline{R_+^n}$ et à support compact sur $\overline{R_+^n}$. On désigne par $\hat{v}(\xi, y)$ la transformée de Fourier de $v(x, y) \in C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ par rapport à $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$,

$$\hat{v}(\xi, y) = (2\pi)^{\frac{-(n-1)}{2}} \int_{R^{n-1}} e^{-i\langle \xi, x \rangle} v(x, y)\, dx.$$

Comme d'habitude, nous posons

$$\| v \| = \left(\iint_{R_+^n} | v(x, y) |^2 \, dx\, dy \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \int_{|\xi| < \infty} | \hat{v}(\xi, y) |^2 \, d\xi\, dy \right)^{1/2}.$$

Correspondant aux opérateurs (1.2) et (1.6), nous employons les normes à la frontière

$$(1.9) \qquad [v]_p = \left(\left(\int_{|\xi| < \infty} (1 + |\xi_1|^{m_1} + \ldots + |\xi_{n-1}|^{m_{n-1}} \right)^{2p/m} | \hat{v}(\xi, 0) |^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

Alors, nous avons démontré dans [8] le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soient $P(x, y, D)$ et $Q_j(x, D)$, $j = 1, \ldots, \nu$, les opérateurs ci-dessus, et supposons que $\{ Q_j(0, D) \}_{j=1}^{\nu}$ recouvre $P(0, 0, D)$. Alors, il existe deux constantes $C > 0$ et $R_0 > 0$ telles que*

$$(1.10) \qquad \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} \| D^\alpha v \| \leq C \left(\| P(x, y, D) v \| + \sum_{j=1}^{\nu} [Q_j(x, D) v]_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n} + \| v \| \right),$$

pour tout $v \in C_0^\infty(S_{R_0})$, où $S_{R_0} = \{ (x, y) \mid \sqrt{|x|^2 + y^2} < R_0,\ y \geq 0 \}$.

DÉFINITION 1.3. — Soit Ω le domaine ci-dessus. On dit qu'une fonction $u \in C^\infty(\Omega \cup \omega)$ appartient à $G_q(\Omega \cup \omega)$ si, pour chaque compact K de $\Omega \cup \omega$, il y a une constante C telle que

$$\|D^\alpha u, K\|_{L^\infty} \leqq C^{|\alpha|+1} |\alpha|^{\langle\alpha, q\rangle}, \tag{1.11}$$

ou, de façon équivalente,

$$\|D^\alpha u, K\|_{L^\infty} \leqq C^{|\alpha|+1} |\alpha|^{\langle\alpha, q\rangle} \tag{1.12}$$

pour tout α, où $\|w, K\|_{L^\infty}$ est le maximum de $|w|$ dans K.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Soient $P(x, y, D)$, $Q_j(x, D)$, $j = 1, \ldots, \nu$, comme au théorème* 1.1, *avec les coefficients $a_\alpha(x, y) \in G_q(\Omega \cup \omega)$ et $b_\beta(x) \in G_{q'}(\omega)$, $q' = (q_1, \ldots, q_{n-1})$. Considérons le problème au bord.*

$$P(x, y, D)u = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.13}$$

$$Q_j(x, D)u = g_j \quad \text{sur } \omega, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \tag{1.14}$$

avec $f(x, y) \in G_q(\Omega \cup \omega)$ et $g_j(x) \in G_{q'}(\omega)$, $j = 1, \ldots, \nu$. Alors, chaque fonction $u \in C^\infty(\Omega \cup \omega)$, qui vérifie (1.13) *et* (1.14), *est une fonction de la classe $G_q(S_{R_1})$ pour $R_1 > 0$ convenablement choisi suivant u.*

2. **Norme fractionnaire : Résultats de Volevič** [13].

Nous introduisons quelques espaces fractionnels, suivant [13]. Soit $V_R = \prod_{k=1}^{n} I_k$ un rectangle dans R^n, où $I_k = (-R, R)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $I_n = (0, R)$, $0 < R \leqq 1$. Pour $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, β_i entiers $\geqq 0$, et pour $u(x) \in C^\infty(V_R)$, nous posons

$$\|D^\beta u, V_R\| = \left(\int_{V_R} |D^\beta u|^2 \, dx\, dy\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Supposons que tous les composants de $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, sauf le $k^{\text{ième}}$, soient entiers $\geqq 0$, alors nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\alpha = \beta + \lambda l_k, \tag{2.2}$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ avec β_j entiers $\geqq 0$, $l_k = (0, \ldots, \overset{\overset{k}{\vee}}{1}, \ldots, 0)$ et $0 < \lambda < 1$. Et nous posons, pour un tel α,

$$\|D^\alpha u, V_R\| = \left(\int_{V_R}\int_{I_k} \frac{|D^\beta u(Z) - D^\beta u(\tau)|^2}{|Z_k - \tau_k|^{1+2\lambda}} \, d\tau_k \, dZ\right)^{1/2}, \tag{2.3}$$

où $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $\tau = (Z_1, \ldots, Z_{k-1}, \tau_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_n)$.

Désignons par $A_{s,q}$ l'ensemble des $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dont tous les composants sont entiers sauf au plus un, vérifiant

$$(2.4) \qquad \langle \alpha, q\rangle = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n = s.$$

Introduisons la semi-norme suivante :

$$(2.5) \qquad \| u, V_R \|_{s,q} = \Big(\sum_{\alpha \in A_{s,q}} \| Du, V_R \|^2 \Big)^{1/2}.$$

LEMME 2.1 (*cf.* [12], [13]). — *Il existe une constante* $C=C(s)$, $(s \geqq 0)$, *telle que*

$$(2.6) \qquad C^{-1} \int_{R^n} (|\xi_1|^{m_1} + \ldots + |\eta|^{m_n})^{\frac{2s}{m}} |\hat{u}(\xi, \eta)|^2 \, d\xi \, d\eta$$
$$\leqq \| u, R^n \|_{s,q}^2 \leqq C \int_{R^n} (|\xi_1|^{m_1} + \ldots + |\eta|^{m_n})^{\frac{2s}{m}} |\hat{u}(\xi, \eta)|^2 \, d\xi \, d\eta$$

pour toute $u(x) \in C_0^\infty(R^n)$.

