BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JUNG

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 132-138
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__132_0>

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. Jung.

(Séance du 9 mai 1879.)

Deux Notes intéressantes sur le même sujet de nos savants confrères MM. Laisant et Darboux [1] ont inspiré les considérations qui forment l'objet de cette Communication.

Étant données n masses m_i concentrées en autant de points A_i d'un plan π $(i = 1, 2, \ldots, n)$, soient G leur centre de gravité et M leur somme Σm, c'est-à-dire la masse totale. Désignant par (x), (y) deux droites orthogonales du plan π se coupant au point quelconque O, et par x_i, y_i les coordonnées de A_i par rapport à ces droites, supposons formées les sommes $J_x = \Sigma m_i y_i^2$ et $J_y = \Sigma m_i x_i^2$, qui sont respectivement les moments d'inertie des m_i par rapport aux droites (x) et (y) considérées successivement comme axes de moments.

Si x_0, y_0 désignent les coordonnées du centre de gravité G, et h_x, h_y les rayons de gyration relatifs à (x) et à (y); si, en outre, X étant l'antipôle de (x) [c'est-à-dire le centre de second degré du système par rapport à l'axe (x)], y_x en est l'ordonnée, et si, Y étant l'antipôle de (y), x_y en est l'abscisse, on aura les relations bien connues

$$\Sigma m_i y_i^2 = h_x^2 \mathrm{M} = y_0 y_x \mathrm{M},$$
$$\Sigma m_i x_i^2 = h_y^2 \mathrm{M} = x_0 x_y \mathrm{M},$$

lesquelles, observant que $x_i^2 + y_i^2 = \overline{\mathrm{OA}_i}^2$, donnent, par addition,

$$\Sigma m_i \overline{\mathrm{OA}_i}^2 = (h_x^2 + h_y^2)\mathrm{M} = (x_0 x_y + y_0 y_x)\mathrm{M}.$$

Maintenant, soient $(x') \parallel (x)$ et $(y') \parallel (y)$ deux autres axes de coordonnées passant par G, et désignons par x'_y la nouvelle abscisse de Y et par y'_x la nouvelle ordonnée de X, de manière que $x_y = x_0 + x'_y$, $y_x = y_0 + y'_x$; alors on trouve, posant $\overline{\mathrm{OG}} = \mathrm{D}$,

$$x_0 x_y + y_0 y_x = \mathrm{D}^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x).$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 193, et t. VII, p. 7.

On a donc, en résumant,

$$(\alpha) \qquad \Sigma m_i \overline{\mathrm{OA}_i}^2 = \mathrm{H}^2 \mathrm{M},$$

où

$$(1) \qquad \mathrm{H}^2 = h_x^2 + h_y^2,$$

$$(2) \qquad \mathrm{H}^2 = x_0 x_y + y_0 y_x,$$

$$(3) \qquad \mathrm{H}^2 = \mathrm{D}^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x), \quad \mathrm{D} = \overline{\mathrm{OG}};$$

chacune de ces identités, combinée avec l'équation (α), donne un théorème bien facile à énoncer. Par exemple, de l'équation (1), on a :

1° *L'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour cathètes les rayons de gyration correspondant à deux droites orthogonales quelconques passant par* O, *multipliée par la masse totale* M, *est, quel que soit le point* O, *égale à la somme* $\Sigma m_i \overline{\mathrm{OA}_i}^2$.

Proposition qui contient le théorème bien connu :

La somme $\mathrm{J}_x + \mathrm{J}_y$ *relative à deux droites* (x), (y) *de* π, *orthogonales et passant par* O, *est indépendante de l'orientation des* (x), (y) *dans le plan* π.

Et de l'équation (2) on a :

2° *Si* X *et* Y *sont les antipôles de ces droites* (x) *et* (y), *la somme de rectangles* $(x_0 x_y + y_0 y_x)$ *ayant pour dimensions, l'un les distances de* Y *et* G *de* (x), *et l'autre les distances de* X *et* G *de* (y), *est aussi indépendante de l'orientation de* (x) *et* (y) *dans le plan* π, *et se conserve constamment égale à* $\Sigma m_i \overline{\mathrm{OA}_i}^2$.

De l'équation (3), H et D ne dépendant que de O et G, on tire une proposition analogue qui se rapporte à la somme de rectangles $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$.

Mais il y a de plus :

3° *Cette dernière somme* $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$, *non-seulement ne dépend pas de l'orientation des droites* (x) *et* (y) *dans le plan* π, *mais elle est indépendante même de* O, *c'est-à-dire qu'elle reste invariable de quelque manière que le point* O *se déplace en* π.

