Bulletin de la S. M. F.

Marius Van der Put

Espaces de Banach non archimédiens

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 309-320
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__309_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 309 à 320.

ESPACES DE BANACH NON ARCHIMÉDIENS

PAR

MARIUS VAN DER PUT.

Introduction. — Dans cet article, on étudie des propriétés catégorielles d'espaces de Banach sur un corps valué complet K, non archimédien. Nous avons utilisé des méthodes de L. GRUSON [1] et A. HELLER [2]. On désigne par $\mathcal{B}(K)$ la catégorie des espaces de Banach sur K, dont les morphismes sont les applications linéaires continues. On dit qu'un morphisme $\alpha : E \to F$ est *propre* si $\alpha(E)$ est fermé dans F. La classe des morphismes propres vérifie les axiomes de Heller. Cela nous donne la possibilité d'utiliser l'algèbre homologique. On obtient les résultats suivants :

Si E est un espace normé sur K de type dénombrable, E possède, pour tout $\rho \in \mathbf{R}$, $0 < \rho < 1$, une ρ-base (1.4).

Pour qu'un espace de Banach E soit injectif (par rapport aux morphismes propres), il faut et il suffit que E soit isomorphe à un espace de Banach complet sphérique (2.1).

Pour qu'un espace de Banach E soit projectif (par rapport aux morphismes propres), il faut et il suffit qu'il existe un $\rho \in \mathbf{R}$, $0 < \rho \leq 1$, pour lequel E possède une ρ-base (2.2).

Pour que le groupe de valuation de K soit discret, il faut et il suffit que toute courte suite exacte dans $\mathcal{B}(K)$ se décompose (3.1).

Pour que le corps K soit maximalement complet, il faut et il suffit que le dual E' de E soit différent de 0 pour tout $E \in \mathcal{B}(K)$, $E \neq 0$ (3.2).

Si K n'est pas maximalement complet, il existe des espaces de Banach réflexif sur K de dimension infinie (4.4).

1. Préliminaires.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps valué complet, non archimédien. On suppose que la valuation de K soit propre. $\mathcal{B}(K)$ désigne la catégorie des espaces de Banach sur K, dont les morphismes sont les applications linéaires continues. On dit qu'un morphisme $\alpha : E \to F$ est *propre*, si $\alpha(E)$ est un sous-espace fermé de F. On dit que $0 \to E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \to 0$ est une *suite exacte propre* si :

1° α et β sont propres;

2° α est injectif;

3° β est surjectif;

4° $\operatorname{im}\alpha = \ker\beta$.

Un objet P de $\mathcal{B}(K)$ est appelé *projectif* si l'application

$$\operatorname{Hom}(P, E) \to \operatorname{Hom}(P, E'')$$

est surjective pour toute suite exacte propre $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$. La définition d'un objet *injectif* est duale. La définition de *résolution projective* (*injective*) est évidente.

Soit $\{ A_d \mid d \in D \}$ un ensemble d'espaces de Banach sur K. Alors $\prod_{d \in D} A_d$ désigne l'espace de Banach formé par les éléments

$$a = (a_d)_{d \in D}, \qquad \text{où} \quad a_d \in A_d \quad \text{et} \quad \sup \| a_d \| < \infty.$$

La norme sur $\prod A_d$ est $\| a \| = \sup \{ \| a_d \| \mid d \in D \}$. On désigne par $\sum_{d \in D} A_d$ l'espace de Banach formé par les éléments

$$a = (a_d)_{d \in D}, \qquad \text{où} \quad a_d \in A_d \quad \text{et} \quad \lim \| a_d \| = 0$$

(suivant le filtre de Fréchet sur D). La norme sur $\sum A_d$ est

$$\| a \| = \sup \{ \| a_d \| \mid d \in D \}.$$

Dans le cas où $A_d = K$ pour tout d, on écrit

$$b(D \to K) = \prod_{d \in D} A_d \qquad \text{et} \qquad c(D \to K) = \sum_{d \in D} A_d.$$

Remarquons que $\prod A_d$ et $\sum A_d$ ne sont pas le produit et la somme dans la catégorie $\mathcal{B}(K)$, si l'ensemble D est infini. En général, $\mathcal{B}(K)$ ne possède pas des produits infinis et des sommes infinies.