DÉFINITION 2.1. — Soit s réel $\geqq 0$. Nous désignons par $W^{s,q}(V_R)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(V_R)$ qui vérifient $\| u, V_R \|_{s,q} < \infty$. Nous munirons $W^{s,q}(V_R)$ de la norme

$$(2.7) \qquad |[u, V_R]|_{s,q}^2 = \| u, V_R \|_{s,q}^2 + \| u, V_R \|_0^2.$$

LEMME 2.2 (*cf.* [13]). — *Étant donnée* $u \in W^{s,q}(V_R)$, *il y a une extension* u_1 *de* u *dans* $W^{s,q}(R^n)$ *telle que*

$$(2.8) \qquad |[u_1, R^n]|_{s,q} \leqq C |[u, V_R]|_{s,q},$$

où la constante C *ne dépend pas de* $u \in W^s(V_R)$ *et de* R $(0 < R \leqq 1)$ *(elle ne dépend que de* s*).*

Ensuite, si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont entiers, nous posons pour $a \in C^\infty(V_R)$,

$$(2.9) \qquad |D^\beta a, V_R| = \max_{V_R} |D^\beta a|,$$

et si $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est écrit sous la forme (2.2), nous posons

$$(2.10) \qquad |D^\alpha a, V_R| = \max_{Z \in V_R} \Big(\int_{I_k} \frac{|D^\beta a(Z) - D^\beta a(\tau)|^2}{|Z_k - \tau_k|^{1+2}} \, d\tau_k \Big)^{1/2},$$

où $Z=(Z_1, \ldots, Z_n)$, $\tau=(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, \tau_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_n)$.
Introduisons la semi-norme suivante :

$$(2.11) \qquad |a, V_R|_{s,q} = \Big(\sum_{\alpha \in A_{s,q}} |D^\alpha a, V_R|^2 \Big)^{1/2}.$$

LEMME 2.3 (*cf.* [13]). — *Pour* $a \in C^\infty(V_R)$, $u \in C^\infty(V_R)$, $s = \dfrac{N}{2m_1 \ldots m_n}$, *N entier* $\geqq 0$, *on a l'inégalité suivante :*

$$(2.12) \qquad \| au, V_R \|_{s,q} \leqq C \sum_{k=0}^{s} | a, V_R |_k \| u, V_R \|_{s-k},$$

avec la constante C indépendante de a, u et de R ($0 < R \leqq 1$), *où le signe* $\sum\limits_{k=0}^{s}$ *signifie la somme pour tout nombre rationnel de la forme* $k = \dfrac{N'}{2m_1 \ldots m_n}$ *avec N' entier entre* 0 *et N.*

LEMME 2.4 (*cf.* [13]). — *Soit* $a \in G_q(V_R)$ (*pour la définition de* G_q, *voir définition* 1.3) *et soit* k_0 *un nombre* $\geqq 0$ *quelconque. Il existe une constante C telle que*

$$(2.13) \qquad | D^\alpha a, V_R |_{k_0, q} \leqq C^{|\alpha|+1} | \alpha |^{\langle \alpha, q \rangle}$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

De l'inégalité (2.13), on obtient

$$(2.14) \qquad \delta^{\langle \alpha, q \rangle} | D^\alpha a, V_{R-j\delta} |_{k_0, q} \leqq C^{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{j} \right)^{|\alpha|}$$

pour $|\alpha| \leqq j$, si $\delta > 0$ et $R - j\delta > 0$.

LEMME 2.5 (*cf.* [13]). — *Soit* $u \in G_q(\overline{V}_R)$ *et soit* k_0 *un nombre* $\geqq 0$ *quelconque. Il y a une constante C telle que*

$$(2.15) \qquad \| D^\alpha u, V_R \|_{k_0, q} \leqq C^{|\alpha|+1} | \alpha |^{\langle \alpha, q \rangle}$$

pour tout α.

De l'inégalité (2.15), on obtient

$$(2.16) \qquad \delta^{\langle \alpha, q \rangle} \| D^\alpha u, \overline{V}_{R-j\delta} \|_{k_0, q} \leqq C^{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{j} \right)^{|\alpha|}$$

pour $|\alpha| \leqq j$, si $\delta > 0$, $R - j\delta > 0$.

LEMME 2.6 (*cf.* [13]). — *Soit R,* δ *réels,* $0 < R$, $\delta \leqq 1$. *Il y a des fonctions* $\psi = \psi_{R,\delta} \in C_0^\infty(V_{R+\delta})$ *telles que* $\psi_{R,\delta} \equiv 1$ *sur* V_R *et*

$$(2.17) \qquad | \psi_{R,\delta}, V_{R+\delta} |_{k,q} \leqq C(k) \delta^{-k},$$

où la constante $C(k)$ *ne dépend que de k.*

3. Quelques lemmes.

Dans la suite, soient $P(x, y, D)$ et $Q_j(x, D)$, $j = 1, \ldots, \nu$, comme au théorème 1.2; nous pouvons considérer que les coefficients de chaque $Q_j(x, D)$ sont définis dans V_R, et $V_R \subset \Omega \cup \omega$. Écrivons par U_R la frontière de V_R dans le plan $y = 0$.

LEMME 3.1. — *Il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$(3.1)\qquad \sum_{\substack{k \leqq m \\ k = \frac{N'}{2m_1 \dots m_n}}} \| v, V_R \|_k \varepsilon^k \leqq C \left\{ \varepsilon^m \| P(x, y, D) v, V_R \| + \| v, V_R \| + \varepsilon^m \sum_{j=1}^{\nu} [Q_j(x, D) v]_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n} \right\}$$

pour toute $v \in C_0^\infty(V_R \cup U_R)$, $0 < R \leqq R_0$ *(R_0 est donné dans le théorème* 1.1).

Démonstration. — Nous voyons qu'il y a une constante C' telle que, si $k \leqq m$, $k = \dfrac{N'}{2m_1 \dots m_n}$, N' entier $\geqq 0$.

$$(3.2)\qquad \left(\sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{m_j} + |\eta|^{m_n} \right)^{\frac{k}{m}} \varepsilon^k \leqq C' \left\{ \varepsilon^m \left(\sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^{m_j} + |\eta|^{m_n} \right) + 1 \right\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, $0 \leqq k \leqq m$ et $(\xi, \eta) \in R^n$.

