Bulletin de la S. M. F.

Marguerite Flexor-Mangeney

Étude de l'assassin du complété d'un anneau local noethérien

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 117-125
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__117_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 117 à 125.

ÉTUDE DE L'ASSASSIN DU COMPLÉTÉ D'UN ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN

PAR

M^{me} MARGUERITE FLEXOR-MANGENEY.

Soient A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Nous nous intéresserons à la comparaison de $\operatorname{Ass} A$ et de $\operatorname{Ass} \hat{A}$.

Par fidèle platitude, on a la relation

$$\operatorname{Ass} \hat{A} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \operatorname{Ass} \hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A},$$

de sorte que le problème est ramené au cas où A est intégre. Rappelons plusieurs résultats :

(1) Dire que $\hat{A}$ *est équidimensionnel* est équivalent à dire que A *est universellement caténaire* (*cf.* [7], ou le théorème 3).

(2) Si A est universellement japonais, $\hat{A}$ est réduit, et il en est de même pour toute A-algèbre locale de type fini réduite ([2], 7.6.4).

Nous nous intéresserons au problème suivant :

(P) $\hat{A}$ *est-il sans idéaux associés immergés* ?

Rappelons que, pour $\dim A = 1$, (1) est toujours vrai, $\hat{A}$ est réduit si et seulement si la clôture intégrale de A est finie, et (P) est toujours vrai. Nous supposerons par la suite $\dim A \geq 2$.

Nous allons donner quelques rappels de cohomologie locale ([2], § 5.9, ou [5]).

Soit X un schéma localement noethérien; nous dirons qu'une partie $\mathfrak{Z}$ de X est stable par spécialisation, si l'adhérence de toute partie finie de $\mathfrak{Z}$ est encore dans $\mathfrak{Z}$, ou encore, ce qui revient au même, que

$X - \mathfrak{Z} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, la famille $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ étant une famille filtrante décroissante d'ouverts. On construit alors un foncteur :

$$\mathcal{F} \to \mathcal{H}^0_{X/\mathfrak{Z}}(\mathcal{F}) = \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} (i_\alpha)_*(\mathcal{F} \mid U_\alpha)$$

sur la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules, i_α étant l'injection canonique : $U_\alpha \to X$. On vérifie que ce foncteur ne dépend pas de la famille U_α définissant $X - \mathfrak{Z}$.

On a alors le théorème et le corollaire suivants :

THÉORÈME 1 ([2], 5.11.1). — *Soient X un schéma localement noethérien, $\mathfrak{Z}$ une partie stable par spécialisation, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\mathcal{H}^0_{X/\mathfrak{Z}}(\mathcal{F})$ *est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.*

(*b*) *Pour tout $x \in \operatorname{Ass} F \cap (X - \mathfrak{Z})$* (nous désignerons encore par $\overline{\{x\}}$ le sous-schéma réduit de X, ayant $\overline{\{x\}}$ pour espace sous-jacent), *le $\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}}$-module $\mathcal{H}^0_{\overline{\{x\}}/Y \cap \overline{\{x\}}}(\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}})$ est cohérent.*

Elles impliquent la condition suivante :

(*c*) *Pour tout $x \in \operatorname{Ass} F \cap (X - \mathfrak{Z})$,*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{Z} \cap \overline{\{x\}}, \overline{\{x\}}) \geq 2$$

et lui sont équivalentes si X est localement immergeable dans un schéma régulier.

Gardons les notations $X = \operatorname{Spec} A$, $X' = \operatorname{Spec} \hat{A}$, $f : X' \to X$. Nous noterons $\mathfrak{Z}^{(k)}$ l'ensemble des x de X' tels que

$$\dim \mathcal{O}_{X', x} \geq k \qquad \text{et} \qquad A^k = \mathcal{H}^0_{X'/\mathfrak{Z}^{(k)}}(\mathcal{O}_{X'}).$$

On a alors le corollaire suivant

COROLLAIRE 1. — *Supposons A universellement caténaire, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La $\hat{A}$-algèbre A^1 est finie et contient $\hat{A}$;*

(ii) *Pour tout entier k tel que $\dim A \geq k \geq 2$, la $\hat{A}$-algèbre A^k est finie et contient $\hat{A}$;*