On dit qu'un espace normé E est *complet sphérique*, si tout ensemble ordonné de boules dans E possède une intersection non vide. Si A_d est complet sphérique pour tout $d \in D$, $\prod_{d \in D} A_d$ est complet sphérique.

On désigne par E' l'espace dual de E, $E' = \mathrm{Hom}(E, K)$, muni de la norme $\| l \| = \sup \left\{ \frac{| l(x) |}{\| x \|} \,\middle|\, x \in E,\ x \neq 0 \right\}$. Il est clair que

$$\left(\sum_{d \in D} A_d \right)' = \prod_{d \in D} A'_d.$$

LEMME (1.1). — *Pour tout ensemble dénombrable* $\{ A_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ *d'espaces de Banach,* $\prod A_n \big/ \sum A_n$ *est complet sphérique.*

Démonstration. — Soit τ l'application canonique :

$$\prod A_n \to A = \left(\prod A_n \big/ \sum A_n \right),$$

et soit $B(f_n, r_n)$ une suite de boules dans A telle que $B(f_n, r_n) \supset B(f_{n+1}, r_{n+1})$ pour tout n. Il y a des éléments $g_n \in \prod A_n$ tels que

$$\tau g_n = f_n \qquad \text{et} \qquad B(g_n, r_n) \supset B(g_{n+1}, r_{n+1}) \qquad \text{pour tout } n.$$

Alors l'élément $g \in \prod A_n$, défini par $g(n) = g_n(n)$, satisfait à $\| \tau g - f_n \| \leq r_n$ pour tout n.
Donc

$$\tau g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(f_n, r_n).$$

LEMME (1.2). — *Supposons que E soit complet et que F soit un sous-espace fermé de E. Alors E/F est complet sphérique.*

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle de (1.1). (*Voir aussi* [5], p. 560.)

LEMME (1.3) (J.-P. SERRE). — *Supposons que la valuation de K soit discrète. Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé sur K. Alors il existe une norme $\|.\|'$ sur K, équivalente à $\|.\|$, telle que $\|E\|' = |K|$.*

Démonstration. — Soit $\rho \in \mathbf{R}$, $0 < \rho < 1$, tel que $|K^*| = \{ \rho^n \mid n \in \mathbf{Z} \}$. Alors la norme $\| x \|' = \inf \{ \rho^n \mid n \in \mathbf{Z},\ \rho^n \geq \| x \| \}$ a les propriétés du lemme.

DÉFINITIONS. — Soit E un espace normé sur K. On dit qu'une famille $\{ x_i \}_{i \in I} \subset E$ est *α-orthogonale*, $0 < \alpha \leq 1$, si $\left\| \sum \lambda_i x_i \right\| \geq \alpha \max \| \lambda_i x_i \|$ pour toute série convergente $\sum \lambda_i x_i$, où $\lambda_i \in K$. Une famille α-orthogonale sera appelée une *α-base* de E, si tout $x \in E$ est une série convergente $x = \sum \lambda_i x_i$. Un espace normé E sur K s'appelle un espace *de type dénombrable,* si E contient un sous-espace de dimension finie ou dénombrable.

Remarque. — Il est clair qu'une famille $\{ x_i \}_{i \in I}$ est orthogonale dans le sens de [4] si, et seulement si, elle est 1-orthogonale.

PROPOSITION (1.4). — *Soit E un espace normé de type dénombrable. Alors E possède, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$, une α-base dénombrable ou finie.*

Démonstration. — Nous omettons le cas où $\dim E < \infty$. Il existe une suite $\{ E_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ de sous-espaces de E, telle que $E_n \subset E_{n+1}$, $\dim \mathrm{E}_n = n$ et telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ soit dense dans E. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$, il existe des nombres $\{ \alpha_n \mid n \in \mathbf{N} \}$, avec $0 < \alpha_n < 1$ et $\alpha \leqq \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n < 1$.

Nous construirons, par récurrence, une suite $\{ x_k \mid k \in \mathbf{N} \} \subset E$ telle qu'on ait, pour tout n,

1° $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ est une base de E_n;

2° $\inf \{ \| x_n + y \| \mid y \in E_{n-1} \} \geqq \alpha_n \| x_n \|$.