Nous étendons $v(x, y) \in C_0^\infty(V_R \cup U_R)$ dans l'espace entier R^n, comme habituellement, en posant

$$v_1(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & y \geqq 0; \\ \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k v(x, -ky), & y < 0, \end{cases}$$

où λ_k sont choisis de sorte que toutes les dérivées $D_y^j v (0 \leqq j \leqq m_n - 1)$ soient continues en $y = 0$. Ici, les λ_k ne dépendent que de m_n. Nous voyons que, pour $k \leqq m$,

$$(|\xi_1|^{m_1} + \dots + |\eta|^{m_n})^{\frac{k}{m}} \hat{v}_1(\xi, \eta) \in L^2(R^n),$$

et, de l'inégalité (3.2), on a l'inégalité

$$(3.3)\qquad \sum_{\substack{k \leqq m \\ k = \frac{N'}{2m_1 \dots m_n}}} \| v, \overline{R_+^n} \|_k \varepsilon^k \leqq C'' \left\{ \varepsilon^m \sum_{j=1}^{n} \| D_j^{m_j} v, \overline{R_+^n} \| + \| v, \overline{R_+^n} \| \right\}$$

pour une constante C'', indépendante de $\varepsilon > 0$ et de $v \in C_0^\infty(V_R \cup U_R)$. Nous appliquons l'inégalité (1.10) et lemme 2.1, et nous obtenons le lemme 3.1.

Dans l'inégalité (3.1), nous pouvons remplacer les termes

$$[Q_j(x, D)v]_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n} \quad \text{par} \quad \| Q_j(x, D)v(x, 0),\ U_R \|_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n, q'};$$

et notons, ici pour $u \in C^\infty(U_R)$,

$$\| u,\ U_R \|_{k, q'} = \left(\sum_{\alpha \in A'_{k, q'}} \| D^\alpha u,\ U_R \|^2 \right)^{1/2}, \tag{3.4}$$

où $q' = (q, \ldots, q_{n-1})$, et où $A'_{k, q'}$ est l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ analogue à $Z_{k, q}$ défini dans le § 2.

LEMME 3.2. — *Il existe une constante C, telle que*

$$\sum_{\substack{k \leq m \\ k = \frac{N'}{2m_1 \ldots m_n}}} \| u,\ V_{R-r} \|_k \varepsilon^k \tag{3.5}$$

$$\leq C \left\{ \varepsilon^m \| P(x, y, D)u,\ V_{R-r+\delta} \| + \| u,\ V_{R-r+\delta} \| \right.$$

$$+ \varepsilon^m \delta^{-m} \sum_{\substack{k < m \\ k = \frac{N'}{2m_1 \ldots m_n}}} \delta^{m-k} \| u,\ V_{R-r+\delta} \|_{m-k}$$

$$\left. + \varepsilon^m \sum_{j=1}^{\nu} \| \psi_{R-r, \delta} Q_j(x, D)u,\ U_{R-r+\delta} \|_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n} \right\},$$

où $0 < r\ \ \delta < R$, $R - r + \delta > 0$, $R < R_0$ *et* $u \in C^\infty(\overline{V}_R)$ (N' *entiers* ≥ 0). *La constante C ne dépend pas de* ε, r, δ, R *et de* u.

Démonstration. — Prenons $\psi = \psi_{R-r, \delta}$ introduite dans le lemme 2.6. Nous substituons $v = \psi u$ dans l'inégalité (3.1). Alors on a

$$\sum_{\substack{k \leq m \\ k = \frac{N'}{2m_1 \ldots m_n}}} \| u,\ V_{R-r} \|_k \varepsilon^k \tag{3.6}$$

$$\leq \sum_{k \leq m} \| \psi u,\ V_{R-r+\delta} \|_k \varepsilon^k$$

$$\leq C \left\{ \varepsilon^m \| P(x, y, D)(\psi u),\ V_{R-r+\delta} \| + \| \psi u,\ V_{R-r+\delta} \| \right.$$

$$\left. + \varepsilon^m \sum_{j=1}^{\nu} \| Q_j(x, D)(\psi u),\ U_{R-r+\delta} \|_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n, q} \right\}.$$

Nous étudions d'abord le premier terme à droite. De la formule de Leibniz,

$$P(x, y, D)(\psi u) = \psi P(x, y, D) u + \sum_{\beta \neq 0} \frac{D^\beta \psi}{\beta !} P^{(\beta)}(x, y, D) u,$$

où

$$P^{(\beta)}(x, y, \xi, \eta) = \frac{\partial^{\beta'}}{\partial \xi^{\beta'}} \cdot \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial \eta^{\beta_n}} P(x, y, \xi, \eta),$$

grâce à la propriété de ψ, on a

$$\| D^\beta \psi P^{(\beta)}(x, y, D), V_{R-r+\delta} \| \leqq C' \delta^{-|\beta|} \| P^{(\beta)}(x, y, D) u, V_{R-r+\delta} \|.$$

D'autre part, si $\langle \alpha, q \rangle \leqq m$ et si $\beta \leqq \alpha$, c'est-à-dire $\beta_i \leqq \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, alors il y a une autre constante C'' telle que

$$| \xi^{\alpha' - \beta'} \eta^{\alpha_n - \beta_n} | \leqq C'' (1 + | \xi_1 |^{m_1} + \ldots + | \eta |^{m_n})^{\frac{m - \langle \beta, q \rangle}{m}}$$
pour tout $(\xi, \eta) \in R^n$,

donc, par les lemmes 2.1, 2.2, nous avons l'inégalité

$$\| P^{(\alpha)}(x, y, D) u, V_{R-r+\delta} \| \leqq C''' (\| u, V_{R-r+\delta} \|_{m - \langle \alpha, q \rangle} + \| u, V_{R-r+\delta} \|),$$

avec une constante C''' indépendante de r, δ, R et de u.

D'où

$$\begin{aligned} (3.7) \qquad & \| P(x, y, D)(\psi u), V_{R-r+\delta} \| \\ & \leqq C_1 \Big\{ \| P(x, y, D) u, V_{R-r+\delta} \| \\ & \qquad + \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leqq m} \delta^{-|\alpha|} \| u, V_{R-r+\delta} \|_{m - \langle \alpha, q \rangle, q} \Big\}, \end{aligned}$$

avec une constante C_1 indépendante de r, δ, R $(0 < r, \delta < R, R - r + \delta > 0, R < R_0)$ et de $u \in C^\infty(V_{R_0} \cup U_{R_0})$.

