BULLETIN DE LA S. M. F.

S. WOLFENSTEIN

Extensions archimédiennes de groupes réticulés transitifs

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 193-200
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__193_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 193 à 200.

EXTENSIONS ARCHIMÉDIENNES DE GROUPES RÉTICULÉS TRANSITIFS

PAR

SAMUEL WOLFENSTEIN.

Dans cet article, G désignera toujours un groupe réticulé. On dit que deux éléments, x et y, de G sont *archimédiennement équivalents*, s'il existe des entiers rationnels, m et n, tels que $|x|^m \leqq |y|$ et $|y|^n \leqq |x|$. Si G est un l-sous-groupe d'un groupe réticulé G' (c'est-à-dire un sous-groupe de G' qui en est en même temps un sous-treillis), on dit que G' est une *extension archimédienne* de G, si G' est le saturé de G pour la relation d'équivalence archimédienne. Un groupe réticulé, qui n'admet pas d'extension archimédienne propre, est dit *archimédiennement complet.* On remarquera que, si G est un l-sous-groupe d'un groupe réticulé H, alors, dans l'ensemble des l-sous-groupes de H, les extensions archimédiennes de G forment une famille $\bigcup$-inductive; ainsi (moyennant le théorème de Zorn), G admet toujours une extension archimédienne maximale dans H. En utilisant ce fait, P. CONRAD, qui, le premier, a introduit ces notions [2], montre que tout groupe réticulé commutatif admet une extension archimédienne maximale dans la classe des groupes réticulés commutatifs. En réalité, une telle extension maximale est archimédiennement complète [5]; ainsi, tout groupe réticulé commutatif admet un *complété archimédien*, c'est-à-dire une extension archimédienne qui, elle, est archimédiennement complète. Ce résultat a été généralisé par R. BYRD, dans un travail non publié [1], à une classe plus large de groupes réticulés, que nous avons appelé la classe de groupes à valeurs normales (*voir* [6] pour la définition de cette classe de groupes réticulés, et pour d'autres résultats les concernant).

Nous considérons ici les extensions archimédiennes de groupes réticulés, qui n'entrent pas, en général, dans la classe de groupes à valeurs normales. Soit T un ensemble totalement ordonné; notons Aut T, le groupe des automorphismes de T, ordonné de la façon suivante : $x \leqq y$ si, et seulement si, $x(t) \leqq y(t)$, pour t de T. Alors on sait [4] que $\operatorname{Aut} T$ est un groupe réticulé, et que tout groupe réticulé est, pour un T convenable, isomorphe à un l-sous-groupe de $\operatorname{Aut} T$. S'il existe un ensemble totalement ordonné T, tel que G est isomorphe à un l-sous-groupe transitif de $\operatorname{Aut} T$, nous dirons que G est un *groupe réticulé transitif*. Nous montrerons que la classe des groupes réticulés transitifs est stable par les extensions archimédiennes (théor. 1). En plus, si G est un l-sous-groupe transitif de $\operatorname{Aut} T$, nous montrerons que G admet un complété archimédien, pourvu que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit vérifiée :

1° *T est conditionnellement complet* (théor. 2);

2° *G est doublement transitif*, c'est-à-dire que, pour tout couple d'intervalles $]t_1, t_2[$ et $]t_3, t_4[$ de T, il existe un g de G, tel que $g(t_1) = t_3$ et $g(t_2) = t_4$ (théor. 3).

Enfin, comme une application intéressante de ces résultats, nous montrerons que si $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Q}$) désigne l'ensemble des nombres réels (resp. rationnels), avec l'ordre habituel, alors $\operatorname{Aut} \mathbf{R}$ est archimédiennement complet, et c'est (à un isomorphisme près) l'unique complété archimédien de $\operatorname{Aut} \mathbf{Q}$.

Nous supposons connus les faits essentiels concernant les groupes réticulés, qui sont exposés dans [3], ainsi que les résultats de [2]. Toutefois, pour la commodité de la lecture, nous rappelons ici une partie de ces notions et de ces résultats.

Si X est une partie quelconque de G, on note $G(X)$ le l-sous-groupe convexe de G engendré par X; et on note $\mathcal{C}(G)$ le treillis des l-sous-groupes convexes de G. G étant un l-sous-groupe de G', les conditions suivantes sont équivalentes :

1° *G' est une extension archimédienne de G;*

2° *L'application $C \mapsto G'(C)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{C}(G)$ sur $\mathcal{C}(G')$;*

3° *L'application $C' \mapsto C' \cap G$ définit un isomorphisme de $\mathcal{C}(G')$ sur $\mathcal{C}(G)$* ([2], théor. 2.1).