Supposons qu'on ait construit $\{ x_1, \ldots, x_n \}$. Soit $x \in E_{n+1} \setminus E_n$. Il existe un élément $z \in E_n$ tel que

$$\inf \{ \| x + y \| \mid y \in E_n \} \geqq \alpha_{n+1} \| x + z \|.$$

Alors $x_{n+1} = x + z$ a les propriétés demandées.

Donc,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \geqq \alpha_n \max \left(\| \lambda_n x_n \|, \left\| \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_k x_k \right\| \right),$$

et par suite,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \geqq \alpha \max_{1 \leqq k \leqq n} (\| \lambda_k x_k \|) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Cela signifie que $\{ x_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ est α-orthogonale. La famille $\{ x_n \}$ est une α-base de E, puisque $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est dense dans E.

Remarques.

1° Tous les espaces de Banach sur K, de dimension infinie et de type dénombrable, sont isomorphes (comme espace vectoriel topologique) à $c\,(\mathbf{N} \to K)$.

2° Soit E un espace normé sur K, qui possède une base algébrique dénombrable. Alors E n'est pas complet. Une conséquence (bien connue) est que la clôture algébrique $\tilde{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ (les nombres p-adiques) n'est pas complète. En effet, $\tilde{\mathbf{Q}}_p$ admet une base algébrique sur $\mathbf{Q}_p$, formée par des éléments algébriques sur $\mathbf{Q}$.

2. Espace de Banach projectifs et injectifs.

THÉORÈME (2.1). — *Soient P et Q des espaces de Banach sur K. Alors :*

(1) *Pour que P soit projectif, il faut et il suffit que P soit facteur direct d'un espace de Banach de type $c\,(V \to K)$.*

(2) *Pour que Q soit injectif, il faut et il suffit que Q soit isomorphe (comme espace vectoriel topologique) à un espace complet sphérique.*

(3) *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach projectif est projectif.*

(4) *Tout espace quotient d'un espace de Banach injectif est injectif.*

(5) *Tout espace de Banach possède une résolution projective et une résolution injective.*

Démonstration.

(1) Comme on le vérifie aussitôt, tout espace $c(V \to K)$, et par suite tout facteur direct de $c\,(V \to K)$, est projectif. Réciproquement, soit E un espace de Banach. On construit l'espace de Banach F, formé par les éléments $x = (\lambda_a)_{a \in E,\, a \neq 0}$, où $\lambda_a \in K$,

$$\lim |\lambda_a| \,.\, \|a\| = 0 \quad \text{et} \quad \|x\| = \max\{\,|\lambda_a| \,.\, \|a\|_E \mid a \in E,\ a \neq 0\,\}.$$

L'application $\varphi : F \to E$, définie par

$$\varphi((\lambda_a)_{a \in E,\, a\neq 0}) = \sum_{a \in E,\, a \neq 0} \lambda_a a,$$

est continue et surjective. Si E est projectif, il existe une application linéaire continue $\psi : E \to F$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. Cela veut dire que E est un facteur de F.

(2) La suffisance est une conséquence d'un théorème d'INGLETON [3].

Démontrons la nécessité. Soit $\mathrm{F} = \left(\prod_{n=1} E_n\right) \Big/ \left(\sum_{n=1}^{\infty} E\right)$, où $E_n = E$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

L'application canonique $\alpha : E \to F$ est isométrique. Si E est injectif, il existe une application linéaire continue $\psi : F \to E$ avec $\psi \circ \alpha = \mathrm{id}_E$. D'après les lemmes (1.1) et (1.2), E est complet sphérique par rapport à la norme sur E induite par ψ.

Le théorème de Banach implique que cette norme est équivalente à la norme de E.

(4) C'est une conséquence immédiate de (2) et du lemme (1.2).

(5) Chaque espace de Banach E est isomorphe à un sous-espace fermé d'un espace de Banach injectif; prenons, par exemple,

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) \Big/ \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right), \qquad \text{où} \quad E_n = E \quad \text{pour tout } n.$$

Chaque espace de Banach E est un espace quotient d'un espace projectif [*voir* la démonstration de (1)].

(3) Nous avons maintenant démontré (1), (2), (4) et (5). D'après la théorie de A. Heller [2], on peut définir $\mathrm{Ext}^n(A, B)$, où $A, B \in \mathcal{B}(K)$. Il résulte de (4) que $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ si $n > 1$, parce que tout B possède une résolution injective de la forme $0 \to B \to Q_1 \to Q_2 \to 0$.

