BULLETIN DE LA S. M. F.

NEANTRO SAAVEDRA RIVANO

Catégories tannakiennes

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 417-430

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__417_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 417 à 430.

CATÉGORIES TANNAKIENNES (*)

PAR

NEANTRO SAAVEDRA RIVANO

[Valparaiso, Chili]

RÉSUMÉ. — Dans cette thèse, on interprète les catégories tannakiennes au moyen de la théorie des schémas en groupes, on les classifie, et on étudie des structures supplémentaires sur une catégorie tannakienne, notamment la structure de polarisation pour les catégories tannakiennes sur un sous-corps de **R**.

Table des matières

Introduction

L'exemple le plus simple de catégorie tannakienne sur un corps K est fourni par la $\otimes$-catégorie $\mathbf{Rep}_0(G)$ des représentations linéaires d'un K-schéma en groupes affine G dans des K-vectoriels de dimension finie. En général, une catégorie tannakienne **C** est « localement » de ce

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1972.

type; ceci signifie qu'il existe une extension de corps K'/K telle que la catégorie tannakienne $\mathbf{C}_{(K')}$, déduite de $\mathbf{C}$ par l'extension des scalaires K'/K, soit de ce type. Des exemples de catégories tannakiennes apparaissent de façon naturelle par la considération des motifs sur un corps (exemple qui a motivé cette théorie, *voir* [4], [5]), modules stratifiés sur un schéma sur un corps, structures de Hodge, systèmes locaux en vectoriels de rang fini sur un topos, etc.

Dans cette thèse, on interprète les catégories tannakiennes au moyen de la théorie des schémas en groupes, on les classifie, et on étudie des structures supplémentaires sur une catégorie tannakienne, notamment la structure de polarisation pour les catégories tannakiennes sur un sous-corps de $\mathbf{R}$. Les résultats de cette thèse sont traités en détail et généralisés dans un ouvrage de même titre [6], à paraître, dont cette rédaction peut être considérée comme un fascicule de résultats.

1. Terminologie et rappels

1.1. $\otimes$-catégories ([6], chap. I).

1.1.1. — Une *$\otimes$-catégorie* est une catégorie $\mathbf{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathbf{C}\times\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Une *$\otimes$-catégorie* ACU (pour associativité, commutativité unité) est une $\otimes$-catégorie $\mathbf{C}$ munie des données suivantes :

(*a*) Un isomorphisme trifonctoriel

$$\varphi_{X,Y,Z}: \quad X\otimes(Y\otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X\otimes Y)\otimes Z;$$

(*b*) Un isomorphisme bifonctoriel

$$\psi_{X,Y}: \quad X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X;$$

(*c*) Un objet $\mathbf{1}$, et des isomorphismes fonctoriels

$$\mathbf{1}\otimes X \simeq X \simeq X\otimes\mathbf{1};$$

ces données vérifiant les conditions de cohérence de Mac Lane bien connues (*voir* [6], chap. I). Ainsi, par exemple,

$$\psi_{Y,X}\circ\psi_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}.$$

On dit qu'une $\otimes$-catégorie ACU $\mathbf{C}$ *possède des objets* **Hom** si, pour deux objets X, Y de $\mathbf{C}$, le foncteur contravariant $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z\otimes X, Y)$ est représentable. Dans ce cas, un couple représentant ce foncteur est constitué par un objet, noté $\mathbf{Hom}(X, Y)$, et un morphisme

$$ev_{X,Y}: \quad \mathbf{Hom}(X, Y)\otimes X \to Y,$$

appelé *morphisme d'évaluation*. On pose aussi $X^{\vee} = \mathbf{Hom}(X, \mathbf{1})$.

1.1.2. — Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ des $\otimes$-catégories ACU. Un *$\otimes$-foncteur* ACU de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ est un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ muni d'isomorphismes bifonctoriels

$$C_{X,Y}: \quad F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

compatibles avec les données (*a*), (*b*), (*c*) sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$. Pour (*a*), (*b*), ceci a un sens évident; pour (*c*), ceci signifie qu'il existe un isomorphisme

$$a_F: \quad \mathbf{1}' \xrightarrow{\sim} F(\mathbf{1})$$

rendant commutatifs les carrés qu'on devine, cet isomorphisme est alors unique.

1.1.3. — Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ des $\otimes$-catégories ACU, et F, G des $\otimes$-foncteurs ACU de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$. Un *$\otimes$-morphisme* de F dans G est une transformation naturelle $\mu : F \to G$ telle que, pour des objets X, Y de $\mathbf{C}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{c_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \mu_X \otimes \mu_Y} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu_{X \otimes Y}} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow{d_{X,Y}} & G(X \otimes Y) \end{array}$$

soit commutatif. Un $\otimes$-morphisme μ est *unifère* si $\mu_{\mathbf{1}}$ est un isomorphisme; ceci revient à dire qu'on a

$$a_G = \mu_{\mathbf{1}} \circ a_F$$

avec les notations de 1.1.2. On note $\mathrm{Hom}^{\otimes}(F, G)$ [resp. $\mathrm{Hom}^{\otimes,1}(F, G)$] l'ensemble des $\otimes$-morphismes (resp. $\otimes$-morphismes unifères) de F dans G.