(iii) *$\hat{A}$ est sans idéaux associés immergés.*

En effet, dire que $\hat{A} \subset A^k$ est équivalent à dire que $\operatorname{Ass} \mathcal{O}_{X'} \cap \mathfrak{Z}^{(k)} = \emptyset$, et dire que A^k est fini est équivalent à dire, si X' est biéquidimensionnel, que $\mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{X'}$ n'a pas de cycle associé de codimension $k-1$. D'où le corollaire ci-dessus :

Corollaire 2. — *Supposons que la clôture intégrale A' de A soit une A-algèbre finie, et soit $Y = \mathrm{Spec}\,A$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout point fermé y de Y,* $\dim \mathcal{O}_{Y,y} \geqq 2$;

(2) *Pour tout* $z \in \mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{X'}$, $\dim \overline{\{z\}} \geqq 2$;

(3) *Pour tout point maximal z de X',* $\dim \overline{\{z\}} \geqq 2$;

(4) *Si $U = X - \{\mathfrak{m}\}$, alors l'homomorphisme*

$$A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} A_{\mathfrak{p}}$$

est fini.

Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2). Raisonnons par l'absurde. Nous avons le diagramme commutatif suivant;

$$\begin{array}{ccc} Y' = Y \times_X X' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Y' s'identifiant au spectre du complété de A'. Soit z un èlément de $\mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{X'}$ tel que $\dim \overline{\{z\}} = 1$. Soit K le corps des fractions de A. On a

$$Y' \times_Y \mathrm{Spec}\,K \simeq X' \times_X \mathrm{Spec}\,K,$$

donc

$$\mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{X'} \simeq \mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{Y'}$$

et, par suite, si z' est l'unique point de Y' au-dessus de z, $z' \in \mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{Y'}$. Comme le morphisme $Y' \to X'$ est entier, il en est de même du morphisme $\overline{\{z'\}} \to \overline{\{z\}}$, et par suite $\dim \overline{\{z'\}} = 1$. Il existe donc un point fermé y' de Y' tel que $z' \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y',y'}$ et que

$$\dim \overline{\{z'\}} = \dim_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y',y'})} \overline{\{z'\}} = 1.$$

Comme $z' \in \mathrm{Ass}\,\mathcal{O}_{Y',y'}$, on a $\mathrm{prof}\,\mathcal{O}_{Y',y'} = 1$ (*cf.* [1], chap. 0, 16.4.6.3).

Soit y la projection de y' sur Y; y est un point fermé de Y. Comme $Y' \to Y$ est fidèlement plat, $\mathrm{prof}\,\mathcal{O}_{X,y} = 1$, et comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est intégralement clos, $\dim \mathcal{O}_{Y,y} = 1$, d'après le critère de Serre.

(2) $\Rightarrow$ (3) est évident.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soient $y_1, \ldots, y_r$ les points fermés de Y, et soient $y'_1, \ldots, y'_r$ leurs images réciproques dans Y'. On a $Y' = \bigcup_{i=1} Y'_i$ (somme disjointe),

où $Y'_i = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{y'_i}$. Supposons qu'il existe un i tel que $\dim \mathcal{O}_{Y,y_i} = 1$. Alors $\dim \mathcal{O}_{Y'_i} = 1$. Soit $z' \in \operatorname{Ass} \mathcal{O}_{Y'_i}$. On a

$$\dim_{Y'_i}(\overline{\{z'\}}) = \dim \overline{\{z'\}} = 1$$

et z' est nécessairement un point maximal de Y'_i, donc de Y'. Comme $Y \times_Y \operatorname{Spec} K \simeq X' \times_X \operatorname{Spec} K$, si z est la projection de z' dans X', z est encore un point maximal de X', et $\dim \overline{\{z\}} = 1$ puisque $\overline{\{z'\}} \to \overline{\{z\}}$ est un morphisme entier.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) découle du corollaire suivant :

Corollaire 3 ([2], 7.2.2). — *Soit U l'ouvert complémentaire du point fermé de X. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A(U)$ *est fini;*

(2) *Pour tout* $x \in \operatorname{Ass} \mathcal{O}_{X'}$, $\dim \overline{\{x'\}} \geqq 2$.