On remarquera qu'on a, en tout état de cause, $G'(C) \cap G = C$, pour tout C de $\mathcal{C}(G)$.

Un sous-groupe P de G est appelé *sous-groupe premier*, si c'est un l-sous-groupe convexe, et s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(*a*) *Les éléments de $\mathcal{C}(G)$, qui contiennent P, forment une chaîne;*

(*b*) *Les classes à gauche de P sont totalement ordonnées par la relation : $xP \leqq yP$ si, et seulement si, il existe un z de P, tel que $x \leqq yz$* ([3], théor. 1.7, qui cite d'ailleurs d'autres conditions équivalentes).

Pour que G soit transitif, il faut et il suffit que G admette un sous-groupe premier P, tel que l'intersection de tous les conjugués de P se réduit à l'élément neutre. S'il en est ainsi, on peut identifier G avec un l-sous-groupe transitif de $\operatorname{Aut} T$, où T est l'ensemble ordonné des classes à gauche de P ([3], théor. 1.11).

Ces résultats nous permettent d'établir notre premier théorème :

THÉORÈME 1. — *Toute extension archimédienne d'un groupe réticulé transitif est transitive. Plus précisément, soient T un ensemble totalement ordonné, G un l-sous-groupe transitif de* $\operatorname{Aut} T$, *G' une extension archimédienne de G. Alors il existe un ensemble totalement ordonné T', qui contient T, tel que T n'est, ni strictement majoré, ni strictement minoré, dans T', et il existe un monomorphisme $u : G' \to \operatorname{Aut} T'$, tel que $u(G')$ est un l-sous-groupe transitif de* $\operatorname{Aut} T'$, *et que, pour chaque g de G, la restriction de $u(g)$ à T est égale à g.*

Démonstration. — On peut supposer que T est composé des classes à gauche d'un sous-groupe premier P de G, dont l'intersection des conjugués se réduit à l'élément neutre. Posons $G'(P) = P'$. Alors, en utilisant la condition 2° pour la définition d'une extension archimédienne, et la condition (a) pour celle d'un sous-groupe premier, on voit que P' est un sous-groupe premier de G', donc que l'ensemble T' des classes à gauche de P' est totalement ordonné. L'application $gP \mapsto gP'$ définit une injection de T dans T'. En effet, si, pour $g_1, g_2 \in G$, $g_1 P' = g_2 P'$, alors $g_1^{-1} g_2 \in P' \cap G$. Mais $P' \cap G = P$, donc $g_1 P = g_2 P$, et l'application est bien injective. Nous identifierons dans la suite les éléments de T avec les éléments correspondants de T'.

Montrons que T n'est, ni strictement majoré, ni strictement minoré, dans T'. Pour cela, soit g' un élément quelconque de G'; on verra qu'il existe $t_1, t_2 \in T$, tels que $t_1 \leqq g' P' \leqq t_2$. En effet, par hypothèse, il existe un élément g de G archimédiennement équivalent à g', et on peut supposer g positif (sinon on n'a qu'à prendre $|g|$, qui est archimédiennement équivalent à g). Alors on a, pour un entier rationnel n convenable, $g^{-n} \leqq g' \leqq g^n$, donc

$$g^{-n} P' \leqq g' P' \leqq g^n P'.$$

Si on note $u : G' \to \operatorname{Aut} T'$, l'application canonique définie en posant $(u(x))(yP') = xyP'$, pour tout $x, y \in G'$, on vérifie immédiatement que u définit un homomorphisme (de groupes réticulés) et que, pour tout g de G, la restriction de $u(g)$ à T est égale à g. Puisque, d'autre part, il est clair que $u(G')$ est un l-sous-groupe transitif de $\operatorname{Aut} T'$, il ne reste, pour achever la démonstration du théorème, qu'à montrer que l'application u est injective. Or on sait que $\operatorname{Ker} u$ est l'intersection de tous les conjugués de P'. Posons

$$M = \bigcap_{g \in G} g^{-1} P' g.$$

Alors M est un l-sous-groupe convexe de G', et on a

$$\begin{aligned} M \cap G &= \bigcap_{g \in G} (g^{-1} P' g \cap G) \\ &= \bigcap_{g \in G} g^{-1} (P' \cap G) g \\ &= \bigcap_{g \in G} g^{-1} P g \\ &= \{ e \}. \end{aligned}$$

Puisque G' est une extension archimédienne de G, il résulte de la condition 3° que $M = \{ e \}$; à plus forte raison, $\bigcap_{g \in G'} g^{-1} P' g = \{ e \}$, et u est injective.