1.1.4. — Une *$\otimes$-catégorie rigide* est une $\otimes$-catégorie ACU possédant des **Hom**, vérifiant les conditions suivantes :

(*a*) Si X est un objet de $\mathbf{C}$, le morphisme canonique

$$X \to X$$

est un isomorphisme;

(*b*) Si X, X', Y, Y' sont des objets de $\mathbf{C}$, le morphisme canonique

$$\mathbf{Hom}(X, Y) \otimes \mathbf{Hom}(X', Y') \to \mathbf{Hom}(X \otimes X', Y \otimes Y')$$

est un isomorphisme.

Un *foncteur rigide* entre deux $\otimes$-catégories rigides est simplement un $\otimes$-foncteur ACU. L'intérêt de cette notion est qu'un foncteur rigide commute avec les objets **Hom** ([6], chap. I, 5.2.2). De plus, si F, $G : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ sont des foncteurs rigides, on a ([6], chap. I, 5.2.3) :

$$\mathrm{Hom}^{\otimes,1}(F, G) = \mathrm{Isom}^{\otimes}(F, G).$$

1.2. **Algèbre linéaire** ([6], chap. II, § 1)

1.2.1. — Soit A un anneau commutatif avec unité, et notons $\mathbf{Ann}_{/A}$ la catégorie des A-algèbres ACU (associatives, commutatives et unifères).

Un **A-module** est un foncteur M : $\mathbf{Ann}_{/A} \to \mathbf{Ens}$ muni de la donnée pour chaque objet A' de $\mathbf{Ann}_{/A}$ d'une loi de A'-module sur $M(A')$; ces données telles que si $\varphi : A' \to A''$ est un morphisme de A-algèbre, $M(\varphi) : M(A') \to M(A'')$ est un morphisme de A'-modules. On notera $\mathbf{Mod}(\mathbf{A})$ la catégorie des $\mathbf{A}$-modules : elle est munie d'une loi $\otimes$ ACU évidente, définie argument par argument :

$$(M \otimes N)(A') = M(A') \otimes_{A'} N(A').$$

Dans cette $\otimes$-catégorie ACU, il y a des objets $\mathbf{Hom}$, et si M, N sont des $\mathbf{A}$-modules, il existe même un choix canonique de $\mathbf{Hom}(M, N)$:

$$\mathbf{Hom}(M, N)(A') = \mathrm{Hom}_{A'}(M_{A'}, N_{A'}),$$

où $M_{A'}$ est le A'-module obtenu par « restriction » des scalaires

$$M_{A'} : \quad \mathbf{Ann}_{/A'} \to \mathbf{Ann}_{/A} \xrightarrow{M} \mathbf{Ens}.$$

1.2.2. — On a un $\otimes$-foncteur ACU canonique

$$\mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(\mathbf{A}),$$

noté simplement $M \mapsto \mathbf{M}$. Par définition,

$$\mathbf{M}(A') = A' \otimes_A M.$$

Ce foncteur est pleinement fidèle, et l'intérêt de plonger $\mathbf{Mod}(A)$ dans la $\otimes$-catégorie plus grosse $\mathbf{Mod}(\mathbf{A})$ provient de ce que *si M est un A-module, le morphisme canonique*

$$\mathbf{M} \to \mathbf{M}^{\vee\vee}$$

est un isomorphisme. On prendra garde de ne pas confondre $\mathbf{M}^{\vee} = \mathbf{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$ et $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$; le premier est un $\mathbf{A}$-module, le second un A-module.

1.2.3. — Voici un exemple typique de $\mathbf{A}$-module : soient φ, $\varphi' : \mathbf{C} \to \mathbf{Mod}(A)$ des foncteurs, et, pour chaque objet A' de $\mathbf{Ann}_{/A}$, notons $\varphi_{A'}$, $\varphi'_{A'}$ les foncteurs $\mathbf{C} \to \mathbf{Mod}(A')$, définis par

$$\varphi_{A'}(X) = A' \otimes_A \varphi(X),$$
$$\varphi'_{A'}(X) = A' \otimes_A \varphi'(X).$$

On note $\mathbf{Hom}(\varphi, \varphi')$ le $\mathbf{A}$-module, défini par

$$\mathbf{Hom}(\varphi, \varphi')(A') = \mathrm{Hom}(\varphi_{A'}, \varphi'_{A'}).$$

Supposons de plus que **C** soit une $\otimes$-catégorie ACU et que φ, φ' soient des $\otimes$-foncteurs ACU; on aura aussi des foncteurs $\mathbf{Ann}_{/A} \to \mathbf{Ens}$ (qui ne seront plus munis de structures de **A**-modules en général), $\mathbf{Hom}^{\otimes}(\varphi, \varphi')$, $\mathbf{Hom}^{\otimes, 1}(\varphi, \varphi')$, ...