Ces corollaires montrent, dans des cas particuliers, l'intérêt du foncteur $\mathcal{H}^0_{X/\mathfrak{Z}}(\mathcal{O}_X)$ pour des parties $\mathfrak{Z}$ convenablement choisies, dans l'étude du problème (P) envisagé précédemment. Nous allons voir qu'en fait le problème (P) est équivalent au problème suivant :

(P′) *Soit A un anneau local intègre noethérien unibranche, de dimension $\geqq 2$. Soient $X = \operatorname{Spec} A$ et U l'ouvert complémentaire du point fermé. L'homomorphisme $A \to A(U)$ est-il fini ?*

Pour voir cette équivalence, nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant. Nous reprenons les hypothèses et notations du début.

Proposition 1. — *Soit $z \in \operatorname{Ass} \mathcal{O}_{X'}$. Il existe un schéma affine local Y et un élément z' de $\operatorname{Ass} \mathcal{O}_{Y'}$, où Y' est le spectre du complété de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, tels que :*

1° *il existe un morphisme $Y \to X$ essentiellement de type fini et birationnel;*

2° *Soient x et y les points fermés respectifs de X et Y; l'homomorphisme $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_y$ est local;*

3° $\dim \mathcal{O}_{X',z} = \dim \mathcal{O}_{Y',z'}$, *et* $\dim_{Y'}(\overline{\{z'\}}) = 1$.

Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal premier associé à z. L'anneau $C = \hat{A}/\mathfrak{q}$ est un anneau local intègre, d'idéal maximal $\mathfrak{m}C$. Soit $(u = u_1, u_2, \ldots, u_r)$ un système de générateurs non nuls de $\mathfrak{m}$, et considérons la sous-C-algèbre $C' = C[u_2/u, \ldots, u_r/u]$ de $C \otimes_A K$. Comme $A \subset C$, on voit que le morphisme de A-modules $\hat{A} \to C'$ se factorise en

$$\hat{A} \to \hat{A} \otimes_A A[u_2/u, \ldots, u_r/u] \to C',$$

le dernier homomorphisme étant surjectif. Posons

$$B_0 = A[u_2/u, \ldots, u_r/u], \qquad B'_0 = \hat{A} \otimes_A B_0.$$

Soit $\mathfrak{p}'_0$ le noyau de $B'_0 \to C'$, de sorte que $B'_0/\mathfrak{p}'_0 \simeq C'$, donc $\mathfrak{p}'_0$ est un idéal premier, et il est immédiat que $\mathfrak{p}'_0 \cap \hat{A} = \mathfrak{q}$. De plus, on a $\mathfrak{m}C' = uC'$. Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C' minimal contenant uC', donc $\dim C'_{\mathfrak{r}} = 1$. Soient $\mathfrak{n}'_0$ l'image réciproque de $\mathfrak{r}$ dans B'_0, et $\mathfrak{n}_0$ la trace de $\mathfrak{n}'_0$ dans B_0. Comme $uB_0 = \mathfrak{m}B_0$ et que $\hat{A}/\mathfrak{m}^n\hat{A} \simeq A/\mathfrak{m}^n$ on voit que

$$B_0/u^n B_0 \simeq B'_0/u^n B'_0.$$

Ainsi $\mathfrak{n}'_0$ est le seul idéal premier de B'_0 au-dessus de $\mathfrak{n}_0$, et $\mathfrak{n}'_0 = \mathfrak{n}_0 B_0$. De plus, $\mathfrak{n}_0 \cap A = \mathfrak{m}$.

Posons $B = (B_0)_{\mathfrak{n}_0}$, $B' = (B \otimes_A \hat{A})_{\mathfrak{n}'_0}$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'_0 B'$, $n = \mathfrak{n}_0 B$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}B'$. *Alors le couple d'anneaux locaux* (B, B') *possède les propriétés suivantes :*

(*a*) *Il existe un idéal premier* $\mathfrak{p}'$ *de* B' *tel que* $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}_{B'} B'$,

$$\dim B'_{\mathfrak{p}'} = \dim \hat{A}_{\mathfrak{q}} \qquad et \qquad \dim B'/\mathfrak{p}' = 1\,;$$

(*b*) *L'homomorphisme* $B \to B'$ *est fidèlement plat,* B *et* B' *ont même corps résiduel et même complété.*

En effet, $B' \otimes_B K$ est un localisé de $\hat{A} \otimes_A K$, ce qui montre que

$$\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}\, B' \qquad \text{et que} \qquad \dim B'_{\mathfrak{p}'} = \dim \hat{A}_{\mathfrak{q}}.$$

D'où (*a*), puisque $B'/\mathfrak{p}' \simeq C'_{\mathfrak{r}}$.