On pourrait se persuader de cette vérité partant du théorème II de Lagrange ; mais, indépendamment de ce théorème, elle se démontre par la simple observation que, l'orientation de (x), (y), et par conséquent de (x'), (y'), n'ayant pas d'influence sur la valeur $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$, on peut supposer que (x'), (y') coïncident avec les *axes principaux* $(\overline{x'})$, $(\overline{y'})$ du système. En effet, désignant par $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{x'_y}, \overline{y'_x}$ les quantités relatives à cette orientation particulière, analogues à x_0, y_0, x'_y, y'_x, par $\overline{k_x}$, $\overline{k_y}$ les rayons de gyration correspondant à $(\overline{x'})$, $(\overline{y'})$, et par k_x, k_y ceux relatifs à deux autres axes orthogonaux (x'), (y') passant par le centre de gravité G, on a

$$x_0 x'_y + y_0 y'_x = \overline{x_0}\,\overline{x'_y} + \overline{y_0}\,\overline{y'_x}$$

et

$$\overline{x_0}\,\overline{x'_y} = \overline{k_x^2}, \quad \overline{y_0}\,\overline{y'_x} = \overline{k_y^2} \quad (^1);$$

par conséquent, (x') étant perpendiculaire à (y'),

$$k_x^2 + k_y^2 = \overline{k_x^2} + \overline{k_y^2} = \text{const.} = x_0 x'_y + y_0 y'_x, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Posant

$$(4) \qquad K^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

au lieu des équations (3) et (α), on peut écrire

$$(5) \qquad H^2 = D^2 + K^2,$$

$$(6) \qquad \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \Sigma m_i \overline{GA_i}^2.$$

Maintenant, si l'on convient de nommer *moment d'inertie du système par rapport* (ou *correspondant*) *à un point* O la somme $\Sigma m_i \overline{OA_i}^2$, et *rayon de gyration par rapport à* O le segment H défini par l'identité

$$H^2 = \frac{\Sigma m_i \overline{OA_i}^2}{M},$$

---

(1) On sait qu'un point est réciproque (conjugué) à tous les points de son antipolaire; que les points réciproques AA', BB', CC', ... placés sur une droite r sont conjugués en involution; que, si r passe par G, ce point est le centre de l'involution; et qu'enfin la constante GA.GA' de cette involution est (en valeur absolue) égale au carré du rayon de gyration correspondant au diamètre conjugué à r (*voir*, par exemple, mes Notes dans les *Rendiconti*, années 1875, 1876, 1879).

les équations (5) et (6) permettent de conclure qu'entre deux moments d'inertie se rapportant, l'un à un point arbitraire O, l'autre au centre de gravité G du système donné de masses, et entre les rayons correspondants de gyration H et K, il y a la même relation bien connue qui existe entre les quantités analogues se rapportant à un axe quelconque (x) et à l'axe parallèle (x') passant par G, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant :

Théorème A. — *Le moment d'inertie du système de masses données par rapport à un point* O [ou à un axe (x)] *est égal au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité* G [ou respectivement par rapport à l'axe barycentrique $(x') \parallel (x)$], *augmenté du moment d'inertie par rapport au même point* O [ou respectivement par rapport au même axe (x)] *de la masse totale* M *concentrée au point* G. *Le rayon de gyration* H *par rapport à* O [ou à (x)] *est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés : 1° la distance* D *du point* O [ou respectivement de l'axe (x)] *de* G; *2° le rayon de gyration* K *relatif à* G [ou respectivement à (x')].

Tout ce qui précède est indépendant des théorèmes de Lagrange, et il serait bien facile d'en déduire ces deux théorèmes; mais je préfère les considérer comme connus et remarquer que, si l'on en invoque un, l'autre s'ensuit immédiatement de l'équation (6). En effet, pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les deux théorèmes de Lagrange s'expriment, avec nos notations, par les identités suivantes :

$$(8) \qquad \text{I.} \qquad \frac{\Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2}{M} = \Sigma m_i \overline{GA_i}^2,$$

$$(9) \qquad \text{II.} \quad \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \frac{\Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2}{M},$$

et de comparer ces identités avec l'équation (6). L'équation (8) donne, en outre, le théorème suivant :

Théorème B. — *La somme des produits des masses combinées deux à deux et respectivement multipliées par le carré de leur distance respective est égale au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité* G, *multiplié par la masse totale.*

On peut donc raisonnablement regarder toutes les propositions énoncées ci-dessus comme contenues dans celles de Lagrange, ou, si l'on veut, on peut considérer le théorème A, combiné avec B, comme des énoncés différents des théorèmes de Lagrange.