2. Représentations linéaires de schémas en groupes affines

On fixe un anneau commutatif unifère A.

2.1. **Linéarités** ([6], chap. II, § 1.2).

2.1.1. — Rappelons qu'une *A-cogèbre* B est un A-module B muni d'un morphisme $\mu : B \to B \otimes_A B$ de *comultiplication*, et qu'un B-comodule (à droite) est un A-module E muni d'un morphisme $m : E \to E \otimes_A B$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{m} & E \otimes B \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\mu} \\ E \otimes B & \xrightarrow[m \otimes \mathrm{id}]{} & E \otimes B \otimes B \end{array}$$

soit commutatif. On peut, de façon évidente, rattacher à la structure de cogèbre les notions d'associativité, commutativité, unitarité et à celle de comodule la notion d'unitarité. *Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, cogèbre signifie cogèbre associative unifère, comodule signifie comodule à droite unifère.*

Voici un exemple : si G est un A-schéma affine en monoïdes, $B = \mathrm{Aff}(G)$ l'algèbre affine de G, la multiplication de G définit une structure de A-cogèbre sur B. De plus, si M est un A-module, la donnée d'une loi de B-comodule sur M revient à celle d'une représentation linéaire de G dans M. Avec des notations évidentes, on a un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Rep}(G) \simeq \mathbf{Comod}(B)$$

commutant avec les foncteurs oubli à valeurs dans $\mathbf{Mod}(A)$.

2.1.2. — Voici une interprétation plus sympathique des notions de cogèbre et de comodule. Si B est un A-module, la donnée d'une loi de A-cogèbre sur B revient à celle d'une loi d'algèbre (associative unifère) sur le **A**-module $B^{\vee}$ (1.2), i. e. d'un morphisme $B^{\vee} \otimes B^{\vee} \to B^{\vee}$ vérifiant des conditions évidentes d'associativité et unitarité. De plus, si M est un A-module, la donnée d'une loi de B-comodule sur M revient à celle d'une loi de $B^{\vee}$-module sur M [par là, on entend un morphisme de A-algèbres unifères $B^{\vee} \to \mathbf{End}(M)$]. Avec des notations évidentes, on a un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Mod}[B^{\vee}] \simeq \mathbf{Comod}(B)$$

commutant avec les foncteurs oubli à valeurs dans $\mathbf{Mod}(A)$.

2.1.3. — Notons φ^B le foncteur oubli **Comod** $(B) \to$ **Mod** (A). L'interprétation précédente de (**Comod** (B), φ^B) permet d'établir un dictionnaire entre les A-cogèbres B et les couples (**Comod** (B), φ^B). On récupère B à partir de ce couple grâce à l'isomorphisme canonique de **A**-algèbres (*voir* 1.2.3 pour les notations) :

$$B^{\vee} \simeq \mathbf{End}\,(\varphi^B),$$

la structure de **A**-algèbre de **End** (φ^B) provenant de la composition des morphismes.

Dans ce dictionnaire, les morphismes de A-cogèbres $B \to B'$ correspondent aux foncteurs φ : **Comod** $(B) \to$ **Comod** (B') vérifiant $\varphi^{B'} \circ \varphi = \varphi^B$, ou encore aux classes d'équivalence des couples (φ, η) d'un foncteur A-linéaire φ : **Comod** $(B) \to$ **Comod** (B') et d'un isomorphisme $\eta : \varphi^{B'} \circ \varphi \xrightarrow{\sim} \varphi^B$, deux couples (φ, η), (φ', η') étant équivalents s'il existe $\xi : \varphi \xrightarrow{\sim} \varphi'$ vérifiant $\eta' \circ (\varphi^{B'} \star \xi) = \eta$.

Pour compléter cette description, il faudrait évidemment caractériser les couples (**C**, φ) de la forme (**Comod** (B), φ^B). (Pour cette caractérisation, *voir* [6], chap. II, 2.3.2 et aussi 2.3.5 et 2.6.1.) On donnera, plus loin (2.3.1), cette caractérisation dans le cas où A est un corps.

2.1.5. — Soient B une A-cogèbre, E un B-comodule à gauche, F un B-comodule à droite. Le *coproduit tensoriel* de E par F est défini par le diagramme exact de A-modules

$$F \otimes^B E \to F \otimes_A E \underset{m_F \otimes \mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id} \otimes m_E}{\rightrightarrows}} F \otimes B \otimes E.$$

Supposons que B est plat en tant que A-module. On dit alors que E est B-**coplat** si le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{Comod}\,(B) &\to \mathbf{Mod}\,(A) \\ F &\mapsto F \otimes^B E \end{aligned}$$

est exact; ceci a un sens, parce que B étant A-plat, **Comod** (B) est une catégorie abélienne. La correspondance qui à un B-comodule à gauche B-coplat associe un foncteur exact **Comod** $(B) \to$ **Mod** (A) est une *équivalence de la catégorie des B-comodules à gauche B-coplats sur celle des foncteurs* **Comod** $(B) \to$ **Mod** (A) *qui sont A-linéaires, exacts, et qui commutent avec les sommes directes.* Le B-comodule à gauche B_g correspond au foncteur oubli φ^B.