L'homomorphisme $B \to B'$, se déduisant de l'homomorphisme $A \to \hat{A}$ par extension de la base, est donc fidèlement plat. Comme $B/u^n B \simeq B'/u^n B'$, on a

$$B/\mathfrak{n}^n \simeq B'/\mathfrak{n}^n B' \simeq B'/\mathfrak{n}'^n,$$

d'où (*b*).

Terminons la démonstration de la proposition 1. L'homomorphisme $B \to B/\mathfrak{n}^n$ se factorisant par $B \to B' \to B/\mathfrak{n}^n$, on voit que $B \to \hat{B}$ se factorise en $B \to B' \to \hat{B}$. Soit $\mathfrak{q}'$ un idéal premier de $\hat{B}$ minimal contenant $\mathfrak{p}'\hat{B}$. Comme $B' \to \hat{B}$ est fidèlement plat, $\dim \hat{B}_{\mathfrak{q}'} = \dim B'_{\mathfrak{p}'}$ et $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Ass}\,\hat{B}$. De même, $B'/\mathfrak{p}' \to \hat{B}/\mathfrak{p}\hat{B}$ étant fidèlement plat et local, $\dim \hat{B}/\mathfrak{p}'\hat{B} = 1$, donc $\dim \hat{B}/\mathfrak{p}' = 1$. D'où la proposition, en prenant pour $Y = \mathrm{Spec}\, B$ et pour z' le point de Y' associé à l'idéal premier $\mathfrak{q}'$.

THÉORÈME 2. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{O}_{X'}$ *est sans cycles associés immergés;*

(ii) *pour tout schéma local affine intègre essentiellement de type fini Y au-dessus de X, tel que :*

(*a*) *si x et y sont les points fermés de X et de Y, l'homomorphisme* $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_y$ *est local,* $\mathcal{O}_y$ *est unibranche, et* $\dim \mathcal{O}_y \geqq 2$;

(*b*) $Y \to X$ *est birationnel.*

Alors si $U = Y - \{ y \}$, *l'homomorphisme canonique* $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ *est fini.*

Avant de montrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant :

Lemme 1. — *Soit A un anneau local intègre noethérien unibranche de dimension* $\geqq 2$. *Soit U' l'ouvert complémentaire du point fermé de* $\operatorname{Spec} \hat{A}$. *Alors U' est connexe.*

Soient $X = \operatorname{Spec} A$, $U = X - \{ \operatorname{rad} A \}$, A' la clôture intégrale de A, $Y = \operatorname{Spec} A'$, $V = Y - \{ \operatorname{rad} A' \}$, $\varphi : Y \to X$. Comme $\varphi^{-1}(U) = V$, puisque A est unibranche, et que $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$, l'anneau $A(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est contenu dans $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = A'(V)$. Comme A' est un anneau de Krull, on sait que $A'(V) \simeq A'$, et par suite, $A(U)$ est entier et local. On peut donc décrire $A(U)$ comme une limite inductive de A-algèbres locales finies A_λ. Par conséquent, $\hat{A}(U') = A(U) \otimes_A \hat{A} = \varinjlim \hat{A}_\lambda$. Comme $\hat{A}_\lambda$ est local, $\hat{A}(U')$ est local, et par suite U' est connexe.

Revenons à la démonstration du théorème. Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Posons

$$Y = \operatorname{Spec} B, \qquad Y' = Y \times_X X', \qquad Y' = \operatorname{Spec} B', \qquad Z = \operatorname{Spec} \hat{B}.$$

Comme Y est essentiellement de type fini, Y' est localement noethérien. Comme $Y' \times_Y \operatorname{Spec} K \simeq X' \times_X \operatorname{Spec} K$, où K est le corps des fractions de A, on voit que $\operatorname{Ass} \mathcal{O}_{X'} \simeq \operatorname{Ass} \mathcal{O}_{Y'}$ donc $\mathcal{O}_{Y'}$ est sans cycles associés immergés. L'hypothèse « $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_y$ est un homomorphisme local » entraîne que B et B' ont même complété, donc $Z = \operatorname{Spec} \hat{B}'$. D'autre part, comme X' est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier, il en est de même de Y'. On sait alors ([2], 6.3.8) que les fibres du morphisme $Y' \to Z$ sont des schémas de Cohen-Macaulay. Il en résulte que $\mathcal{O}_Z$ est sans cycle associé immergé.