Il est clair que

$$(3.8) \qquad \| \psi u, V_{R-r+\delta} \| \leqq \| u, V_{R-r+\delta} \|.$$

Nous étudions maintenant le dernier terme de (3.6). On voit que

$$\begin{aligned} & \| Q_j(x, D)(\psi u), U_{R-r+\delta} \|_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n, q'} \\ & \leqq \| \psi Q_j(x, D) u, U_{R-r+\delta} \|_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n, q'} \\ & \quad + \sum_{\alpha \neq} \left\| \frac{D^\alpha \psi}{\alpha !} Q_j^{(\alpha)}(x, D) u, U_{R-r+\delta} \right\|_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n, q'}. \end{aligned}$$

Dans le deuxième membre de cette inégalité, nous avons les estimations (obtenues dans [8]) :

$$(3.9)\qquad \left\| \frac{D^\alpha \psi}{\alpha!} Q_j^{(\alpha)}(x, D)u,\ U_{R-r+\delta} \right\|_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n, q'} \leq C_2 \| D^\alpha \psi Q_j^{(\alpha)}(x, D)u,\ V_{R-r+\delta} \|_{m-P_j, q},$$

où la constante C_2 ne dépend pas de R, r, δ ($0 < r$, δ, $R - r + \delta > 0$, $R < R_0$) et de u. En remarquant que

$$| Q_j^{(\alpha)}(x, \xi, \eta) | \leq C_3 \left\{ 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} | \xi_j |^{m_j} + | \eta |^{m_n} \right)^{\frac{P_j - \langle \alpha, q \rangle}{m}} \right\},$$

d'après la propriété de ψ et en utilisant les lemmes 2.1, 2.2, 2.3, nous avons

$$(3.10)\qquad \left\| \frac{D^\alpha \psi}{\alpha!} Q_j^{(\alpha)}(x, D)u,\ V_{R-r+\delta} \right\|_{m-P_j, q} \leq C_4 \sum_{\substack{k \leq m - P_j \\ k = \frac{N'}{2m_1 \dots m_n}}} \delta^{-|\alpha| - k} \| u,\ V_{R-r+\delta} \|_{m - \langle \alpha, q \rangle - k, q}.$$

Compte tenu de (3.7), (3.8) et (3.10), nous obtenons le lemme 3.2.

Introduisons les deux notations suivantes :

$$(3.11)\qquad N_{k,R}(u) = \sup_{0<r<R} r^k \| u,\ V_{R-r} \|_{k,q}, \qquad k \geq 0, \qquad u \in C^\infty(V_R),$$

$$M_{j,k,R}(u) = \sup_{0<r<R} r^k \| \psi_{r,\delta} u,\ U_{R-r+\delta} \|_{m-P_j-\frac{1}{2}q_n, q'},$$

$$\delta = \frac{r}{2}, \qquad u \in C^\infty(U_R).$$

LEMME 3.3. — *Il y a une constante C telle que*

$$(3.12)\qquad \sum_{\substack{k \leq m \\ k = \frac{N}{2m_1 \dots m_n}}} N_{k,R}(u) \leq C \left\{ N_{m,R}(P(x, y, D)u) + N_{0,R}(u) + \sum_{j=1}^{\nu} M_{j,m,R}(Q_j(x, D)u) \right\}$$

pour toute $u \in C^\infty(V_R \cup U_R)$, $0 < R \leq R_0$.

Démonstration. — Posons $\varepsilon = \chi\delta$, $\chi > 0$ et $\delta = \frac{r}{2}$ dans (3.5), et prenons χ assez petit, nous obtenons enfin (3.2).

4. Démonstration du théorème 1.2.

Par l'hypothèse du théorème et par les lemmes 2.4 et 2.5, on voit qu'il y a une constante A telle que

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \delta_{\langle\sigma,q\rangle} \displaystyle\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq m} \sup_{V_{R-l\delta}} |D^\sigma a(x,y)| \leq A^{|\sigma|+1}\left(\frac{|\sigma|}{l}\right)^{|\sigma|} \\ \qquad \text{pour } |\sigma|\leq l, \quad l \text{ entier} \geq 0, \end{cases}$$

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \delta^{\langle\sigma,q\rangle} \displaystyle\sup_{V_{R-l\delta}} |D^\sigma f(x,y)| \leq A^{|\sigma|+1}, \\ \delta^{\langle\sigma,q\rangle} \| Df,\ V_{R-l\delta}\|_{m,q} \leq A^{|\sigma|+1}, \qquad |\sigma| = l, \end{cases}$$

$$(4.3)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle}\left(\sum_{\langle\beta,q\rangle\leq P_j}\ \sum_{k=\frac{N'}{2m_1\ldots m_n}}^{k\leq m} |\, b_\beta(x),\ V_{R-l\delta}\,|_{k,q}\right) \leq A^{|\sigma|+1}\left(\frac{|\sigma|}{l}\right)^{|\sigma|}$$

pour $|\sigma|\leq l$, $j=1, \ldots, \nu$, où les fonctions $b_\beta(x)$ sont considérées définies sur V_R.

$$(4.4)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle}\sum_{j=1}^{\nu}\ \sum_{k=\frac{N'}{2m_1\ldots m_n}}^{k\leq m} \| D^\sigma g_j(x),\ U_{R-l\delta}\|_{k,q'} \leq A^{|\sigma|+1}\left(\frac{|\sigma|}{l}\right)^{|\sigma|}$$

pour $|\sigma|\leq l$, $\sigma_n = 0$.

LEMME 4.1. — *Supposons que la fonction u vérifie* (1.13) *et* (1.14). *Alors il y a une constante B telle que*

$$(4.5)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle} \sum_{k=\frac{N'}{2m_1\ldots m_n}}^{k\leq m} N_{k,\,R-|\sigma|\delta}(D^\sigma u) \leq B^{|\sigma|+1}, \qquad \sigma_n = 0$$

pour σ et $\delta>0$ vérifiant $R-|\sigma|\delta>0$.