2.2. Représentations de groupes ([6], chap. II, § 3).

2.2.1. — Soient G un A-schéma en monoïdes affine (en abrégé, un A-monoïde affine), $B = \mathrm{Aff}\,(G)$ son algèbre affine. La multiplication de G fait de B une cogèbre telle que la comultiplication $B \to B \otimes_A B$ et la counité $B \to A$ sont des morphismes d'algèbre; B est ce qu'on appelle une A-bigèbre. Notons

$$\omega^G : \quad \mathbf{Rep}\,(G) \to \mathbf{Mod}\,(A)$$

le foncteur oubli sur la catégorie des représentations linéaires de G. On a un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Rep}\,(G) \simeq \mathbf{Comod}\,(B)$$

rendant commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Rep}\,(G) \arrow[rr, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, "\omega^G"'] & & \mathbf{Comod}\,(B) \arrow[dl, "\varphi^B"] \\ & \mathbf{Mod}\,(A) & \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathbf{Rep}\,(G)$ est munie d'une loi $\otimes$ ACU évidente, pour laquelle ω^G est un $\otimes$-foncteur strict [i. e. $\omega^G(X \otimes Y) = \omega^G(X) \otimes \omega^G(Y)$]. En termes de l'isomorphisme de catégories précédent, cette loi $\otimes$ ACU provient de la structure d'algèbre ACU sur la A-cogèbre B.

2.2.2. — Ce qui précède et 2.1.3 permettent d'établir un dictionnaire entre les A-monoïdes affines G et les couples $(\mathbf{Rep}\,(G), \omega^G)$, où on regarde $\mathbf{Rep}\,(G)$ comme $\otimes$-catégorie, ω^G comme $\otimes$-foncteur. On récupère G à partir de ce couple grâce à l'isomorphisme canonique (*voir* 1.2.3 pour les notations) :

$$G \simeq \mathbf{End}^{\otimes,1}(\omega^G).$$

Un A-monoïde G est un groupe si, et seulement si,

$$\mathbf{End}^{\otimes,1}(\omega^G) = \mathbf{Aut}^{\otimes}(\omega^G).$$

Dans ce dictionnaire, les morphismes de A-monoïdes $G' \to G$ correspondent aux $\otimes$-foncteurs $\omega : \mathbf{Rep}\,(G) \to \mathbf{Rep}\,(G')$ vérifiant $\omega^{G'} \circ \omega = \omega^G$. On a aussi une variante, comme dans 2.1.3, avec des classes d'équivalence de couples (ω, η).

2.2.3. — Soit G un A-groupe affine *plat*. $\mathbf{Rep}\,(G)$ est alors abélienne, et ω^G un foncteur exact. Si P est un G-torseur à droite sur A pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte (fpqc), on définit un $\otimes$-foncteur ACU :

$$\omega' : \quad \mathbf{Rep}\,(G) \to \mathbf{Mod}\,(A)$$

par

$$\omega' = P \times^G \omega^G,$$

où $P \times^G$ est l'opération de torsion par le torseur P, G opérant sur ω^G de la façon évidente. Le $\otimes$-foncteur ω' est exact, fidèle, A-linéaire et commute avec les sommes directes. Un $\otimes$-foncteur ACU $\mathbf{Rep}\,(G) \to \mathbf{Mod}\,(A)$ ayant ces propriétés s'appelle un *foncteur fibre* [sur $\mathbf{Rep}\,(G)$]; si on prend comme morphismes des foncteurs fibre les $\otimes$-morphismes unifères, on obtient une catégorie, notée $\mathbf{Fib}\,(G)$. Si on note, d'autre part, $\mathbf{Tors}\,(G)$ la catégorie des G-torseurs à droite sur A pour la topologie fpqc, la construction précédente donne un foncteur

$$\mathbf{Tors}\,(G) \to \mathbf{Fib}\,(G).$$

On prouve ([6], chap. II, 3.2.3.3, 3.2.3.4) que c'est une équivalence de catégories. Le dictionnaire 2.2.2 permet donc d'interpréter l'ensemble $H^1\,(A_{\mathrm{fpqc}},\, G)$.

2.3. **Cas d'un corps** ([6], chap. II, 2.6 et § 4).

Dans ce numéro, l'anneau A est un corps K.

