BULLETIN DE LA S. M. F.

JULIANNE UNTERBERGER

Évaluation d'une somme arithmétique associée à une forme modulaire non analytique

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 113-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__113_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 113-124.

ÉVALUATION D'UNE SOMME ARITHMÉTIQUE ASSOCIÉE A UNE FORME MODULAIRE NON ANALYTIQUE

PAR

JULIANNE UNTERBERGER

[Reims]

RÉSUMÉ. — En appliquant la méthode de dissection de Farey à une forme modulaire non analytique, introduite par H. MAASS, on obtient le développement asymptotique

$$\Sigma_{n \geqq 1} (d(n))^2 (K_0(2\pi ny))^2 = y^{-1}(a_1 \log^3 y^{-1} + a_2 \log^2 y^{-1} + a_3 \log y^{-1}) + O(y^{-1}),$$

valable quand y positif tend vers zéro, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

1. Introduction

Soit, pour tout entier $n \geqq 1$, $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, et soit K_0 la fonction de Bessel de seconde espèce définie, par exemple, par la formule

$$(1) \qquad K_0(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-y} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} \left(1 + \frac{t}{2y}\right)^{-1/2} dt,$$

pour tout y positif; on sait que, pour tout $\sigma > 1$, on a

$$K_0(y) = \frac{1}{8i\pi} \int_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)^{-s} ds,$$

Γ étant la fonction gamma.

On se propose de donner un développement asymptotique, à un $O(y^{-1})$ près, de la fonction arithmétique

$$\Sigma_{n \geqq 1} [d(n)]^2 [K_0(2\pi ny)]^2$$

quand y positif tend vers zéro.

Pour cela, on introduit la fonction

$$g(x, y) = \frac{1}{4} y^{1/2} (\log y + \gamma - \log (4 \pi))$$
$$+ \Sigma_{n \geqq 1} d(n) y^{1/2} K_0 (2\pi ny) \cos (2 \pi nx),$$

qui est définie et analytique dans le demi-plan $y > 0$, et qui est invariante par le groupe modulaire complet (*cf.* [3]).

On peut écrire l'égalité de Parseval :

$$\int_0^1 | g(x, y) |^2 dx = \frac{1}{16} y (\log y + \gamma - \log (4 \pi))^2 \tag{2}$$
$$+ \frac{1}{2} \Sigma_{n \geqq 1} d^2 (n) y K_0^2 (2 \pi ny),$$

et, dans ce qui suit, on évaluera l'intégrale ci-dessous en se servant de la dissection de Farey de l'intervalle $[0, 1]$ (*cf.* [2]), et on en déduira le théorème suivant.

THÉORÈME. — *On a, quand y tend vers zéro, le développement asymptotique suivant :*

$$\Sigma_{n \geqq 1} d^2 (n) K_0^2 (2 \pi ny)$$
$$= \frac{1}{8 \pi} y^{-1} \{ \log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1} \} + O(y^{-1}),$$

avec

$$\alpha_1 = 3 \left(3 \gamma - \log \pi - 4 \log 2 - 2 \frac{\zeta' (2)}{\zeta (2)}\right),$$

$$\alpha_2 = 3 (\log^2 (16 \pi e^{-\gamma}) - c_0 \log (16 \pi e^{-\gamma}) - 8 c_1 + 2 \zeta (2)),$$

où

γ *est la constante d'Euler,*

$$\gamma_1 = \lim_{m \to \infty} \left(\Sigma_{s=1}^m \frac{\log s}{s} - \frac{\log^2 m}{2}\right),$$

$$c_0 = \gamma - \frac{\zeta' (2)}{\zeta (2)}, \qquad c_1 = \frac{\zeta' (2)}{\zeta (2)} c_0 + \frac{\zeta'' (2)}{2 \zeta (2)} - \gamma_1,$$

ζ étant la fonction dzêta de Riemann, ζ' et ζ'' étant ses dérivées.