Dans la suite de cet article, on supposera toujours que G, G', T *et* T' *vérifient les conditions du théorème* 1. Nous cherchons des conditions pour que T' soit égal à T, ou au moins qu'il soit contenu dans un ensemble déterminé par T, ce qui nous permettra d'établir l'existence d'un complété archimédien de G.

LEMME 1. — *Supposons que* $T' \neq T$, *et soit* S *une partie convexe de* T', *maximale entre celles qui ne rencontrent pas* T. *Alors, pour tout* g *de* G, $g(S) \subset S$, *si, et seulement si,* $g(S) = S$.

Démonstration. — Soit T_1 (resp. T_2) l'ensemble des éléments de T' qui minorent (resp. majorent) strictement chaque élément de S. D'après le théorème 1, ni T_1 ni T_2 n'est vide, et on a la partition de T' en parties convexes : $T' = T_1 \cup S \cup T_2$. Posons

$$\begin{aligned} K &= \{ g \in G' ;\, g(T_1) = T_1 \}, \\ L &= \{ g \in G' ;\, g(T_1 \cup S) = T_1 \cup S \}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que K et L sont des l-sous-groupes convexes de G'. On va montrer que $L \cap G = K \cap G$.

En effet, soient g un élément positif de $L \cap G$, et t' un élément quelconque de T_1. Alors, d'après la définition de S et de T_1, il existe un élément t de $T_1 \cap T$, tel que $t' \leqq t$. On a

$$g(t) \in (T_1 \cup S) \cap T = T_1 \cap T \subset T_1.$$

Ainsi $g(t') \in T_1$. Cela étant vrai pour chaque t' de T_1, on a $g(T_1) \subset T_1$, ce qui implique, puisque g est positif, $g(T_1) = T_1$.

Réciproquement, soit g un élément positif de G qui n'appartient pas à L. Alors, il existe un élément s de S tel que $g(s) \in T_2$. D'après la définition de T_2, il existe un t de $T_2 \cap T$ tel que $t \leqq g(s)$. Posons $t_1 = g^{-1}(t)$. On a $t_1 \in T$, $t_1 < s$, donc $t_1 \in T_1$. Mais $g(t_1) = t \notin T_1$, donc $g \notin K$.

Cela montre que le cône positif de $L \cap G$ coïncide avec celui de $K \cap G$. Mais, puisqu'un groupe réticulé est engendré, en tant que groupe, par son cône positif, cela implique que $L \cap G = K \cap G$, comme nous avons proposé de démontrer. Enfin, en utilisant la condition 3° pour la définition d'une extension archimédienne, nous avons $L = K$.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme. En effet, soit $g \in G'$, tel que $g(S) \subset S$. Alors $g \vee e \in L$, donc $(g \vee e)(T_1) = T_1$, d'où $g(T_1) \subset T_1$. De la même façon, on pourra montrer que $g(T_2) \subset T_2$. Il en résulte que $S \subset g(S)$, donc $g(S) = S$.

Rappelons qu'une partie S de T est dite dense dans T, si chaque intervalle $]t, t'[$ de T, avec $t < t'$, contient un élément de S; en particulier, T est dense dans lui-même, ou simplement « dense », si aucun intervalle $]t, t'[$ de T n'est vide.

LEMME 2. — *Supposons que T est dense, et soient $t \in T$, $t' \in T'$, tels que $t < t'$ (resp. $t' < t$). Alors l'intervalle $]t, t'[$ (resp. $]t', t[$) de T' contient un élément de T.*

Démonstration. — Nous nous bornerons au cas où $t < t'$. Supposons donc qu'il en est ainsi, et que l'intervalle $]t, t'[$ de T ne contient aucun élément de T. Soit S la réunion de toutes les parties convexes de T' qui contiennent t' et qui ne rencontrent pas T. Alors S vérifie les hypothèses du lemme 1, et, avec la notation de la démonstration précédente, t est l'élément maximal de T_1. Or, G' étant transitif, il existe un élément positif g de G', tel que $g(t) = t'$, donc $g(S) \neq S$. Alors, par le lemme précédent, il existe un s de S, tel que $g(s) > S$. D'après la définition de S, cela veut dire qu'il existe un élément t_1 de T, tel que $g(s) \geqq t_1$ et $t_1 > S$. On a donc $t' < t_1 \leqq g(s)$, d'où