2.3.1. — Si B est une K-cogèbre, on note $\mathbf{Comod}_0\,(B)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comod}\,(B)$ formée des B-comodules de dimension finie en tant que K-vectoriels, φ_0^B le foncteur oubli

$$\varphi_0^B : \quad \mathbf{Comod}_0\,(B) \to \mathbf{Modf}\,(K)$$

à valeurs dans les K-vectoriels de dimension finie. Comme tout B-comodule est réunion de ses sous-B-comodules de dimension finie, il résulte de 2.1.3 qu'on a un dictionnaire entre les K-cogèbres B et les couples $(\mathbf{Comod}_0\,(B),\, \varphi_0^B)$. Ici encore, on récupère B par l'isomorphisme canonique

$$B^\vee \simeq \mathbf{End}\,(\varphi_0^B).$$

La caractérisation des couples $(\mathbf{C},\, \varphi)$ qui sont équivalents à un couple $(\mathbf{Comod}_0\,(B),\, \varphi_0^B)$ est très simple : il faut et il suffit que $\mathbf{C}$ soit une catégorie abélienne K-linéaire, et que φ soit un foncteur K-linéaire fidèle et exact ([6], chap. II, 2.6.3 (*a*)).

2.3.2. — Ce qui précède et 2.2.1 permettent d'établir un dictionnaire entre les K-monoïdes affines G et les couples $(\mathbf{C},\, \omega)$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\mathbf{C}$ abélienne K-linéaire et d'un $\otimes$-foncteur ACU ω fidèle, exact et K-linéaire. Le dictionnaire est donné par

$$G \mapsto (\mathbf{Rep}_0\,(G),\, \omega_0^G),$$
$$(\mathbf{C},\, \omega) \mapsto \mathbf{End}^{\otimes, 1}\,(\omega).$$

où $\mathbf{Rep}_0\,(G)$ dénote la $\otimes$-catégorie ACU des G-K-modules de dimension finie sur K, ω_0^G le foncteur oubli.

Dans ce dictionnaire, G est un groupe si, et seulement si, $\mathbf{C} = \mathbf{Rep}_0(G)$ est rigide (1.1.4).

2.3.3. — Soient S un K-schéma, G un K-groupe affine; notons **Loclib** (S) la $\otimes$-catégorie rigide des $\mathbf{O}_S$-modules localement libres de rang fini. On appelle *foncteur fibre* sur $\mathbf{Rep}_0(G)$, à valeurs dans S, un foncteur rigide (1.1.4) $\omega : \mathbf{Rep}_0(G) \to \mathbf{Loclib}(S)$, qui est exact et K-linéaire (si $S \neq \emptyset$, il est alors fidèle). Un exemple de foncteur fibre est $(\omega_0^G)_S$, défini par

$$(\omega_0^G)_S(X) = \mathbf{O}_S \otimes_K \omega_0^G(X);$$

on a

$$G_S = \mathbf{Aut}^{\otimes}((\omega_0^G)_S),$$

donc $\mathbf{G}_S$ agit à gauche sur ce foncteur fibre. Si P est un G_S-torseur à droite pour la topologie fpqc, P définit un foncteur fibre ω' par la formule (*voir* 2.2.3) :

$$\omega' = P \times^G (\omega_0^G)_S.$$

D'après *loc. cit.*, le foncteur

$$\mathbf{Tors}(G_S) \to \mathbf{Fib}(G, S),$$

ainsi défini, est une équivalence de catégories, où **Fib** (G, S) est la catégorie des foncteurs fibre sur $\mathbf{Rep}_0(G)$ à valeurs dans S (les morphismes étant les $\otimes$-morphismes unifères).

Pour S variable, les catégories **Fib** (G, S) définissent une catégorie fibrée FIB (G) sur la catégorie $\mathbf{Sch}_{/K}$ des K-schémas, qui est même un champ losqu'on munit cette dernière de la topologie fpqc. D'après ce qui précède, on a une équivalence de champs

$$\mathrm{TORS}(G) \to \mathrm{FIB}(G).$$

2.3.4. — Le dictionnaire 2.3.2 permet de transcrire des propriétés de théories de groupes en termes $\otimes$-catégoriques. On trouvera un échantillon des traductions possibles en [6] (chap. II, 4.3.2). Voici deux exemples, où G est un K-groupe affine.

(*a*) G est de type fini (i. e. algébrique) si et seulement s'il existe un objet X dans $\mathbf{Rep}_0(G)$ tel que tout autre objet soit quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme $f(X)$, où $f \in \mathbf{N}[t]$ et la somme (resp. le produit) est remplacé par $\oplus$ (resp. $\otimes$).

(*b*) Si K est de caractéristique 0, G est (pro-) réductif si, et seulement si, $\mathbf{Rep}_0(G)$ est semi-simple (Nagata).

3. Catégories tannakiennes

On fixe un corps (commutatif) K.