Roger GODEMENT nous signale que l'on peut, en fait, obtenir un développement avec un reste en $O(y^{-1/2})$ étant donné que la série $\Sigma_{n \geqq 1} d^2 (n)/n^s$ n'est autre que $[\zeta (r)]^4/\zeta (2 s)$, fonction dont le développement de Laurent au voisinage de $s = 1$ est connu ! Compte tenu de cette circonstance particulière, on se ramène en effet à un simple calcul de résidu, vu que la transformée de Mellin de $\sum_{n \geqq 1} d^2(n) K_0^2(2\pi ny)$ est

$$\frac{1}{8}\pi^{-s}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^4}{\Gamma(s)}\sum_{n\geqq 1}\frac{d^2(n)}{n^s}.$$

La partie régulière du développement que l'on obtient ainsi est la somme de la partie régulière du développement obtenu par la méthode de dissection de Farey et d'une constante, explicitable, mais fort compliquée.

2. Dissection de Farey

Soit N un entier positif non nul; les nombres de Farey d'ordre N sont les nombres rationnels h/k vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leqq h \leqq k \leqq N & \text{avec} \quad k \neq 0, \\ (h, k) = 1, \end{cases}$$

étant entendu que 0 est le nombre de Farey 0/1, et 1 le nombre de Farey 1/1.

Dans toute la suite h'/k', h/k, h''/k'' seront des nombres de Farey d'ordre N consécutifs avec

$$\frac{h'}{k'} < \frac{h}{k} < \frac{h''}{k''};$$

on sait qu'alors

$$\begin{cases} h'' k - k'' h = 1, \\ k + k'' > N. \end{cases}$$

Posons

$$\beta'_{0,1} = \beta''_{1,1} = 0,$$

$$\beta'_{h,k} = -\frac{1}{k(k+k')}, \qquad \beta''_{h,k} = \frac{1}{k(k+k'')} \qquad \text{pour} \quad \frac{h}{k} \neq 0 \text{ ou } 1.$$

On vérifie facilement que

$$\frac{h'}{k'} + \beta''_{h',k} = \frac{h}{k} + \beta'_{h,k},$$

et que l'intervalle $[0, 1]$ est recouvert par les intervalles

$$\left[\frac{h}{k} + \beta'_{h,k}, \frac{h}{k} + \beta''_{h,k}\right];$$

on obtient ainsi la dissection de Farey d'ordre N de $[0, 1]$.

Pour des raisons typographiques, on introduit la fonction caractéristique $\chi_{h,k}(x)$ de l'intervalle $[\beta'_{hk}, \beta''_{hk}]$, d'où l'égalité

$$\int_0^1 |g(x, y)|^2\, dx = \Sigma_{h,k}\, I_{hk},$$

où le symbole $\Sigma_{h,k}$ signifie que la sommation est étendue à tous les nombres de Farey d'ordre N, et où

$$I_{hk} = \int \left| g\left(\frac{h}{k} + x,\, y\right)\right|^2 \chi_{h,k}(x)\, dx.$$

Utilisons maintenant le fait que g est invariante par le groupe modulaire, donc par les transformations

$$(x, y) \mapsto (X_{h,k},\, Y_{k,k}),$$

avec

$$X_{k,k} + i\, Y_{hk} = \frac{k''(x+iy) - h''}{k(x+iy) - h}.$$

Ceci permet d'écrire $\mathrm{I}_{h,k}$ sous la forme

$$\int \left| g\left(\frac{k''}{k} - \frac{x}{k^2(x^2+y^2)},\, \frac{y}{k^2(x^2+y^2)}\right)\right|^2 \chi_{hk}(x)\, dx.$$

La fonction de Bessel K_0 vérifiant l'inégalité

(3) $$K_0(t) \leqq (2\pi)^{-1/2}\, t^{-1/2}\, e^{-t} \qquad \text{pour} \quad t > 0,$$

on est amené à penser que les termes en $K_0(2\pi n\, Y_{hk})$ seront moins importants que le terme

$$|u(Y_{hk})|^2 = \frac{1}{16}\, Y_{hk} \log^2\left(\frac{Y_{hk}}{\delta}\right)$$

dans I_{hk}, δ étant égal à $4\pi e^{-\gamma}$; on pose alors

$$I'_{hk} = \int |u(Y_{hk})|^2\, \chi_{hk}(x)\, dx$$

et

$$I''_{hk} = \int (|g(X_{hk},\, Y_{hk})|^2 - |u(Y_{hk})|^2)\, \chi_{hk}(x)\, dx.$$