Démonstration. — Nous démontrons par récurrence sur $|\sigma|$. Pour $\sigma=0$, il suffit de choisir B plus grand que le deuxième membre B_0 de (3.12). Supposons que (4.5) soit vraie pour $|\sigma|\leq l$ avec un certain $\bar{B}$. Nous allons choisir B tel que (4.5) soit vraie aussi pour $|\sigma|\leq l$. De l'inégalité (3.12), on a

$$(4.6)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle} \sum_{k=\frac{N'}{2m_1\ldots m_n}}^{k\leq m} N_{k,\,R-l\delta}(D^\sigma u)$$
$$\leq C\left\{\delta^{\langle\sigma,q\rangle} N_{m,\,R-l\delta}(P(x,y,D)D^\sigma u) + \delta^{\langle\sigma,q\rangle}\| D^\sigma u,\ V_{R-l\delta}\| + \delta^{\langle\sigma,q\rangle}\sum_{j=1}^{\nu} M_{j,m,R-l\delta}(Q_j(x,D)D^\sigma u)\right\}.$$

Comme $l > 0$, il existe un nombre $i\,(1 \leqq i \leqq n)$ et un multi-indice tel que $\sigma - e_i = \bar\sigma$ et $|\bar\sigma| < l$. Par l'hypothèse de l'induction et par les lemmes du § 2, on voit que

$$\delta^{\langle\bar\sigma, q\rangle} N_{q_k, R-|\bar\sigma|\delta}(D^{\bar\sigma} u) \leqq |\bar B|^{|\bar\sigma|+1},$$

et donc

$$\bar B^l = \bar B^{|\bar\sigma|+1} \geqq \delta^{\langle\bar\sigma, q\rangle}(R - |\bar\sigma|\,\delta - r)^{q_k} \| D^{\bar\sigma} u,\ V_{|\bar\sigma|\delta + r} \|_{q_k}$$

pour $0 < r$, $R - |\bar\sigma|\,\delta - r > 0$. Prenons $r = R - |\sigma|\,\delta$, on obtient

$$\bar B^l \geqq C_1 \delta^{\langle\bar\sigma, q\rangle + q_R} \| D^\sigma u,\ V_{R-|\sigma|\delta} \| = C_1 \delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u,\ V_{R-|\sigma|\delta} \|, \tag{4.7}$$

où la constante C_1 ne dépend pas de l et de δ.

Ensuite, $P(x, y, D) D^\sigma u$ s'écrit

$$P(x, y, D) D^\sigma = D^\sigma P(x, y, D) u - \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma_i \leqq \sigma_i}} \binom{\gamma_1}{\sigma_1} \cdots \binom{\gamma_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \times \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leqq m} D^\gamma a_\alpha . D^{\alpha+\sigma-\gamma} u \equiv D^\sigma f - g.$$

Par hypothèse,

$$\delta^{\langle\sigma, q\rangle} N_{m, R-l\delta}(D^\sigma f) \leqq A^{|\sigma|+1}.$$

Quant à l'estimation de g, on voit

$$\delta^{\langle\alpha, q\rangle} N_{m, R-l\delta}(g) \leqq C_2 \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma_i \leqq \sigma_i}} \binom{\sigma_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\sigma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leqq m} \delta^{\langle\gamma, q\rangle} \sup |D^\gamma a_\alpha(x, y)| \times \delta^{\langle\sigma-\gamma, q\rangle} N_{\langle\alpha, q\rangle, R-|\sigma-\gamma|\delta}(D^{\sigma-\gamma} u),$$

par la définition de N, où C_2 ne dépend pas de l. Donc par l'hypothèse (4.5), nous avons

$$\begin{aligned}\delta^{\langle\sigma, q\rangle} N_{m, R-l\delta}(g) &\leqq C_2 \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma_i \leqq \sigma_i}} \binom{\sigma_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\sigma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} A^{|\sigma|+1} \left(\frac{|\gamma|}{l}\right)^{|\gamma|} \times \delta^{\langle\sigma-\gamma, q\rangle} \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leqq m} N_{\langle\alpha, q\rangle, R-|\sigma-\gamma|\delta}(D^{\sigma-\gamma} u) \\ &\leqq C_2 \sum_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \gamma_i \leqq \sigma_i}} \binom{\sigma_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\sigma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} A^{|\gamma|+1} \left(\frac{|\gamma|}{l}\right)^{|\gamma|} \bar B^{|\sigma-+\gamma|1}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule

$$\sum_{\substack{|\gamma| = s \\ \gamma_i \leqq \sigma_i}} \binom{\sigma_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\sigma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \leqq \binom{|\sigma|}{s}, \qquad 0 | \leqq s \leqq |\sigma|, \tag{4.8}$$

on voit que

$$(4.9)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle}N_{m,R-l\delta}(g)\leqq C_2\sum_{s=1}^{l}\binom{l}{s}\left(\frac{s}{l}\right)^{s}A^{s+1}\overline{B}^{l-s+1}$$
$$\leqq C_2A^2\overline{B}^l\sum_{s=1}^{l}\left(\frac{eA}{\overline{B}}\right)^{s-1}\leqq C_2\,2A^2\overline{B}^l,$$

si l'on a $\overline{B}>2eA$.

Enfin, on peut traiter de la même manière le troisième terme à droite de (4.6). $Q_j(x, D)D^\sigma u$ s'écrit

$$Q_j(x, D)D^\sigma u=D^\sigma Q_j(x, D)u$$
$$-\sum_{\substack{\gamma\neq 0\\ \gamma_i\leqq\sigma_i}}\binom{\sigma}{\gamma}\sum_{\langle\beta,q\rangle\leqq p}D^\gamma b_\beta .D^{\beta+\sigma-\gamma}u\equiv D^\sigma g_j-h_j.$$

1° Par les lemmes 2.3 et 2.5,

$$(4.10)\qquad \delta^{\langle\sigma,q\rangle}M_{j,m,R-l\delta}(D^\sigma g_j)$$
$$=\delta^{\langle\sigma,q\rangle}\sup_r r\,\|\,\Psi.D^\sigma g_j,\ U^{R-l\delta-r}\,\|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n,\,q'}$$
$$\leqq 2^m\delta^{\langle\sigma,q\rangle}\sum_{\substack{k\leqq m-p_j-\frac{1}{2}q_n\\ k=\frac{N'}{2m_1\ldots m_n}}}\|\,D^\sigma g_j,\ U^{R-l\delta}\,\|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n-k,\,q'}\leqq C_3A^{|\sigma|+1},$$

où la constante C_3 ne dépend pas de l.

