BULLETIN DE LA S. M. F.

N. ALEXÉEFF

Sur l’extraction d’une racine d’un nombre

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 167-171

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__167_1>

Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre;
par M. N. Alexéeff.

(Séance du 25 juillet 1879.)

C'est à l'occasion de l'intéressante Communication de M. Rodet sur les moyens qu'avaient les anciens pour calculer la racine carrée d'un nombre, que j'ose exprimer mon opinion sur le même sujet. Les anciens connaissaient la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de deux nombres, et ils savaient aussi que la moyenne géométrique, c'est-à-dire la racine carrée du produit de ces deux nombres, se trouve entre ces deux moyennes. Ils pouvaient ainsi calculer de proche en proche la racine carrée en prenant les moyennes consécutives. Mais, n'ayant pas les matériaux nécessaires pour faire valoir mon opinion, je la donne ici comme hypothèse, et, dans la Communication qui suit, je m'occupe seulement des résultats qu'on peut tirer de la méthode indiquée, pour calculer la racine carrée.

Soit à extraire la racine carrée d'un nombre N; je décompose ce nombre en ses deux facteurs a et b; lorsque N est premier, l'un des facteurs $a = \mathrm{N}$ et l'autre $b = 1$. Si le nombre N n'est pas un carré parfait, on peut poser $a > b$.

La première approximation sera exprimée par deux inégalités

$$b < \sqrt{\mathrm{N}} < a,$$

la seconde par les deux suivantes :

$$\frac{2\mathrm{N}}{a+b} < \sqrt{\mathrm{N}} < \frac{a+b}{2}.$$

Posons

$$\frac{a+b}{2} = a_1, \quad \frac{2\mathrm{N}}{a+b} = b_1;$$

l'approximation suivante est

$$\frac{2\mathrm{N}}{a_1+b_1} < \sqrt{\mathrm{N}} < \frac{a_1+b_1}{2}.$$

Posons

$$\frac{a_1+b_1}{2} = a_2, \quad \frac{2\mathrm{N}}{a_1+b_1} = b_2,$$

et procédons de la même manière pour calculer a_3, b_3, et ainsi de suite. Il est facile de voir que

$$b < b_1 < b_2 < \sqrt{\mathrm{N}} < a_2 < a_1 < a,$$

c'est-à-dire que, à chaque opération nouvelle, on s'approche de plus en plus de la valeur de la racine. Maintenant, si l'on désigne par P_n le numérateur et par Q_n le dénominateur de la fraction a_n, on a

$$a_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n} = \frac{\dfrac{\mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{Q}_{n-1}} + \dfrac{\mathrm{NQ}_{n-1}}{\mathrm{P}_{n-1}}}{2} = \frac{\mathrm{P}_{n-1}^2 + \mathrm{NQ}_{n-1}^2}{2\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}}.$$

Nous pouvons poser

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n-1}^2 + \mathrm{NQ}_{n-1}^2,$$
$$\mathrm{Q}_n = 2\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}.$$

Ces deux équations exprimeront la loi que suivent les nombres P et Q. La différence des deux valeurs approchées a_n et b_n, que nous désignerons par D_n, est exprimée par l'équation

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{NQ_n}{P_n} = \frac{P_n^2 - NQ_n^2}{P_n Q_n}.$$

Nous désignerons le numérateur de cette fraction par Δ_n ; si l'on remplace, dans l'expression de Δ_n, P_n et Q_n par leurs valeurs en P_{n-1} et Q_{n-1}, on a

$$\Delta_n = [P_{n-1}^2 - NQ_{n-1}^2]^2.$$

En continuant à abaisser les indices de P et de Q, on parviendra à cette équation :

$$\Delta_n = [P_1^2 - NQ_1^2]^{2^{n-1}}.$$

Mais $P_1 = a + b$, $Q_1 = 2$; donc

$$\Delta_n = (a - b)^{2^n}.$$

Nous aurons, pour la différence D_n,

$$D_n = \frac{(a-b)^{2^n}}{P_n Q_n} = \frac{(a-b)^{2^n}}{2^n P_n P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1}.$$