Ajoutons encore comme conséquences évidentes :

THÉORÈME C. — *La somme constante de rectangles* $x_0 x'_y + y_0 y'_x$ *définie plus haut, multipliée par le carré de la masse totale, est égale à la somme de produits* $\Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$ *définie dans le théorème* B.

THÉORÈME D. — *Quel que soit le point* O *en* π, *si* D *est sa distance du centre de gravité et* H *son rayon de gyration, la différence* $H^2 - D^2$ *est constante.*

Des considérations tout à fait semblables aux précédentes conduisent aux théorèmes analogues pour le cas où les masses m_i sont concentrées en des points A_i *placés d'une manière quelconque dans l'espace.*

Encore une remarque. Le premier théorème dont M. Darboux s'occupe dans sa Note s'exprime par la formule

$$(\beta) \qquad \overline{OR}^2 = M\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - \Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2,$$

laquelle, comme ce savant géomètre l'observe, coïncide avec le théorème II de Lagrange, si l'on pose

$$\overline{OR} = M.\overline{OG} = MD.$$

Par cette même position, nos équations (5) et (6) deviennent

$$\overline{OR}^2 = M^2(H^2 - K^2),$$
$$\overline{OR}^2 = M\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - M\Sigma m_i \overline{GA_i}^2,$$

lesquelles sont susceptibles de l'interprétation suivante :

THÉORÈME E. — *Les* m_i *étant des masses concentrées aux points* A_i, *et* O *désignant un point arbitraire, la résultante* $\overline{OR}$ *des forces* $m_i \overline{OA_i}$ *est telle, que le rapport de son carré au carré de la masse totale est égal à la différence des carrés des deux rayons de gyration du système, correspondant l'un au point donné* O *et l'autre au centre de gravité* G.

Cette résultante $\overline{OR}$ *varie en général avec* O; *mais elle reste constante en grandeur pour tous les points* O *placés sur une circonférence quelconque de centre* G.

Si au lieu de masses les m_i désignent des coefficients positifs ou négatifs affectant les points A_i (c'est précisément l'hypothèse de M. Darboux), il y a lieu à considérer le cas de $\Sigma m = M = 0$. Alors, *à moins que la résultante* $\overline{OR}$ *même ne soit zéro,* elle est constante en grandeur et en direction de quelque manière que le point O se déplace. Cela, entre autres, résulte aussi de l'équation (β), comme M. Darboux l'a observé.

Mais, dans ce cas, si on laisse de côté *un quelconque* des points et le coefficient relatif, par exemple le point A_h avec le coefficient m_h (point affecté qu'on désigne ordinairement par $m_h A_h$), et si G_0 est le centre de gravité des autres $n-1$ points affectés $m_i A_i$ ($i = 1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n$), on sait [1] que cette résultante constante, en grandeur et en direction, est donnée par

$$\overline{OR} = m_h \overline{G_0 A_h},$$

de manière que, dans cette hypothèse de $M = 0$ et de $\overline{OR}$ non zéro, l'équation (β) devient

$$\Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2 = -m_h^2 \overline{G_0 A_h}^2.$$

Maintenant, observant que $m_h \overline{G_0 A_h}^2$ n'est autre chose que le moment d'inertie du point A_h affecté du coefficient m_h par rapport au point G_0, on a le théorème suivant :

Théorème F. — *Si pour* $M = 0$ *la somme constante*

$$\Sigma\Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$$

n'est pas nulle, elle équivaut au moment d'inertie de l'un quelconque A_h *des* n *points donnés, pris par rapport au centre de gravité* G_0 *des autres* $n-1$ *et multiplié par le coefficient correspondant* m_h, *changé de signe.*

---

(1) Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, n° 124, p. 65 (Torino, 1874); cfr. Möbius, *Lehrbuch der Statik*, t. I, § 107, p. 197 (Leipzig, 1837).

L'interprétation de la même somme pour le cas de M différent de zéro est contenue dans le théorème B, car évidemment ce théorème subsiste aussi dans l'hypothèse actuelle où les m_i ne désignent plus des masses (ou coefficients *positifs*), mais des coefficients quelconques (*positifs* ou *négatifs*).

On peut considérer ce qui précède comme une manière différente d'établir et d'énoncer le deuxième théorème dont M. Darboux s'est occupé, et dont on pourrait tirer les conséquences (*Bulletin*, t. VII, p. 11) d'une autre manière encore, en les déduisant directement des *Elementi di Calcolo grafico* (n° **121**, p. 63) cités plus haut; précisément comme le premier théorème traité par M. Darboux (*loc. cit.*, p. 8) pourrait aussi se déduire presque immédiatement du n° **119**, p. 65 du même Ouvrage de M. Cremona.