On va calculer la somme relative aux I'_{hk}, et majorer le reste quand N tend vers l'infini : en fait, on posera $N = y^{-1/2}[\psi(y)]^{-1}$, où $\psi(y)$ est une fonction tendant vers l'infini quand y tend vers zéro de façon que $y^{-1/2}[\psi(y)]^{-1}$ tende vers l'infini.

3. Quelques lemmes

Nous nous proposons ici d'estimer, quand N tend vers l'infini, les sommes arithmétiques

$$\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k} \log^j k, \qquad j = 0, 1 \text{ et } 2$$

et

$$\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k^2} \log^j (k), \qquad j = 0, 1 \text{ et } 2,$$

$\varphi(k)$ étant l'indicateur d'Euler.

Ces sommes serviront à la majoration du reste et à l'estimation de la partie principale $\Sigma_{h,k} I'_{hk}$.

LEMME 1. — *On a, quand N tend vers l'infini, les estimations suivantes :*

1° $\Sigma_1^N \dfrac{\log k}{k} = \dfrac{1}{2} \log^2 N + O(1)$;

2° $\Sigma_1^N \dfrac{\varphi(k)}{k} \log^j k = \dfrac{N}{\zeta(2)} (\log N - 1)^j + O(\log^{j+2} N)$ pour $j = 0,1$ *et* 2.

En effet :

$$\Sigma_1^N \frac{\log k}{k} = \int_1^N \frac{\log x}{x} dx + O(1) = \frac{1}{2} \log^2 N + O(1),$$

d'où le premier résultat; pour démontrer le 2°, on utilise la formule de Mertens (*cf.* [1]) :

$$\Phi(N) = \Sigma_1^N \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + O(N \log N),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k} &= \Sigma_1^{N-1} \Phi(k) \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] + \frac{\Phi(N)}{N} \\
&= \Sigma_1^{N-1} \left[\frac{3}{\pi^2} k^2 + O(k \log k)\right] \left(\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) + \frac{3}{\pi^2} N \\
&= \frac{N}{\zeta(2)} + O(\log^2 N).
\end{aligned}$$

Pour démontrer les deux autres estimations pour $j = 1$ et 2, on utilise à nouveau la transformation d'Abel et une récurrence.

LEMME 2. — *On a les développements suivants, quand N tend vers l'infini,*

$$\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k^2} \log^j k = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{1}{j} \log^{j+1} N + c_j \right) + O(\log^{j+1}(N)/N)$$

pour $j = 0$, 1 *et* 2, *avec*

$$c_0 = \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)},$$

$$c_1 = \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} c_0 + \frac{\zeta''(2)}{2\zeta(2)} - \gamma_1,$$

$$c_2 = 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} c_1 = \frac{\zeta''(2)}{\zeta(2)} c_0 - \frac{\zeta'''(2)}{3\zeta(2)} + 2\gamma_2,$$

où

$$\gamma_l = \lim_{m \to \infty} [\Sigma_{s=1}^m (l+1)(\log^l s)/s - (\log^{l+1} m)/l + 1], \qquad l = 0 \text{ et } 1.$$

Démontrons le lemme 2. — On va utiliser la transformation d'Abel et l'égalité

$$\Sigma_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}e\, s > 2.$$

On trouve alors pour $h > 0$:

$$\begin{aligned}
(4) \qquad \Sigma_{k=1}^N \frac{\varphi(k)}{k^{2+h}} &= \frac{\zeta(1+h)}{\zeta(2+h)} - \Sigma_{k \geq N+1} \frac{\varphi(k)}{k^{2+h}} \\
&= \frac{\zeta(1+h)}{\zeta(2+h)} - \Sigma_{k \geq N+1} \frac{\Phi(k)}{k^{2+h}} \left(\frac{2+h}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\Phi(N)}{N^{2+h}} \left[1 - \frac{2+h}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right] \\
&= \frac{\zeta(1+h)}{\zeta(2+h)} - \frac{6}{\pi^2 h N^h} + O\left(\frac{\log N}{N}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, quand h tend vers zéro, on a

$$\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + \gamma_1 h + O(h^2),$$

d'où le résultat pour $j = 0$, quand on fait tendre h vers zéro.