3.1. Catégories tannakiennes ([6], chap. III, 3.2).

3.1.1. — Une *catégorie tannakienne* est une $\otimes$-catégorie rigide (1.1.4) **C** abélienne K-linéaire, telle qu'il existe une extension de corps K'/K et un foncteur rigide K-linéaire, exact et fidèle

$$\omega : \quad \mathbf{C} \to \mathbf{Modf}\,(K).$$

Si S est un K-schéma, un *foncteur fibre* sur **C** à valeurs dans S est un foncteur rigide $\omega : \mathbf{C} \to \mathbf{Loclib}\,(S)$ qui soit K-linéaire et exact (si $S \neq \emptyset$, il est aussi fidèle). Si on prend comme morphismes de foncteurs fibre les $\otimes$-morphismes unifères, on obtient une catégorie, notée $\mathbf{Fib}\,(\mathbf{C}, S)$.

On dit que la catégorie tannakienne **C** est *neutre* si elle possède un foncteur fibre à valeurs dans K. D'après 2.3.2, la théorie des catégories tannakiennes *neutralisées*, i. e. munies d'un foncteur fibre à valeurs dans K, est essentiellement équivalente à celle des K-groupes affines.

3.1.2. — Soit **C** une catégorie tannakienne (sur K). Pour S un K-schéma variable, les catégories $\mathbf{Fib}\,(\mathbf{C}, S)$ définissent un champ $\mathcal{G} = \mathrm{FIB}\,(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{Sch}_{/K}$ pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte (fpqc). On prouve que $\mathcal{G}$ est une *gerbe* (*voir* [3]), i. e. que les fibres $\mathcal{G}_S = \mathbf{Fib}\,(\mathbf{C}, S)$ de $\mathcal{G}$ sont des groupoïdes, qu'elles sont localement (pour fpqc) non vides, et que les objets des fibres sont deux à deux localement isomorphes. Le lien de cette gerbe, appelé aussi le lien de **C**, est localement défini par un groupe affine. Une gerbe sur K pour la topologie fpqc avec cette propriété est dite *tannakienne* ([6], chap. II, 2.2.2).

La catégorie tannakienne **C** est neutre si, et seulement si, $\mathcal{G}$ l'est. Dans ce cas, le choix d'un objet ω dans la fibre $\mathcal{G}_K$ détermine des équivalences

$$\mathcal{G} \simeq \mathrm{TORS}\,(G_\omega),$$
$$\mathbf{C} \simeq \mathbf{Rep}_0\,(G_\omega),$$

où

$$G_\omega = \mathbf{Aut}^\otimes\,(\omega).$$

3.1.3. — Soit $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur K. Une *représentation linéaire* V de $\mathcal{G}$ (de dimension finie) est un foncteur cartésien

$$X : \quad \mathcal{G} \to \mathrm{LOCLIB}\,(K),$$

où LOCLIB(K) est la catégorie fibrée sur $\mathbf{Sch}_{/K}$ des modules localement libres de rang fini sur un K-schéma variable. Les représentations linéaires de $\mathcal{G}$ définissent une $\otimes$-catégorie rigide $\mathbf{Rep}_0(\mathcal{G})$, qui est une catégorie tannakienne, comme on le voit aussitôt.

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie tannakienne sur K, $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur K, on a des foncteurs évidents

$$\mathbf{C} \to \mathbf{Rep}_0(\mathrm{FIB}(\mathbf{C})),$$

$$\mathcal{G} \to \mathrm{FIB}(\mathbf{Rep}_0(\mathcal{G})).$$

3.1.4. THÉORÈME.

(*a*) *Le premier de ces foncteurs est une équivalence de catégories tannakiennes.*

(*b*) *Si le lien de $\mathcal{G}$ est, soit représentable par un groupe, soit localement représenté par un groupe de type fini, le second foncteur est une équivalence de gerbes.*

3.1.5. — Si L est un lien vérifiant l'une des conditions de 3.1.4 (*b*), on trouve un dictionnaire entre les catégories tannakiennes de lien L et les gerbes tannakiennes de lien L (sur K). En particulier, si G est un K-groupe affine, on a une interprétation $\otimes$-catégorique de l'ensemble $H^2(K_{\mathrm{fpqc}}, G)$ défini en [3].

Voici un exemple d'application de ce dictionnaire : si $\mathbf{C}$ est une catégorie tannakienne de lien L, le centre de L (qui est un K-groupe affine commutatif) est donné par la formule

$$\mathbf{Cent}(L) = \mathbf{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\mathbf{C}}).$$

3.2. **Catégories tannakiennes algébriques** ([6], chap. III, 3.3)

3.2.1. — Une catégorie tannakienne $\mathbf{C}$ est *algébrique* si son lien est localement représenté par un groupe de type fini. Ceci équivaut à dire qu'il existe un objet V dans $\mathbf{C}$ tel que tout autre soit quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme $f(V)$, où $f \in \mathbf{N}[t]$ (*voir* 2.3.4 pour la notation).