$$t < g^{-1}(t_1) \leqq s \qquad \text{et} \qquad g^{-1}(t_1) \in S.$$

On utilise maintenant l'hypothèse que T est dense et que, par conséquent, il existe $t_2 \in T$, tel que $t < t_2 < t_1$. G étant transitif, il existe $h \in G$, tel que $h(t) = t_2$. Alors $h^{-1}(t_1)$ est un élément de T strictement plus grand que t, donc il majore strictement tout élément de S, et nous avons

$$t = h^{-1}(t_2) < S < h^{-1}(t_1),$$
$$t_2 < h(S) < t_1,$$
$$g^{-1}(t_2) < g^{-1}(h(S)) < g^{-1}(t_1).$$

D'autre part, puisque $t' < t_2 < t_1$, nous avons

$$t = g^{-1}(t') < g^{-1}(t_2) < g^{-1}(t_1) \in S.$$

Il en résulte que $g^{-1}(t_1)$ et $g^{-1}(t_2)$ sont tous les deux dans S, donc $g^{-1}(h(S)) \subset S$. Donc, d'après le lemme 1, $g^{-1}(h(S)) = S$.

Mais, d'autre part,

$$t = g^{-1}(t'),$$
$$t < g^{-1}(t_2),$$
$$t = g^{-1}(h(t)),$$
$$t < g^{-1}(h(t')) \in S.$$

$g^{-1}(h(t))$ étant strictement compris entre t et un élément de S, nous avons $g^{-1}(h(t)) \in S$, ce qui est une contradiction puisque $t \notin S$.

On dira qu'un ensemble totalement ordonné T est homogène, si le groupe $\operatorname{Aut} T$ est transitif.

THÉORÈME 2. — *Soient T un ensemble homogène, dense et conditionnellement complet, G un l-sous-groupe transitif de* $\operatorname{Aut} T$. *Alors, toute extension archimédienne de G est isomorphe à un l-sous-groupe transitif de* $\operatorname{Aut} T$ *qui contient G. Ainsi G admet un complété archimédien. En particulier,* $\operatorname{Aut} T$ *est archimédiennement complet.*

Démonstration. — Tout revient à montrer que, sous les hypothèses envisagées, $T' = T$. Or, si T vérifie les hypothèses de ce théorème, et, si T' est une extension de T, telle que T n'est ni strictement minoré, ni strictement majoré dans T', on peut, pour tout élément t' de T', définir un élément t_1 de T par la formule

$$t_1 = \sup_T \{ t \in T;\ t \leqq t' \}.$$

Alors, si t' n'appartient pas à T, l'intervalle ouvert de T', dont les extrémités sont t_1 et t', ne contient aucun élément de T, ce qui est en contradiction avec le lemme 2.

Remarque. — Si T est homogène et conditionnellement complet, mais s'il n'est pas dense, il est isomorphe à l'ensemble ordonné $\mathbf{Z}$, et $\operatorname{Aut} \mathbf{Z}$, qui ne contient aucun sous-groupe propre transitif, est isomorphe au groupe ordonné **Z**. On sait que ce groupe ordonné admet un complété archimédien (et, à un isomorphisme près, un seul), à savoir, le groupe ordonné **R**. Ainsi, comme nous l'avons énoncé plus haut, si T est conditionnellement complet, tout l-sous-groupe transitif de $\operatorname{Aut} T$ admet bien un complété archimédien.

Il est bien connu que tout ensemble totalement ordonné T admet un complété $\overline{T}$, qui est déterminé à un isomorphisme près, et que tout automorphisme de T peut être prolongé, de façon unique, à un automorphisme de $\overline{T}$. Ainsi tout l-sous-groupe de $\operatorname{Aut} T$ peut être identifié avec un l-sous-groupe de $\operatorname{Aut} \overline{T}$. Dans certains cas, on peut affirmer que toute extension archimédienne de G est également représentable comme l-sous-groupe de $\operatorname{Aut} \overline{T}$.

On dira qu'un groupe réticulé G est doublement transitif, si, pour un T convenable, il est isomorphe à un l-sous-groupe doublement transitif de T. On remarquera que, s'il en est ainsi, le T en question est forcément un ensemble dense.

LEMME 3. — *Si G est un l-sous-groupe doublement transitif de* $\operatorname{Aut} T$, *T est dense dans T'.*

Démonstration. — Supposons la conclusion inexacte, et soit $]s_1, s_2[$ un intervalle de T' qui ne rencontre pas T. D'après le lemme 2, ni s_1, ni s_2 n'appartient à T. Soit S la réunion de toutes les parties convexes de T' qui contiennent s_1 et s_2 et qui ne rencontrent pas T. Alors S vérifie les hypothèses du lemme 1.