Quand $j = 1$, on écrit que

$$\lim_{h \to 0} \left(\Sigma_{k=1}^N \frac{\varphi(k)}{k^{2+h}} \log k \right) = - \lim_{h \to 0} \frac{d}{dh} \left(\frac{\zeta(1+h)}{\zeta(2+h)} - \Sigma_{k \geq N+1} \frac{\varphi(k)}{k^{2+h}} \right)$$

et on continue comme précédemment. Finalement, pour $j = 2$, on dérive deux fois par rapport à h l'égalité (4), et on fait tendre h vers zéro.

4. Majoration de la somme $\sum_{hk} I''_{hk}$

Dans tout ce qui suit, nous posons

$$N = y^{-1/2}/\psi(y),$$

où $\psi(y)$ est une fonction positive tendant vers l'infini quand y tend vers zéro, de telle façon que $y^{-1/2}/\psi(y)$ tende aussi vers l'infini.

Proposition 1. — *On a, quand y tend vers zéro, les estimations suivantes :*

$$\sum_1^N \frac{\varphi(k)}{k} \log^j \frac{1}{k^2 y} = O\left(y^{-1/2} \frac{\log^j \psi(y)}{\psi(y)}\right)$$

pour $j = 1$ *et* 2.

Cette proposition est une conséquence immédiate des estimations du 2° du lemme 1.

Proposition 2. — *On a, quand y tend vers zéro,*

$$\sum_{hk} I''_{hk} = O([\psi(y)]^3).$$

En effet :

$$I'_{hk} | \leq \int | g(X_{hk}, Y_{hk}) - u(Y_{hk}) |^2 \chi_{hk}(x)\, dx$$

$$+ 2\int | u(Y_{hk}) | \, | g(X_{hk}, Y_{hk}) - u(Y_{hk}) | \chi_{hk}(x)\, dx.$$

Mais, grâce à l'inégalité (3), on peut écrire :

$$\begin{aligned} | g(X, Y) - u(Y) | &\leq \frac{1}{2\pi} Y^{1/2} \sum_{n\geq 1} d(n)\, n^{-1/2}\, Y^{-1/2}\, e^{-2\pi n Y} \\ &\leq C_1 \sum_{n\geq 1} n^{-1/4}\, e^{-2\pi n Y} \\ &\leq C_1 \left[e^{-2\pi Y} + \int_1^{+\infty} t^{-1/4}\, e^{-\pi t Y}\, dt \right] \\ &\leq C^2\, Y^{-2/3}, \end{aligned}$$

C_1 et C_2 étant des constantes absolues.

D'autre part,

$$\begin{aligned} u(Y_{hk}) &= \frac{1}{4} (Y_{hk})^{1/2} \log Y_{hk}/\delta \\ &= \frac{1}{4} (Y_{hk})^{1/2} [\log (y/(x^2 + y^2) k^2) - \log \delta | \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I''_{hk} \leq \int (C_2)^2 \, Y_{hk}^{-3/2} \chi_{hk}(x)\, dx + \frac{C_2}{2} \int Y_{hk}^{-3/4} \,|\, u(Y_{hk}) \,|\, \chi_{hk}(x)\, dx$$
$$\leq J''_{hk} + K''_{hk},$$

où l'on a posé

$$J''_{hk} = C_3 \int (Y_{hk}^{-3/2} + Y_{hk}^{-1/4}) \chi_{hk}(x)\, dx$$

et

$$K''_{hk} = C_3 \int Y_{hk}^{-1/4} \,|\, \log 1/k^2 (x^2 + y^2) \,|\, \chi_{hk}(x)\, dx,$$

avec $C_3 = \max((C_2)^2, C_2, \log \delta)$.