3.2.2. THÉORÈME. — *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie tannakienne algébrique sur K. Alors :*

(*a*) *Il existe un foncteur fibre à valeurs dans une extension finie de K.*

(*b*) *Si ω est un foncteur fibre à valeurs dans une extension algébriquement close L de K, ω se réduit à une sous-extension L' de L, finie sur K.*

(*c*) *Si ω, ω' sont des foncteurs fibre à valeurs dans une extension L de K, ils deviennent isomorphes sur une extension finie de L.*

3.2.3. Corollaire. — *Si* **C** *est une catégorie tannakienne dont le lien est de type dénombrable,* **C** *possède des foncteurs fibre à valeurs dans toute extension algébriquement close de K.*

3.2.4. *Remarque.* — Si le lien de **C** est localement représenté par un groupe *lisse*, on peut remplacer partout dans 3.2 extension finie par extension finie séparable.

4. Polarisations des catégories tannakiennes

4.1. **Formes de Weil** ([6], chap. V, 2.3).

4.1.1. — Soient **C** une catégorie tannakienne sur un sous-corps K de $\mathbf{R}$, et T un objet inversible de **C**. Si V est un objet de **C**, une forme bilinéaire non dégénérée $\varphi : V \otimes V \to T$ est une *forme de Weil* si sa parité ε_φ est dans le centre de $\operatorname{End}(V)$, et si pour tout endomorphisme non nul u de V, on a $\operatorname{Tr}(u \circ u^\varphi) > 0$. Ici, la parité ε_φ de φ est l'unique automorphisme de V, défini par

$$\varphi(y, x) = \varphi(x, \varepsilon_\varphi y),$$

et pour un endomorphisme u de V, son transposé u^φ est défini par

$$\varphi(ux, y) = \varphi(x, u^\varphi y).$$

4.1.2. — Soient $\varphi : V \otimes V \to T$, $\psi : W \otimes W \to T$ des formes de Weil à valeurs dans T. Elles sont dites *compatibles* si la forme $\varphi \oplus \psi$ sur $V \oplus W$ est aussi une forme de Weil.

Si ε est un automorphisme de V central dans $\operatorname{End}(V)$, la relation de compatibilité des formes de Weil est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes de Weil $V \otimes V \to T$ de parité ε. L'ensemble quotient sera noté $w_\varepsilon(V, T)$.

4.1.3. — Soient $\mathbf{C_R}$ la catégorie tannakienne sur $\mathbf{R}$ déduite de **C** par extension des scalaires de K à $\mathbf{R}$, $V_\mathbf{R}$ l'objet de $\mathbf{C_R}$ déduit de V. Supposons V semi-simple, et soit $\varepsilon \in \operatorname{Aut}(V)$ comme dans 4.1.2. Alors, l'application évidente

$$w_\varepsilon(V, T) \to w_\varepsilon(V_\mathbf{R}, T_\mathbf{R})$$

est bijective. De plus, $w_\varepsilon(V, T)$ est vide ou a exactement 2^r éléments, où r est le nombre de composantes isotypiques de V.

4.2. **Polarisations** ([6], chap. V, § 2).

4.2.0. — Dans ce numéro et le suivant, **C** dénote une catégorie tannakienne algébrique (3.3.1) sur le corps $\mathbf{R}$. Cette limitation n'est qu'apparente par 4.1.3. On note Z le $\mathbf{R}$-groupe algébrique commutatif, centre du lien de $\mathbf{C}$. On a, par 3.1.5,

$$Z = \mathbf{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_{\mathbf{C}}).$$

4.2.1. — Soit $\varepsilon \in Z(\mathbf{R}) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_C)$. Une *$\varepsilon$-polarisation* (homogène) π de $\mathbf{C}$ consiste en la donnée, pour chaque objet V de $\mathbf{C}$, d'une classe d'équivalence $\pi(V)$ des formes de Weil $V \otimes V \to \mathbf{R}$ de parité ε_V, vérifiant la condition

(PH) *Si V, W sont des objets de* $\mathbf{C}$, $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, *alors*

$$\varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W),$$
$$\varphi \otimes \psi \in \pi(V \otimes W).$$

On note $\mathrm{Pol}(\mathbf{C})$ [resp. $\mathrm{Pol}_\varepsilon(\mathbf{C})$] l'ensemble des polarisations (resp. ε-polarisations). Les 1-polarisations sont aussi appelées polarisations *symétriques*. La catégorie tannakienne $\mathbf{C}$ est *polarisable* si $\mathrm{Pol}(\mathbf{C}) \neq \emptyset$.