Quels que soient le nombre N et les deux facteurs a et b, cette différence peut devenir moindre que toute quantité donnée. En effet, on a

$$D_{n-1} = \frac{(a-b)^{2^{n-1}}}{2^{n-1} P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1};$$

donc

$$D_n = \frac{(a-b)^{2^{n-1}}}{2 P_n} D_{n-1}.$$

Mais de l'équation $P_n^2 - NQ_n^2 = (a-b)^{2^n}$ on tire

$$\left[\frac{(a-b)^{2^{n-1}}}{P_n}\right]^2 = 1 - N\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)^2,$$

d'où il suit que $\frac{(a-b)^{2^{n-1}}}{P_n} < 1$, c'est-à-dire

$$D_n < \frac{D_{n-1}}{2} < \frac{D_{n-2}}{4} < \frac{D_{n-3}}{6} < \cdots < \frac{D_1}{2^{n-1}}, \quad \text{ou} \quad D_n < \frac{(a-b)^2}{2^{n-1}}.$$

Cette inégalité montre que la proposition avancée est vraie.

Pour les petits nombres N, tels que $N=2$, $N=3$, ..., l'approximation sera très-grande, même pour la fraction $\frac{P_4}{Q_4}$. Pour les grands nombres, et lorsque la différence ne peut être rendue par le choix des facteurs a et b assez petite, l'approximation n'est pas si forte; néanmoins on parviendra toujours à une approximation qu'on veut avoir.

L'équation

$$P_n^2 - NQ_n^2 = (a-b)^{2^n}$$

est remarquable, parce qu'elle donne les solutions entières de l'équation

$$x^2 - Ny^2 = z^2.$$

On voit que

$$x = P_n, \quad y = Q_n, \quad z = (a-b)^{2^{n-1}}.$$

On peut remarquer que la même équation donne les solutions rationnelles de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$:

$$x = \frac{P_n}{(a-b)^{2^{n-1}}}, \quad y = \frac{Q_n}{(a-b)^{2^{n-1}}}.$$

Ces solutions deviennent entières lorsque le nombre $N = n(n+1)$.

La considération des nombres P et Q pourrait conduire à la résolution de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ en nombres entiers dans d'autres cas; mais, puisque ce problème est résolu depuis longtemps, je trouve l'exposition de ces cas peu instructive.

Les recherches sur les nombres P_n et Q_n m'ont conduit aux formules suivantes, que je donne ici sans la démonstration, parce qu'elle est très-facile :

$$(1)\quad P_n = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}{2}, \quad Q_n = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2^n} - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{2^n}}{2\sqrt{N}},$$

$$(2)\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \left(1+\frac{a-b}{P_1}\right)\left[1+\frac{(a-b)^2}{P_2}\right]\left[1+\frac{(a-b)^{2^2}}{P_3}\right]\left[1+\frac{(a-b)^{2^3}}{P_4}\right]\cdots$$

Les expressions (1) peuvent être développées, et alors elles ne contiennent plus les radicaux; ainsi :

Pour $n=1$, on a

$$P_1 = a+b, \quad Q_1 = 2.$$

Pour $n = 2$,

$$P_2 = a^2 + b^2 + (2^2)_2 N, \quad Q_2 = 4(a + b).$$

Pour $n = 3$,

$$P_3 = a^4 + b^4 + (2^3)_2 (a^2 + b^2) N + (2^3)_4 N^2,$$
$$Q_3 = (2^3)_1 (a^3 + b^3) + (2^3)_3 (a + b).$$

Pour $n = 4$,

$$P_4 = a^8 + b^8 + (2^4)_2 (a^6 + b^6) N + (2^4)_4 (a^4 + b^4) N^2 + (2^4)_6 (a^2 + b^2) N^3 + (2^4)_8 N^4,$$
$$Q_4 = (2^4)_1 (a^7 + b^7) + (2^4)_3 (a^5 + b^5) N + (2^4)_5 (a^3 + b^3) N^2 + (2^4)_7 (a + b) N^3,$$

et ainsi de suite.

Par la notation $(2^n)_k$, j'exprime le coefficient binomial du nombre (2^n) de l'ordre k.