1° On va montrer que $\Sigma_{h,k} J''_{hk} = O(\psi^3(y))$ quand y tend vers zéro; en effet

$$J''_{hk} = C_3 \int [k^3 y^{5/2} (1 + t^2)^{3/2} + k^{1/2} y^{5/4} (1 + t^2)^{1/4}] \chi_{hk}(yt)\, dt$$
$$\leq 2\, C_3 \int_0^{1/kNy} [k^3 y^{5/2} (1 + t^2)^{3/2} + k^{1/2} y^{5/4} (1 + t^2)^{1/4}]\, dt$$
$$\leq 2\, C_3 [2^{3/2} k^3 y^{5/2} + 2^{1/2} k^{1/2} y^{5/4}] + 2\, C_3 \int_1^{1/kNy}$$
$$\leq 8\, C_3 \left[k^3 y^{5/2} + k^{1/2} y^{5/4} + \frac{k^3 y^{5/2}}{4\, k^4 N^4 y^4} + \frac{2\, k^{1/2} y^{5/4}}{3\, k^{3/2} N^{3/2} y^{3/2}} \right]$$
$$\leq 8\, C_3 [k^3 y^{5/2} + k^{1/2} y^{5/4} + k^{-1} N^{-4} y^{-3/2} + k^{-1} N^{-3/2} y^{-1/4}];$$

on s'est servi du fait que

$$\beta''_{hk} = \frac{1}{k(k + k'')} \leq \frac{1}{kN} \qquad \text{et} \qquad |\, \beta'_{hk} \,| = \frac{1}{k(k + k')} \leq \frac{1}{kN}.$$

Finalement, en utilisant le lemme 1 :

$$\Sigma_{h,k} J''_{hk} \leq \Sigma_{h,h}\, 8\, C_3 [k^3 y^{5/2} + k^{1/2} y^{5/4} + k^{-1} N^{-4} y^{-3/2} + k^{-1} N^{-3/2} y^{-1/4}]$$
$$= 8\, C_3 \Big[y^{5/2} \Sigma_{k=1}^{N} k^3 \varphi(k) + y^{5/4} \Sigma_{k=1}^{N} k^{1/2} \varphi(k)$$
$$+ y^{-3/2} N^{-4} \Sigma_{k=1}^{N} \frac{\varphi(k)}{k} + y^{-1/4} N^{-3/2} \Sigma_{k=1}^{N} \frac{\varphi(k)}{k} \Big]$$
$$\leq 8\, C_3 [y^{5/2} N^3 \Phi(N) + y^{5/4} N^{1/2} \Phi(N) + y^{-3/2} N^{-4} N + y^{-1/4} N^{-3/2} N]$$
$$= 8\, C_3 \frac{3}{\pi^2} [(N^2 y)^{5/2} + (N^2 y)^{5/4} + (N^2 y)^{-3/2} + (N^2 y)^{-1/4}]$$
$$= O(\psi^3(y)) \quad \text{quand } y \text{ tend vers zéro.}$$

2° On va montrer que $\Sigma_{h,k} K''_{hk} = O([\psi(y)]^{1/2} \log \psi(y))$ quand y tend vers zéro.

En effet, on a

$$K''_{hk} = C_3 \int k^{1/2} y^{5/4} (1+t^2)^{1/4} \left(\log \frac{1}{1+t^2} + \log \frac{1}{k^2 y}\right) \chi_{hk}(yt)\, dt.$$