Soit A un sous-espace fermé d'un espace de Banach projectif P, et soit $D = P/A$. Soit B un espace de Banach quelconque. La suite exacte propre $0 \to A \to P \to D \to 0$ induit la suite exacte :

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^1(D, B) \to \mathrm{Ext}^1(P, B) \to \mathrm{Ext}^1(A, B) \to \mathrm{Ext}^2(D, B) \to \ldots.$$

Alors $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$, parce que $\mathrm{Ext}^2(D, B) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(P, B) = 0$. Cela veut dire que A est projectif.

Corollaire (2.2).

(1) $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ *pour* $n > 1$.

(2) *Il existe, pour tout espace de Banach* E *sur* K, *un espace de Banach* E_s *sur* K *et une application linéaire isométrique* $\varphi : E \to E_s$ *tels que :*

(*a*) E_s *est sphériquement complet;*

(*b*) *Si* $\varphi(E) \subset F \subset E_s$ *et que* F *soit sphériquement complet,* $F = E_s$.

L'espace E_s est déterminé par E à une isométrie près.

(3) *La famille des espaces de Banach sphériquement complet sur* K *(modulo la relation d'équivalence « isométrie linéaire bijective ») est en correspondance biunivoque avec la famille des applications* γ *de* $\mathbf{R}_+^* / |K^*|$ *dans la famille des nombres cardinaux.*

(4) *Pour que* P *soit projectif, il faut et il suffit que* P *soit isomorphe à un espace de type* $c(V \to K)$. *Cela est encore équivalent à : il existe un* $\rho \in \mathbf{R}$, $0 < \rho \leq 1$, *tel que* P *possède un* ρ*-base.*

Démonstration.

(1) *Voir* la démonstration de (2.1).

(2) Il existe un espace de Banach sphériquement complet F, et une isométrie linéaire $\varphi : E \to F$, par exemple

$$E \to \left(\prod E_n\right)/\sum\left(E_n\right), \qquad \text{où} \qquad E = E_n \text{ pour tout } n.$$

Soit E_s un sous-espace maximal de F, tel que $\varphi(E) \subset E_s$, et tel qu'il existe, pour tout $x \in E_s$, un $y \in E$ avec $\| x - \varphi(y) \| < \| x \|$. Il s'ensuit que E_s a les propriétés (a) et (b). Le reste est trivial.

(3) Soit γ donnée. Soit E un espace de Banach possédant une base orthogonale $\{ e_i \mid i \in I \}$ telle que

$$\operatorname{card}\left\{ i \in I \,\Big|\, \| e_i \| \bmod | K^* | = r \right\} = \gamma(r) \quad \text{pour tout } r \in \mathbf{R}_+^* / | K^* |.$$

On définit alors $E(\gamma) = E_s$. On montre aisément :

(a) $E(\gamma) \simeq E(\delta)$ (isométrique) $\Rightarrow \gamma = \delta$;

(b) Il existe, pour tout espace de Banach sphériquement complet E sur K, une γ telle que $E \simeq E(\gamma)$ (isométrique).

(4) La première assertion est une conséquence immédiate du théorème 2 de L. Gruson ([1], p. 295). La dernière est évidente.

Corollaire (2.3). — *Soient P et Q deux espaces de Banach sur K.*

(1) *Pour que P soit projectif, il faut et il suffit que* $\operatorname{Ext}^1(P, c(V \to K)) = 0$, *où* $\operatorname{card} V = \operatorname{card} P$.

(2) *Pour que Q soit injectif, il faut et il suffit que*

$$\operatorname{Ext}^1(E(\gamma), Q) = 0, \qquad \textit{où} \quad \gamma(r) = \operatorname{card} Q \quad \textit{pour tout } r \in \mathbf{R}_+^* / | K^* |.$$

Démonstration. — Dans (1) et (2), la nécessité est évidente. Vérifions la suffisance.

(1) Soit V un ensemble tel que $\operatorname{card} V = \operatorname{card} P$. Si $\operatorname{card} W \leq \operatorname{card} V$, l'espace $c(W \to K)$ est un facteur direct de $c(V \to K)$. Il en résulte que $\operatorname{Ext}^1(P, c(W \to K) = 0$ pour tout W avec $\operatorname{card} W \leq \operatorname{card} V$.