Le groupe $Z(\mathbf{R})$ agit sur l'ensemble $\mathrm{Pol}(\mathbf{C})$ de la façon suivante : si $z \in Z(\mathbf{R})$, $\pi \in \mathrm{Pol}(\mathbf{C})$, $z.\pi$ est la polarisation telle que, si V est un objet de $\mathbf{C}$, et $\varphi : V \otimes V \to \mathbf{R}$ est une forme de Weil, alors

$$\varphi \in z.\pi(V) \iff \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes z_V) \in \pi(V).$$

Pour $\varepsilon \in Z(\mathbf{R})$, cette action induit une action du groupe ${}_2Z(\mathbf{R})$ des points d'ordre deux sur l'ensemble $\mathrm{Pol}_\varepsilon(\mathbf{C})$.

4.2.2. Proposition. — *Pour l'action précédente,* $\mathrm{Pol}(\mathbf{C})$ [resp. $\mathrm{Pol}_\varepsilon(\mathbf{C})$] *est un pseudo-torseur sous le groupe* $Z(\mathbf{R})$ [resp. ${}_2Z(\mathbf{R})$]. *De plus, si* $\mathbf{C}$ *est polarisable, le* $\mathbf{R}$-*groupe Z est compact* [i. e. $Z(\mathbf{R})$ *est compact et Zariski dense dans* $Z(\mathbf{C})$] *et la catégorie* $\mathbf{C}$ *est semi-simple.*

4.2.3. Théorème. — *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ *des catégories tannakiennes (algébriques) sur* $\mathbf{R}$ *ayant même lien L. Alors,*

(*a*) $\mathbf{C}$ *est polarisable si, et seulement si,* $\mathbf{C}'$ *est polarisable; si L est représentable par un groupe qui est, soit abélien, soit connexe, ceci équivaut encore à dire que L peut être représenté par un* $\mathbf{R}$-*groupe compact.*

(*b*) *Soit* $\varepsilon \in Z(\mathbf{R})$ [$Z = \mathbf{Cent}(L)$], *et soit* π (resp. π') *une ε-polarisation sur* $\mathbf{C}$. *Il existe alors une équivalence unique à isomorphisme (non unique) près* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}'$ *qui soit liée par* id_L *et qui respecte les polarisations données.*

4.2.4. Corollaire. — *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie tannakienne sur* $\mathbf{R}$, *munie d'une polarisation symétrique* π, *et supposons que le lien L de* $\mathbf{C}$ *est représentable par un groupe qui est, soit connexe, soit abélien. Il existe alors un foncteur fibre* $\omega : \mathbf{C} \to \mathbf{Modf}(\mathbf{R})$ *unique à isomorphisme (non unique)* *près tel que si V est un objet de* $\mathbf{C}$, $\varphi : V \otimes V \to \mathbf{R}$ *une forme bilinéaire, alors* $\varphi \in \pi(V)$ *si, et seulement si,* $\omega(\varphi)$ *est une forme symétrique définie positive sur le* $\mathbf{R}$*-vectoriel* $\omega(V)$.

4.2.5. — Soit G un $\mathbf{R}$-groupe algébrique qui est connexe ou abélien, et soit π une polarisation sur $\mathbf{Rep}_0(G)$. Alors le corollaire 4.2.4 se généralise de la façon suivante : il existe $C \in G(\mathbf{R})$ unique à conjugaison par un élément de $G(\mathbf{R})$ près, tel que si V est un G-$\mathbf{R}$-module, $\varphi : V \otimes V \to \mathbf{R}$ une forme G-équivariante, $\varphi \in \pi(V)$ si, et seulement si, la forme bilinéaire φ_C sur le $\mathbf{R}$-vectoriel V est symétrique définie positive (*voir* aussi [1], [2]). Ici

$$\varphi_C(x, y) = \varphi(x, C y).$$

4.2.6. — Il y a également une variante graduée de la notion de polarisation ([6], chap. V, § 3). La théorie développée pour celle-ci est une conséquence plus ou moins facile du cas homogène traité ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Deligne (P.). — Travaux de Griffiths, *Séminaire Bourbaki*, 22e année, 1969-1970, no 376, p. 213-237. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 180).

[2] Deligne (P.). — La conjecture de Weil pour les surfaces K_3, *Inventiones mathematicae*, Berlin, t. 15, 1972, p. 206-226.

[3] Giraud (J.). — *Cohomologie non abélienne*. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 179).

[4] Kleiman (S.). — Motives, *in Proceeding of the 5th Nordic summer school* [1970. Oslo]. — Amsterdam, Wolters-Noordhoff, 1972.

[5] Manin (Ju. I.). — Correspondences, motives and monoidal transformations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, t. 6, 1968, p. 439-470; [en russe], *Mat. Sbornik*, t. 77, 1968, p. 475-507.

[6] Saavedra Rivano (Neantro). — *Catégories tannakiennes*. — Berlin, Springer-Verlag. 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 265).

(Texte reçu le 10 mars 1972.)

Neantro Saavedra Rivano,
Departamento de Matemáticas,
Universidad Católica de Valparaíso,
Casilla 4059,
Valparaíso (Chile).