2° On voit que

$$(4.11)\qquad \delta^{\langle\sigma,r\rangle}r^m\left\|\,\psi_{R-l\delta,\frac{r}{2}}D^\gamma b_\beta D^{\beta+\sigma+\gamma}u,\ U_{R-l\delta-\gamma}\right\|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n,\,q'}$$
$$\leqq C_4\,\delta^{\langle\sigma,q\rangle}r^m\,\|\,\Psi D^\gamma b_\beta D^{\beta+\sigma-\gamma}u,\ V_{R-l\delta-r}\,\|_{m-p_j,\,q}$$
$$\leqq C_5\,\delta^{\langle\sigma,q\rangle}\sum_{\substack{k\leqq m-p_j\\ k=\frac{N'}{2m_1\ldots n_n}}}r^{m-k}\,\|\,D^\gamma b_\beta .D^{\beta+\sigma-\gamma}u,\ V_{R-l\delta-r}\,\|_{m-p_j-k,\,q}$$
$$\leqq C_6\sum_{k\leqq m-p_j}\ \sum_{k'\leqq k}\delta^{\langle\sigma,q\rangle}|\,D^\gamma b_\beta, V_{R-l\delta}\,|_{k',q}.\delta^{\langle\delta-\gamma,q\rangle}N_{m-k-k',R-l\delta}(D^{\sigma-\gamma}u)$$
$$\leqq C_7\,A^2\,\overline{B}^l,$$

si $\overline{B}>2eA$, et où C_7 ne dépend pas de l.

Compte tenu de (4.7), (4.9), (4.10) et (4.11), nous avons le lemme 4.1, c'est-à-dire que l'inégalité (4.5) est vraie, pour tout σ, si l'on choisit à l'avance B tel que

$$B \geqq B_0 + 2eA + 2C_2A^2 + \nu C_3 A + m^n \nu C_7 A^2.$$

Alors, du lemme 4.1 nous arrivons au lemme suivant.

LEMME 4.2. — *Il existe deux constantes B_1 et K telles que*

$$\delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq B_1^{|\sigma|+1} K^{\sigma_n} \tag{4.12}$$

pour toute $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $(\sigma_n \geqq 0)$, avec $R - |\sigma|\delta > 0$, $\delta > 0$, $0 < R < R_0$.

Démonstration. — De (4.5), on voit que

$$\delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq B^{|\sigma|+1}, \qquad \sigma_n = 0.$$

De (4.5) et si $\sigma = \sigma' + \sigma_n e_n$ avec $0 < \sigma_n \leqq m_n$, on voit que

$$\begin{aligned} B^{|\sigma'|+1} &\geqq \delta^{\langle\sigma', q\rangle} N_{\sigma_n q_n, R-|\sigma'|\delta}(D^{\sigma'} u) \\ &\geqq \delta^{\langle\sigma', q\rangle} r^{\sigma_n q_n} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma'|\delta - r} \|_{\sigma_n q_n, q}, \; R - |\sigma'|\delta - r > 0. \end{aligned}$$

Posons $r = \sigma_n . \delta$, alors

$$B^{|\sigma,|+1} \geqq C_8^{\sigma_n} \delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \|,$$

où C_8 ne dépend pas de σ_n $(0 < \sigma_n \leqq m_n)$, de R et de δ $(R - |\sigma|\delta > 0$, $\delta > 0$, $0 < R < R_0)$. Ainsi, nous avons l'inégalité

$$\delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq B_2^{|\sigma|+1} C_8^{\sigma_n}, \qquad \sigma_n \leqq m_n, \tag{4.13}$$

avec une constante $B_2 > B$.

Maintenant nous supposons $\sigma_n > m_n$, et posons $\sigma = \beta + m_n$. L'équation $P(x, y, D)u = f$ s'écrit

$$D_y^{m_n} u = f - \sum_{\substack{\langle\alpha, q\rangle \leqq m \\ \alpha_n < m_n}} a_\alpha . D_\alpha u.$$

Donc,

$$D^\sigma u = D^\beta f - \sum_{\substack{\langle\alpha, q\rangle \leqq m \\ \alpha_n < m_n}} \sum_{h_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{h_n=0}^{\beta_n} \binom{\beta_1}{h_1} \cdots \binom{\beta_n}{h_n} D^h a_\alpha . D^{\alpha+\beta-h} u.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\delta^{\langle\sigma, q\rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \\ &\quad \leqq \delta^{\langle\beta, q\rangle} D^\beta f, \overline{V}_{R-|\beta|\delta} \| \\ &\qquad + \sum_{h_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{h_n=0}^{\beta_n} \binom{\beta_1}{h_1} \cdots \binom{\beta_n}{h_n} \sum_{\substack{\langle\alpha, q\rangle \leqq m \\ \alpha_n < m_n}} \delta^{\langle h, q\rangle} \sup_{V_{R-|\sigma|q}} | D^h a_\alpha | \\ &\qquad \times \delta^{\langle\sigma - h, q\rangle} \| D^{\alpha+\beta-h} u, V_{R-|\sigma|\delta} \|. \end{aligned}$$

En remarquant que $\langle \sigma, q \rangle \geqq \langle \sigma - h, q \rangle \geqq \langle \alpha + \beta - \sigma, q \rangle$, nous avons

$$\delta^{\langle \alpha - h, q \rangle} \| D^{\alpha+\beta-h} u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq \delta^{\langle \alpha+\beta-h, q \rangle} \| D^{\alpha+\beta-h} u, V_{R-|\alpha+\beta-h|\delta} \|.$$

Nous appliquons (4.13) et obtenons

$$\delta^{\langle \sigma+h, q \rangle} \| D^{\alpha+\beta-h} u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq B_2^{|\alpha|+|\beta|-|h|+1} \leqq B_2^{m+|\beta|h|+1} C_8^{\sigma_n-1}.$$

Alors, de la même manière que pour la démonstration du lemme 4.1, on voit que

$$\delta^{\langle \sigma, q \rangle} \| D^\sigma u, V_{R-|\sigma|\delta} \| \leqq A^{|\sigma|-m_n+1} + C_9 A B_2^{m-m_n-|\sigma|} C_8^{\sigma_n-1} \leqq B_1^{|\sigma|+1} K^{\sigma_n}$$

pour B_1, K assez grands, qui ne dépendent pas de σ. Donc le lemme 4.2 est démontré.