Soit $0 \to P_0 \to c(V \to K) \to P \to 0$ une résolution projective de P. Selon (2.2), P_0 est isomorphe à un espace $c\,(W \to K)$, où $\operatorname{card} W \leq \operatorname{card} V$. Donc $\operatorname{Ext}^1(P, P_0) = 0$. Cela veut dire que P est un facteur direct de $c(V \to K)$, et par suite P est projectif.

(2) La démonstration est analogue à celle de (1).

Remarque. — Tout $\operatorname{Ext}^1(A, B)$ possède la structure d'un espace vectoriel sur K. En général, on ne peut pas définir une norme canonique sur $\mathrm{Ext}^1(A, B)$. Remarquons ensuite que $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ est différent de $\mathrm{Ext}^1_S(A, B)$ et de $\mathrm{Ext}^1_T(A, B)$ construits par L. Gruson [1].

3. Classification catégorielle des corps valués non archimédiens.

Il est d'usage de classer les corps valués non archimédiens comme suit :

1° la valuation de K est discrète;

2° K est maximalement complet (= complet sphérique);

3° K n'est pas maximalement complet.

Bien entendu, 1° implique 2°. Dans ce paragraphe, on montre que cette classification reflète des propriétés catégorielles de $\mathcal{B}(K)$.

Théorème (3.1). — *Les propriétés suivantes de K sont équivalentes :*

(a) La valuation de K est discrète;

(b) Toute courte suite exacte propre dans $\mathcal{B}(K)$ se décompose;

(c) Tout objet de $\mathcal{B}(K)$ est injectif;

(d) Tout objet de $\mathcal{B}(K)$ est projectif.

Démonstration. — Un raisonnement bien connu montre l'équivalence de (*b*), (*c*) et (*d*).

(*a*) *implique* (*b*). Il suffit de démontrer que tout sous-espace fermé F de $E \in \mathcal{B}(K)$ est un facteur direct de E. D'après le lemme (1.3), on peut supposer que $\|E\| = |K|$. Soit G un sous-espace maximal de E, tel que $F \perp G$ (c'est-à-dire que $\|f + g\| = \max(\|f\|, \|g\|)$ pour tout $f \in F$, $g \in G$). Il est clair que G est fermé dans E. Supposons que $F + G \neq E$. Alors il existe un $x \in E \setminus F + G$. Comme $\|E\| = |K|$ est discret, il existe un $y \in F + G$ tel que $\|x - y\| = \inf \{ \|x - z\| \mid z \in F + G \}$. L'élément $x_1 = x - y$ satisfait à $F \perp (G + Kx_1)$. Ce qui est absurde, puisque G est maximal. Donc $F + G = E$. Compte tenu de $F \perp G$, on a : F est un facteur direct de E.

(*b*) *implique* (*a*). Toute suite exacte propre dans $\mathcal{B}(K)$ se décompose. Comme la suite exacte $0 \to K \xrightarrow{\alpha} E \to E/\alpha(K) \to 0$ se décompose, $E' \neq 0$ pour tout $E \in \mathcal{B}(K)$, $E \neq 0$. Prenons $E = b(\mathbf{N} \to K)/c(\mathbf{N} \to K)$ et $l \in E'$, $l \neq 0$. L'application $l : E \to K$ étant surjective, et compte tenu du lemme (1.2), le corps K est complet sphérique.

Par hypothèse, l'espace $c(\mathbf{N} \to K)$ est injectif; cela veut dire qu'il existe une norme équivalente $\| \, . \, \|'$ sur $c(\mathbf{N} \to K)$ telle que $(c(\mathbf{N} \to K), \| \, . \, \|')$ soit complet sphérique. L'espace $(c(\mathbf{N} \to K), \| \, . \, \|')$ possède une base orthogonale, selon [4] [théorème (2.1)]. Utilisant la proposition (2.4) de [4], on conclut que la valuation de K est discrète.

THÉORÈME (3.2). — *Les propriétés suivantes de K sont équivalentes :*

(*a*) *K est complet sphérique;*

(*b*) *K est un objet injectif de $\mathcal{B}(K)$;*

(*c*) *Pour tout $E \in \mathcal{B}(K)$, $E \neq 0$, le dual E' est différent de zéro;*

(*d*) *Le dual de $b(\mathbf{N} \to K)/c(\mathbf{N} \to K)$ est différent de zéro.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que (*d*) implique (*a*). Soit $l \neq 0$ une application linéaire continue :

$$b(\mathbf{N} \to K)/c(\mathbf{N} \to K) \to K.$$

Alors K, muni de la norme $\| . \|$ induite par l, est complet sphérique. Il est clair qu'il existe un $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$, tel que $\| \lambda \| = c \,|\, \lambda \,|$ pour tout $\lambda \in K$. Donc $(K, | . |)$ est complet sphérique.