Comme $\mathcal{O}_y$ est unibranche, le lemme 1 montre que, pour tout point maximal z de Z, on a $\dim_Z \overline{\{ z \}} \geqq 2$ (sinon z serait isolé dans $Z - \{ \operatorname{rad} \hat{B} \}$). On termine en appliquant le corollaire 3 du théorème 1.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). A l'aide de ce même corollaire et de la proposition 1, on aura montré l'assertion, si l'on peut supposer, de plus, $\mathcal{O}_{Y,y}$, unibranche dans la proposition 1. En effet, (*cf.* loc. cit.) si $\dim \mathcal{O}_{X',z} \geqq 1$, on a $\dim \mathcal{O}_{Y',y'} \geqq 2$, y' étant le point fermé de Y', et par conséquent $\dim \mathcal{O}_y \geqq 2$.

LEMME 2. — *En gardant les notations et hypothèses de la proposition* 1, *on peut supposer* $\mathcal{O}_y$ *unibranche.*

En effet, si C est la clôture intégrale de l'anneau intègre local B tel que $Y = \operatorname{Spec} B$, on sait qu'il existe une B-algèbre finie B_1 telle que le morphisme $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} B_1$ soit un homéomorphisme ([1], chap. 0, 23.2.5). Comme $\hat{B}_1$ s'identifie à $B_1 \otimes_B \hat{B}$ et que $B_1 \otimes_B K \simeq \hat{B} \otimes_B K$, on voit qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}_1$ de $\operatorname{Ass} \hat{B}_1$ tel que

$$\mathfrak{q}_1 \cap \hat{B} = \mathfrak{q}' \qquad \text{et} \qquad B_{\mathfrak{q}'} \simeq (\hat{B}_1)_{\mathfrak{q}_1}.$$

Comme $\hat{B}_1/\mathfrak{q}_1$ est entier sur $\hat{B}/\mathfrak{q}'$, on a $\dim \hat{B}_1/\mathfrak{q}_1 = 1$. Soit $\mathfrak{n}'_1$ un idéal maximal de $\hat{B}_1$ tel que $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{n}'_1$. On sait que $\mathfrak{n}'_1$ est de la forme $\mathfrak{n}_1 B_1$, où $\mathfrak{n}_1$ est un idéal maximal de B_1. Alors l'anneau $(B_1)_{n1}$ est unibranche, et vérifie la conclusion de la proposition 1.

Donnons, pour terminer, une démonstration du résultat précédemment cité de Ratliff, basée sur le lemme 1 du théorème 2.

THÉORÈME 3. — *Soit A un anneau local intègre noethérien. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est universellement caténaire;*

(ii) *$\hat{A}$ est équidimensionnel.*

[Pour (ii) $\Rightarrow$ (i), *voir* [2], 7.1.11.] Nous ne montrerons que l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, nous allons procéder en plusieurs étapes.

(*a*) *Réduction au cas où A est un anneau hensélien.* — Soit C la clôture intégrale de A, et soit A' une A-algèbre finie telle que $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} A'$ soit un homéomorphisme ([1], chap. 0, 23.2.5). Comme A est universellement caténaire, il en est de même de A', et on a, pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de A',

$$\dim A'_n = \dim A \quad ([2], 5.6.10).$$

Soient $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ les idéaux maximaux de A', $C_i = A'_{\mathfrak{n}_i}$, donc $\dim C_i = \dim A$ et $\hat{A}' = \Pi\, \hat{C}^i$. Posons $\mathfrak{n}'_i = n_i \hat{A}'$. Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$. Comme le morphisme $\hat{A} \to \hat{A}'$ est entier, il existe un élément $\mathfrak{p}'$ de $\operatorname{Spec} \hat{A}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ et, si $\mathfrak{p}$ est minimal, il en est de même de $\mathfrak{p}'$. D'autre part, si $\mathfrak{n}'_i \supset \mathfrak{p}'$, on a

$$\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = \dim \hat{A}'/\mathfrak{p}' = \dim \hat{C}_i/\mathfrak{p}' \hat{C}_i,$$

la dernière égalité ayant lieu puisque $\hat{A}/\mathfrak{p}$ est universellement caténaire et intègre, et que $\hat{A}'/\mathfrak{p}'$ est fini sur $\hat{A}/\mathfrak{p}$ (*cf.* [2], 5.6.10).