Comme précédemment, on majore β''_{hk} et $|\beta'_{hk}|$ par $1/kN$, et on coupe l'intervalle $(0, 1/kNy)$ en les intervalles $(0, 1)$ et $(1, 1/kNy)$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} K''_{hk} &\leqq 2\, C_3\, k^{1/2} y^{5/4} \left[\left(\log 2 + \log \frac{1}{k^2 y}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\log \frac{2}{(kNy)^2} + \log \frac{1}{k^2 y}\right)(kNy)^{-3/2}\right] \\ &\leqq \frac{1}{2} C_4\, k^{-1} y^{-1/4} N^{-3/2} \left[\log \frac{1}{kNy} + \log \frac{1}{k^2 y}\right] \\ &\leqq C_4\, k^{-1} y^{-1/4} N^{-3/2} \log \frac{1}{k^2 y}, \end{aligned}$$

où C_4 est une nouvelle constante absolue, d'où

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,k} K''_{hk} &\leqq C_4\, y^{-1/4} N^{-3/2} \Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{k^2 y} \\ &\leqq C_5\, y^{-3/4} N^{-3/2} \frac{\log \psi(y)}{\psi(y)} = O([\psi(y)]^{1/2} \log \psi(y)) \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 1, d'où la proposition 2.

5. Calcul de la somme $\Sigma_{h,k} I'_{hk}$

Rappelons que

$$I'_{hk} = \int \log^2 \frac{1}{\delta\, k^2 y (1+t)^2} \chi_{hk}(yt) \frac{dt}{16\, k^2 (1+t^2)}.$$

Nous allons comparer I'_{hk} avec

$$J'_{hk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \log^2 \frac{1}{\delta k^2 y (1+t^2)} \frac{dt}{16\, k^2 (1+t^2)}.$$

Posons

$$K'_{hk} = J'_{hk} - I'_{hk}.$$

PROPOSITION 3. — *On a l'estimation suivante :*

$$\Sigma_{h,k}\, K'_{hk} = O\left(\frac{\log \psi(y)}{\psi^2(y)}\right) \qquad \textit{quand } y \textit{ tend vers zéro.}$$

Démonstration. — On a, sur l'intervalle $[\beta''_{hk}/y, +\infty[$:

$$\int \log^2 \frac{1}{\delta k^2 y (1+t^2)} \frac{dt}{16 k^2 (1+t^2)} \leqq \int \left(\log[\delta(1+t^2)] + \log\frac{1}{k^2 y}\right)^2 \frac{dt}{16 k^2 t^2}$$
$$\leqq \int C_6 \left(\log t + \log \frac{1}{k^2 y}\right)^2 \frac{dt}{16 k^2 t^2},$$

où C_6 est une constante absolue.

Puisque, pour $A = \beta''_{hk}/y$, on a

$$\int_A^{+\infty} \log^2 \frac{t}{k^2 y} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{A}\left[\log^2 \frac{A}{k^2 y} + 2 \log \frac{A}{k^2 y} + 2\right]$$
$$\leqq C_7 \frac{1}{A} \log^2 \left(\frac{A}{k^2 y}\right)$$
$$\leqq C_7\, 2\, k\, N\, y \log^2 \left(\frac{1}{k^3 N y^2}\right),$$

C_7 étant une constante absolue, alors

$$K'_{hk} \leqq 4\, C_7 \frac{N y}{16 k} \log^2 \left(\frac{1}{k^3 N y^2}\right) \leqq C_7 \frac{N y}{k} \log^2 \left(\frac{1}{k^2 y}\right)$$

donc

$$\Sigma_{h,k}\, K'_{hk} \leqq C_7\, \Sigma_{k=1}^N\, N\, y \frac{\varphi(k)}{k} \log^2 \frac{1}{k^2 y},$$

ce qui démontre la proposition 3.

Il nous reste à calculer :

$$J'_{hk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \log^2 \frac{1}{\delta k^2 y (1+t^2)} \frac{dt}{16 k^2 (1+t^2)}$$
$$= 2 \int_0^{+\infty} \log^2 \frac{1}{\delta k^2 y (1+t^2)} \frac{dt}{16 k^2 (1+t^2)}.$$

Posons $1 + t^2 = 1/s^2$,

$$J'_{hk} = 2 \int_0^1 \log^2 \frac{s^2}{\delta k^2 y} \frac{ds}{16 k^2 \sqrt{1-s^2}}$$
$$= \frac{1}{8 k^2} \int_0^1 \log^2 \frac{s^2}{\delta k^2 y} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}.$$

PROPOSITION 4. — *On a, quand y tend vers zéro,*

$$\Sigma_{h,k} J'_{hk} = \frac{1}{16\pi}\{\log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1}\} + O(\log^3 \psi(y)),$$

où α_1 et α_2 sont les constantes données dans l'énoncé du théorème.