THÉORÈME 4.1. — *Supposons que* $u \in C^\infty(V_R \cup {}_R U)$ *vérifie* (4.12). *Alors* $u \in G_q(V_{R_1} \cup U_{R_1})$ *pour* $0 < R_1 < R$.

Démonstration. — Prenons $\delta > 0$ de telle sorte que $R - |\sigma|\delta = R_1$, alors

$$\| D^\sigma u, V_{R_1} \| \leqq \frac{B^{|\sigma|+1} K^{\sigma_n}}{(R-R)_1^{\langle \sigma, q \rangle}}, \qquad \langle \sigma, q \rangle \leqq C^{|\sigma|+1} |\sigma|^{\langle \sigma, q \rangle}$$

pour C assez grande, qui ne dépend pas de σ. Ainsi le théorème 4.1 est démontré.

Le théorème 1.2 est une conséquence immédiate de ce théorème 4.1.

5. Une remarque sur l'estimation pour l'opérateur itéré.

Dans la suite, soit

$$P(D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leqq m} a_\alpha D^\alpha$$

un opérateur quasi-elliptique à coefficients constants d'ordre m, de poids $q = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n} \right)$ et « determined type ν » par rapport à D_n, et soit

$$\left\{ Q_j(D) = \sum_{\langle \beta, q \rangle \leqq p_j} b_\beta D^\beta, \ 0 \leqq p_j \leqq m - q_n, \ j = 1, \ldots, \nu \right\}$$

un système d'opérateurs au bord à coefficients constants qui recouvre $P_1(D)$. (*Voir* définitions 1.1 et 1.2.)

Nous notons

$$V = \{ (x, y) \in R^n ; \sqrt{|x|^2 + y^2} < R \leqq 1, y > 0 \} \quad \text{et} \quad U = \{ x, 0 \in R^n ; |x| < R \}$$

et nous désignons par P^i, $i = 0, 1, \ldots$ le i-ième itéré de $P(D)$, $P^0 u = u$.

THÉORÈME 5.1. — *Si $u \in C^\infty(\overline{V})$, et s'il existe deux constantes C_0 et C_1 telles que*

$$\| P^i(D)u : V \| \leq C_0\, C_1^i\, (im)^{im} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} | [Q_j(D)\, P^i(D) u;\, U] |_{m+sm-p_j-\frac{1}{2}q_m,\, q'}$$
$$\leq C_0\, C_1^{s+i}((s+i+1)m)^{(s+i+1)m} \qquad (s,\, i = 0, 1, 2, \ldots),$$

alors, u appartient à $G_q(\overline{V})$.

(Pour la définition de la norme $|[\ \ ]|_{0,q'}$, *voir* définition 2.1).

Démonstration. — D'abord, nous rappelons le lemme 3.2 pour le cas des opérateurs à coefficients constants :

LEMME 3.2'. — *Il existe une constante C telle que*

$$(3.5)' \qquad \sum_{\substack{k \leq m \\ \left(k = \frac{N}{2m_1 \ldots m_n} \atop 0 \leq N \text{ entier}\right)}} \| u,\, V_{-r} \|_{k,q}\, \varepsilon^k$$
$$\leq C \left\{ \varepsilon^m \| P(D)u,\, V_{-r+\delta} \| + \| u,\, V_{-r+\delta} \| \right.$$
$$+ \varepsilon^m \delta^{-m} \sum_{\substack{k \leq m \\ k = \frac{N}{2m_1 \ldots m_n}}} \delta^{m-k} \| u,\, V_{-r+\delta} \|_{m-k,q}$$
$$\left. + \varepsilon^m \sum_{j=1}^{\nu} \| \psi_{R-r,\delta}\, Q_j(D)u,\, U_{-r+\delta} \|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n,\, q'} \right\},$$

où $0 < r$, $\varepsilon < R$, $R - r + \delta > 0$. La constante C ne dépend pas de ε, r, δ, et de $u \in C^\infty(V)$.

Dans la suite, nous employons la notation suivante :

$$(5.2) \qquad \| u;\, l+k,\, V \|_{k,q} = \sup_{0<r<R} r^{l+k} \| u;\, V_{-r} \|_{k,q},$$
$$\| u;\, l+k,\, U \|_{k,q'} = \sup_{0<r<R} r^{l+k} \| u;\, U_{-r} \|_{k,q'},$$
$$| Q_j u;\, l+k,\, U |_{k,q'} = \sup_{0<r<R} \| \psi_{R-r,\, rt}\, Q_j(D)u;\, U_{-r(1-t)} \|_{k,q'} (r(1-t))^{l+k}$$
$$(0 < t < 1).$$

Posons $\varepsilon = \chi tr$, $\delta = rt$ avec χ, t suffisamment petits (déterminés plus tard) dans (3.5)′, nous avons

$$\sum_{k\leq m} \| u; V_{-r} \|_{k' q}\, \chi^k (tr)^k$$
$$\leq C \left\{ \chi^m (tr)^m \| P(D) u, V_{-r(1-t)} \| \right.$$
$$+ u, V_{-r(1-t)} \| + \chi^m \sum_{k<m} (tr)^k \| u, V_{-r(1-t)} \|$$
$$\left. + \chi^m \sum_{j=1}^{\nu} (tr)^m \| \chi_{R-r, rt} Q_j (D) u, U_{-r(1-t)} \|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n, q'} \right\}.$$

Multiplions chaque côté $(tr)^l$, $(l \geq 0)$, nous avons

$$\sum_{k<m} \| u, V_{-r} \|_{k,q}\, r^{l+k} \chi^k t^{k+l}$$
$$\leq C \left\{ \| Pu, V_{-r(1-t)} \| \, r(1-t))^{l+m} \chi^m \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+m} \right.$$
$$+ \chi^m \sum_{k<m} \| u, V_{-r(1-t)} \|_{k,q} (r(1-t))^{l+k} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+k}$$
$$+ \| u; V_{-r(1-t)} \| (r(1-t)^l \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l}$$
$$\left. + \chi^m \sum_{j=1}^{\nu} \| \psi_{R-r, rt} Q_j u, U_{-r(1-t)} \|_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n, q'} (r(1-t))^{l+m} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+m} \right\}.$$