Pour démontrer que $\hat{A}$ est équidimensionnel, on est donc ramené à démontrer que $\hat{C}_i$ est équidimensionnel, c'est-à-dire au cas où l'anneau de départ est unibranche. Mais alors si A est unibranche, le henselisé ${}^hA$ de A est intègre et universellement caténaire ([3], 18.7.5). Comme ${}^hA$ et A ont même complété, on peut supposer A hensélien.

(*b*) *Supposons qu'il existe un idéal premier minimal* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$ *tel que* $\dim \hat{A}/\mathfrak{q} < \dim A$. *Alors, on peut même supposer* $\dim \hat{A}/\mathfrak{q} = 1 < \dim A$. — Supposons $\dim \hat{A}/\mathfrak{q} \geqq 2$. Soient $X' = \operatorname{Spec} \hat{A}$, $X = \operatorname{Spec} A$, $f : X' \to X$. Regardons la partie F de $Z = V(\mathfrak{q})$, constituée par les points de Z de codimension 1 et n'appartenant pas à $f^{-1}(0)$. Autrement dit, un idéal premier $\mathfrak{p}$ appartient à F, si $\mathfrak{p}$ est minimal pour la propriété de contenir un idéal de la forme $\mathfrak{q} + u\hat{A}$, où u est un élément non nul de A. Comme $\dim \hat{A}/\mathfrak{q} \geqq 2$, $\mathfrak{m}\hat{A}$ n'est pas dans F, et F est infini, sinon $\mathfrak{m}\hat{A}$ serait contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers différents de lui-même.

Soient Z_i les composantes irréductibles de X', différentes de Z. On a $F \cap Z_i \subset Z \cap Z_i$. Comme $\operatorname{codim} Z \cap Z_i \geqq 1$, $F \cap Z_i$ est ou vide ou composé de points génériques de composantes irréductibles de $Z \cap Z_i$, et par suite $F \cap Z_i$ est fini.

Par conséquent, il existe un point de F n'appartenant à aucun des $F \cap Z_i$. Soit $\mathfrak{q}'$ l'idéal premier de $\hat{A}$ associé à ce point. On a $\dim \hat{A}_{\mathfrak{q}'} = 1$. De plus, si $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ est différent de (0), $\mathfrak{q}'$ est minimal, contenant $\mathfrak{p}\hat{A}$, et $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$. Comme A est intègre et caténaire, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$. D'autre part, pour des raisons identiques,

$$\dim \hat{A}/\mathfrak{q}' = \dim \hat{A}/\mathfrak{q} - 1 \qquad \text{et} \qquad \dim \hat{A}/\mathfrak{q}' < \dim A/\mathfrak{p} - 1.$$

Posons $B = A/\mathfrak{p}$, alors $\dim B < \dim A$, B est encore hensélien, et $\hat{B}$ n'est pas équidimensionnel. D'où, par récurrence, la réduction annoncée.

(*c*) *Fin de la démonstration.* — Comme $\dim A \geqq 2$, et comme A est unibranche, il suffit d'appliquer le lemme 1. En effet, sinon $\{\mathfrak{q}\}$ serait isolé dans $X' - \{\operatorname{rad} \hat{A}\}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Grothendieck (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Première partie). — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 20).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean DIEUDONNÉ. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Seconde partie). — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 24).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean DIEUDONNÉ. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Quatrième partie). — Paris Presses universitaires de France, 1967 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 32).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). — Cohomologie locale des faisceaux cohérents..., *Séminaire de géométrie algébrique*, 2e année, fasc. 1. — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1962.

[5] HARTSHORNE (Robin). — *Local cohomology*. A seminar given by A. GROTHENDIECK, Harvard University, 1961. — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, 41).

[6] NAGATA (Masayoshi). — *Local rings*. — New York. Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).

[7] RATLIFF (L. J.). — A characterization of analytically unramified semilocal rings and applications, *Pacific J. of Math.*, t. 27, 1968, p. 127-143.

[8] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 1. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958 (*The University series in higher mathematics*).

(Texte reçu le 30 juin 1969.)

Mme Marguerite FLEXOR-MANGENEY,
85, rue Racine, 92-Montrouge.