En effet,

$$J'_{hk} = \frac{1}{8k^2}\left[\int_0^1 \frac{4\log^2 s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds + \int_0^1 \frac{4\log s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \log\frac{1}{\delta k^2 y} + \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\log^2\frac{1}{\delta k^2 y}\right].$$

On peut montrer que l'on a les égalités

$$a_1 = \int_0^1 \frac{\log 1/s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \frac{\pi}{2}\log 2,$$

$$a_2 = \int_0^1 \frac{\log^2 1/s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \frac{\pi}{2}\log^2 2 + \frac{\pi}{4}\zeta(2).$$

(*voir*, par exemple, [4] pour la deuxième).

D'où

$$J'_{hk} = \frac{1}{2k^2}a_2 + \frac{1}{2k^2}\log\left(\frac{1}{\delta k^2 y}\right)a_1 + \frac{\pi}{16k^2}\log^2\frac{1}{\delta k^2 y}$$

et

$$\Sigma_{h,k} J'_{hk} = \frac{a_2}{2}\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k^2} + \frac{a_1}{2}\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k^2}\log\frac{1}{\delta k^2 y} + \frac{\pi}{16}\Sigma_1^N \frac{\varphi(k)}{k^2}\log^2\frac{1}{\delta k^2 y}.$$

En utilisant le lemme 2, on trouve

$$\Sigma_{h,k} J'_{hk} = \frac{1}{16\pi}\{\log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1}\} - \frac{1}{2\pi}\log^3 \psi(y) + O(\log^2 \psi(y)) \quad \text{quand } y \text{ tend vers zéro,}$$

d'où la proposition 4.

6. Démonstration du théorème

D'après les propositions 2, 3 et 4, on a

$$\int_0^1 |g(x,y)|^2\,dx = \frac{1}{16\pi}\{\log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1}\} + O(\psi^3(y)),$$

quand y tend vers zéro, pour toute fonction $\psi(y)$ positive tendant vers l'infini quand y tend vers zéro, telle que $y^{1/2}\,\psi(y)$ tende vers zéro quand y tend vers zéro.

Puisque le premier membre de l'égalité ci-dessus ne dépend pas de $\psi(y)$, on en déduit que l'on a

$$\int_0^1 |\,g(x, y)\,|^2\,dx = \frac{1}{16\,\pi}\,\{\log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1}\} + O(1),$$

quand y tend vers zéro.

Mais

$$y \sum_{n \geq 1} d^2(n)\,K_0^2(2\,\pi\, ny) = 2\int_0^1 |\,g(x, y)\,|^2\,dx + O(y^2 \log^2 y^{-1}),$$

d'après (2), d'où

$$\sum_{n \geq 1} d^2(n)\,K_0^2(2\,\pi\, ny) = \frac{1}{8\,\pi\, y}\{\log^3 y^{-1} + \alpha_1 \log^2 y^{-1} + \alpha_2 \log y^{-1}\} + O(y^{-1})$$

quand y tend vers zéro, ce qui termine la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ayoub (R.). — *An introduction to the analytic theory of numbers.* — Providence, American mathematical Society, 1963 (*Mathematical Surveys*, 10).

[2] Hardy (G. H.). — *Collected papers*, vol. 1. — Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[3] Maass (H.). — Ueber eine neue Art von nichtanalytishen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichlet sher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, t. 121, 1949, p. 141-183.

[4] Magnus (W.), Oberhettinger (F.) et Soni (R. P.). — *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.* — Berlin, Springer, 1966 (*Grundlehren der mathematischen Wisssenchaften*, 52).

(Texte définitif reçu le 3 juin 1972.)

Mme Julianne Unterberger,
3, rue Victor-Duruy,
75015 Paris.