4. Corps non complets sphériques.

Dans ce paragraphe, on suppose, sauf mention expresse du contraire, que le corps K n'est pas complet sphérique.

THÉORÈME (4.1). — *Soit $\{ A_d \mid d \in D \}$ un ensemble d'espaces de Banach sur K. Alors l'application canonique : $\left(\sum_{d \in D} A'_d\right) \to \left(\prod A_d\right)'$ est une isométrie bijective, lorsque* card (D) *est non mesurable.*

Démonstration. — Nous supposons que $A_d \neq 0$ pour tout $d \in D$ et que D soit infini. Tout $l \in \left(\prod A_d\right)'$ induit des éléments $l_d \in A'_d$. On montrera que $\lim \| l_d \| = 0$ suivant le filtre de Fréchet sur D. Supposons que $\lim \sup \| e_d \| \neq 0$. Alors il existe une suite $\{ d_n \mid n \in \mathbf{N} \} \subset D$ et une suite $e_n \in A_{d_n}$, telles que $l_{d_n}(e_n) = 1$ et que $\sup \| e_{d_n} \| < \infty$.

Soit $\psi : b(\mathbf{N} \to K) \to \prod_{d \in D} A_d$ l'application continue, définie par $\psi(f)_d = 0$ si $d \neq d_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\psi(f)_d = f(n)\, e_n$ si $d = d_n$.

On obtient ainsi une application linéaire continue $l \circ \psi : b(\mathbf{N} \to K) \to K$, telle que $l \circ \psi(a_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, où $a_n \in b\,(\mathbf{N} \to K)$ désigne l'élément $a_n(m) = \delta_{n,m}$. Ce qui est absurde, selon le lemme (4.2). Donc $\lim \| l_d \| = 0$.

Soit $m : \prod_{d \in D} A_d \to K$ l'application définie par

$$m(f) = \sum_{d \in D} l_d(f_d)$$

(la suite est convergente puisque $\sup \|f_d\| < \infty$ et $\lim \|l_d\| = 0$). L'application $l - m : \prod_{d \in D} A_d \to K$ a la propriété

$$\ker(l - m) \supset \sum_{d \in D} A_d.$$

Comme $\left(\prod_{d \in D} A_d \Big/ \sum_{d \in D} A_d\right)' = 0$ selon le lemme (4.3), si K n'est pas complet sphérique, on obtient $m = l$. Cela veut dire que $\left(\prod A_d\right)' = \sum A'_d$. Il nous reste à démontrer les lemmes suivants :

LEMME (4.2). — *Soit e_n l'élément de $b(\mathbf{N} \to K)$, défini par $e_n(m) = \delta_{n,m}$. Il n'existe pas une application linéaire continue $l : b(\mathbf{N} \to K) \to K$ telle que $l(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$*

Démonstration. — Soit $l : b(\mathbf{N} \to K) \to K$ une application linéaire continue telle que $l(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Considérons les éléments $a_1 = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ et $a_0 = (0, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ de $b(\mathbf{N} \to K)$. Soit

$$E = \{x \in b(\mathbf{N} \to K) \mid x(2n - 1) + x(2n) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\}.$$

L'application $\psi : E \to b(\mathbf{N} \to K)$, donnée par $\psi(x)(n) = x(2n - 1)$, est une isométrie bijective. On a

$$\psi(E \cap c(\mathbf{N} \to K)) = c(\mathbf{N} \to K).$$

Comme $l(E \cap c(\mathbf{N} \to K)) = 0$, l induit une application linéaire continue m : $b(\mathbf{N} \to K)/c(\mathbf{N} \to K) \to K$, donnée par $m(f + c(\mathbf{N} \to K)) = l \circ \psi^{-1}(f)$. Il s'ensuit que $m = 0$. Donc $l(a_1) = 0$. On démontre de même $l(a_0) = 0$. Ce qui est absurde, puisque $1 = l(e_1) = l(a_1 - a_0)$.