Soit maintenant $t_1 \in T$, avec $t_1 < S$. G' étant transitif, il existe $g \in G'$, tel que $g(t_1) = s_1$. Alors $t_1 < g^{-1}(s_2)$. Par une deuxième application du lemme 2, on peut trouver un t_2 de T, tel que $t_1 < t_2 < g^{-1}(s_2)$. Puisque $s_1 = g(t_1) < g(t_2) < s_2$, il en résulte que $g(t_2) \in S$. Soit maintenant $t_3 \in T$, avec $t_3 > S$. G étant doublement transitif, il existe $h \in G$, tel que $h(t_1) = t_1$, $h(t_3) = t_2$. Ainsi gh applique S proprement dans lui-même, ce qui est en contradiction avec le lemme 1.

T étant dense dans T', on peut identifier $\overline{T}'$ avec $\overline{T}$. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit G un l-sous-groupe doublement transitif de* $\operatorname{Aut} T$, *et identifions G avec le l-sous-groupe de* $\operatorname{Aut} \overline{T}$ *qu'il détermine. Alors toute extension archimédienne de G est isomorphe à un l-sous-groupe de* $\operatorname{Aut} \overline{T}$ *qui contient G. Ainsi tout groupe réticulé doublement transitif admet un complété archimédien.*

Pour conclure, nous donnerons une application particulièrement importante de ces idées. Nous avons besoin du lemme suivant, dont la démonstration se trouve dans [7].

LEMME 4. — *Pour tout élément positif f de* Aut **R**, *il existe un g de* Aut **Q** *tel que $f \leqq g \leqq f^2$.*

PROPOSITION 1. — *Soit G un groupe réticulé qui contient* Aut **Q**. *Alors, pour que G soit une extension archimédienne de* Aut **Q**, *il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme de G sur un l-sous-groupe de* Aut **R**, *tel que tout élément de* Aut **Q** *est appliqué sur lui-même. Ainsi* Aut **R** *est archimédiennement complet, et c'est (à un isomorphisme près) l'unique complété archimédien de* Aut **Q**.

Démonstration. — Le fait que Aut **R** est archimédiennement complet résulte d'une application directe du théorème 2. De même, le fait que chaque extension archimédienne de Aut **Q** est isomorphe à un l-sous-groupe de Aut **R**, qui contient Aut **Q**, résulte d'une application directe du théorème 3. En effet, **Q** étant un corps, le groupe Aut **Q** est doublement transitif. Pour achever la démonstration de la proposition, il faut montrer que tout l-sous-groupe de Aut **R**, qui contient Aut **Q**, en est une extension archimédienne. Or il est clair, d'après la définition même d'une extension archimédienne, que, si G' est une extension archimédienne de G, tout l-sous-groupe de G', qui contient G, en est également une extension archimédienne. Puisqu'il résulte du lemme 4 que Aut **R** est une extension archimédienne de Aut **Q**, la proposition est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BYRD (R.). — *Lattice-ordered groups.* Doct. Dissert., Tulane Univ., 1967.

[2] CONRAD (P. F.). — Archimedean extensions of lattice-ordered groups, *J. Indian math. Soc.*, t. 30, 1966, p. 131-166.

[3] CONRAD (P. F.). — *Introduction à la théorie des groupes réticulés.* Cours rédigé par B. GOSTIAUX et S. WOLFENSTEIN. — Paris, Secrétariat mathématique, 1967 (Université de Paris. Faculté des Sciences de Paris).

[4] HOLLAND (C.). — The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set, *Michigan math. J.*, t. 10, 1963, p. 399-408.

[5] WOLFENSTEIN (S.). — Extensions archimédiennes non commutatives de groupes réticulés commutatifs, *C. R. Acad. Sc. Paris,* série A, t. 264, 1967, p. 1-4.

[6] WOLFENSTEIN (S.). — Valeurs normales dans un groupe réticulé, *Atti Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti,* série 8, t. 44, 1968, p. 337-342.

[7] WOLFENSTEIN (S.). — *Contribution à l'étude des groupes réticulés; extensions archimédiennes, groupe à valeurs normales,* Thèse Sc. math., Paris (en instance).

(Texte reçu le 14 novembre 1969.)

Samuel WOLFENSTEIN,
59, rue de la Citadelle,
94-Arcueil.