Alors par la définition (5.2), nous avons

$$(5.3) \quad \sum_{k\leq m} \| u; l+k, V \|_{k,q}\, \chi^k t^{k+l}$$
$$\leq C \left\{ \chi^m \| Pu; l+m, V \| \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+m} \right.$$
$$+ \chi^m \sum_{k<m} \| u; l+k, V \|_{k,q} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+k}$$
$$+ \| u; l, V \| \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l}$$
$$\left. + \chi^m \sum_{j=1}^{\nu} | Q_j(D) u; l+m, U |_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n, q'} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{l+m} \right\}.$$

Il est clair qu'il existe une constante C telle que

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^{l+k} \leqq C^{l+k}, \qquad 0 < t \leqq \frac{1}{l+m} \qquad (m \geqq 2,\ m \geqq k \geqq 0).$$

Si nous prenons χ suffisamment petit dans (5.3), nous avons

$$(5.4) \quad \sum_{k \leqq m} \| u;\, l+k,\, V \|_{k,q}\, t^k \leqq C \left\{ \| Pu;\, l+m,\, V \|\, t^m + \| u;\, l,\, V \| + \sum_{j=1}^{\nu} | Q_j u;\, l+m,\, U |_{m-p_j+\frac{1}{2}q_n,\, q'} . t^m \right\}$$

avec une nouvelle constante C et avec $0 < t \leqq \frac{1}{l+m}$.

Nous pouvons simplifier (5.4) comme suit :

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leqq m} \| D^\alpha u;\, l + \langle \alpha, q \rangle,\, V \|\, t^{\langle \alpha, q \rangle} \\ & \leqq C \left\{ \| P(D) u;\, l+m,\, V \|\, t^m + \| u;\, l,\, V \| \right. \\ & \qquad \left. + \sum_{j=1}^{\nu} | Q_j(D) u;\, l+m,\, U |_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n,\, q'} . t^m \right\}, \\ & \qquad 0 < t \leqq \frac{1}{l+m}. \end{aligned} \right.$$

Alors, par itération de (5.5) (par exemple, en remplaçant n par $t^m Pu$ et l par $l+m$ dans (5.5), etc.), on peut démontrer les inégalités suivantes :

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \max_{\substack{\langle \beta, q \rangle \leqq (s-1)m \\ \beta_n = 0 \\ s \text{ entier} \geqq 1}} \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leqq m} \| D^{\alpha+\beta} u;\, l + \langle \alpha + \beta, q \rangle,\, V \|\, t^{\langle \alpha + \beta, q \rangle} \\ & \leqq C^s \left\{ \max_{0 \leqq i \leqq s} \| P^i u;\, l + im,\, V \|\, t^{im} \right. \\ & \qquad + \max_{\substack{0 \leqq i + \langle \beta, q \rangle \leqq (s-1)m \\ \beta_n = 0}} \sum_{j=1}^{\nu} | D^\beta Q_j P^i u;\, l + \langle \beta, q \rangle + (it) m,\, U |_{m-p_j-\frac{1}{2}q_n,\, q'} \\ & \qquad\qquad \left. \times\, t^{\langle \beta, q \rangle + (i+1)m} \right\}, \\ & \qquad 0 < t \leqq \frac{1}{l+sm} \qquad (s = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Ce sont les inégalités principales pour démontrer le théorème 5.1. Dans le membre à droite de (5.6), on voit, par l'hypothèse du théorème 5.1, que

$$\| P^i u;\, l + im,\, V \| \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm} \leqq C_0\, C_1^{im} (im)^m \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm} \leqq C_0\, C_1^{sm},$$

où $t = \dfrac{1}{l+sm}$.

De même,

$$\sum_{j=1}^{\nu} | D^\beta Q_j P^i u;\, l + \langle \beta, q \rangle + (i+1)m;\, U |_{m - p_j - \frac{1}{2} q_n,\, q'} \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm} \leqq C_0\, C_1^{sm}$$

pour les nouvelles constantes C_0 et C_1 qui ne dépendent pas de β et de i.

Ensuite, pour les termes à gauche de (5.6), on voit que

$$\begin{aligned} &\| D^{\alpha+\beta} u;\, l + \langle \alpha + \beta, q, \rangle,\, V \|\, t^{\langle \alpha+\beta, q \rangle} \\ &\geqq \| D^{\alpha+\beta} u;\, l + \langle \alpha + \beta, q \rangle,\, V \| \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm} \\ &= \| D^{\alpha+\beta} u;\, l + \langle \alpha + \beta, q \rangle,\, V \| \frac{1}{\langle \beta, q \rangle^{\langle \beta, q \rangle}} \langle \beta, q \rangle^{\langle \beta, q \rangle} \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm}. \end{aligned}$$

Nous voyons, pour les β tels que $s - 2 \leqq \langle \beta, q \rangle \leqq s - 1$, $\beta_n = 0$, $s = 2, 3, \ldots$,

$$\langle \beta, q \rangle^{\langle \beta, q \rangle} \left(\frac{1}{l+sm}\right)^{sm} \geqq C'^s$$

avec une constante C'.

Donc, nous sommes arrivés à l'inégalité suivante :

$$(5.7) \qquad \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leqq m \\ \beta_n = 0}} \| D^{\alpha+\beta} u;\, l + \langle \alpha + \beta, q \rangle,\, V \| \leqq C_0\, C_1^{\langle \beta, q \rangle} \langle \beta, q \rangle^{\langle \beta, q \rangle},$$

où C_0 et C_1 sont choisies à nouveau.

C'est la majoration « des dérivées tangentielles » et de l'inégalité (5.3), de la même manière que dans § 4; nous pouvons obtenir la majoration des dérivées normales, et nous établissons enfin le théorème 5.1.

Remarque. — Dans le cas des coefficients variables, nous aurons besoin des résultats délicats, sur les normes fractionnaires, résumés dans le § 2.