LEMME (4.3) (L. GRUSON). — $\left(\prod_{d \in D} A_d \Big/ \sum_{d \in D} A_d\right)' = 0$, *lorsque* $\operatorname{card}(D)$ *est non mesurable.*

Démonstration. — Les lemmes (1.1) et (1.2) démontrent (4.3) dans le cas où D est dénombrable. Supposons que $\left(\prod A_d / \sum A_d\right)' \neq 0$, alors il existe $u : \prod A_d \to K$ telle que $0 < \|u\| < \infty$ et $\ker u \supset \sum A_d$. Pour toute partie J de D, soit u_J la restriction de u à $\prod_{d \in J} A_d$. Soit F l'ensemble des parties J de D, telles que $\|u\| = \|u_J\|$. L'ensemble F contient D, ne contient pas $\emptyset$, et contient en même temps que J toute partie contenant J. Le cas dénombrable fournit, en outre, la propriété suivante :

Soit $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties deux à deux disjointes de D, dont la réunion appartienne à F. Alors l'ensemble des n, tels que $J_n \in F$, est fini et non vide.

Il résulte de là l'existence d'un élément de F qui n'est pas réunion disjointe de deux éléments de F. Quitte à remplacer D par cet élément, on peut donc supposer que F est un filtre; c'est alors un ultrafiltre libre, et $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$ pour toute suite $J_n \in F$. Ceci est absurde, puisque card (D) est non mesurable.

THÉORÈME (4.4). — *Pour tout ensemble non mesurable V, les espaces $c(V \to K)$ et $b(V \to K)$ sont réflexifs.*

Démonstration. — Le dual de $c(V \to K)$ est $b(V \to K)$ et, d'après (4.1), l'application canonique $c(V \to K) \to (b(V \to K))'$ est une isométrie bijective. Cela veut dire que $c(V \to K)$ est réflexif. De même, on montre que $b(V \to K)$ est réflexif.

Remarques.

1° Le théorème (4.4) montre que la théorie de la dualité d'espaces de Banach sur un corps non complet sphérique est totalement différente de celle d'espaces de Banach sur un corps complet sphérique. Si le corps K est complet sphérique, on a (*voir* [4], théorème 3.1) : Tout espace de Banach réflexif sur K a une dimension finie.

2° A l'aide de (4.1), on peut construire des espaces réflexifs. En effet, si tout A_d est réflexif, alors $\prod_{d\in D} A_d$ et $\sum_{d\in D} A_d$ sont réflexifs lorsque card(D) est non mesurable. Il est peut-être difficile de caractériser les espaces de Banach réflexifs.

3° Si K n'est pas complet sphérique, il existe un espace de Banach infini E sur K tel que E soit isomorphe à son dual. Par exemple, $E = c(V \to K) \oplus b(V \to K)$. Cela donne la possibilité de définir sur E une forme bilinéaire symétrique (,) telle qu'il existe, pour tout $l \in E'$, un élément $a \in E$, avec $l(x) = (x, a)$.

4° Un exemple facile d'un corps non maximalement complet est le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adique.

Je remercie L. GRUSON qui a corrigé mon manuscrit, et m'a communiqué la démonstration du lemme (4.3).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GRUSON (L.). — Catégories d'espaces de Banach ultramétriques, *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 287-299.
[2] HELLER (A.). — Homological algebra in abelian catagories, *Annals of Math.*, Series 2, t. 68, 1958, p. 484-525.
[3] INGLETON (A. W.). — The Hahn-Banach theorem for non-Archimedean valued fields, *Proc. Cambridge phil. Society*, t. 48, 1952, p. 41-45.
[4] MONNA (A. F.) et SPRINGER (T. A.). — Sur la structure des espaces de Banach non archimédiens, *Proc. Kon. nederl. Akad. van Wet.*, t. 68, 1965, p. 602-614.
[5] PUT (M. van der) et TIEL (J. van). — Espaces nucléaires non archimédiens, *Proc. Kon. nederl. Akad. van Wet.*, t. 70, 1967, p. 556-561.

(Texte reçu le 5 mai 1968,
révisé en janvier 1969.)

Marius VAN DER PUT,
Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit te Utrecht,
Universiteitscentrum De Uithof,
Budapestlaan,
Utrecht (Pays-Bas).