

# BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL BARSKY

## **Fonctions $k$ -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 101 (1973), p. 397-411

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1973\\_\\_101\\_\\_397\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__397_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FONCTIONS $k$ -LIPSCHITZIENNES SUR UN ANNEAU LOCAL ET POLYNÔMES À VALEURS ENTIÈRES

PAR

DANIEL BARSKY

RÉSUMÉ. — On donne une caractérisation des fonctions de  $\mathcal{C}(A, K)$  (où  $A$  est l'anneau des entiers du corps local  $K$ ) dont les différences finies divisées 1re, 2e, ...,  $r$ -ième sont bornées uniformément sur  $(A^*)^i \times A$  ( $1 \leq i \leq r$ ). On donne aussi une caractérisation des fonctions de  $\mathcal{C}(A, K)$  qui sont continûment et uniformément dérivables sur  $A$ . On applique ensuite ces résultats pour caractériser les polynômes de  $\mathcal{K}[x]$  (où  $\mathcal{K}$  est un corps de nombres) prenant des valeurs entières sur les entiers de  $\mathcal{K}$  ainsi que leurs différences finies divisées 1re, 2e, ...,  $r$ -ième ou bien ainsi que toutes leurs dérivées.

NOTATIONS. —  $K$  est un corps local muni d'une valuation ultramétrique  $v$ , telle que  $v(\pi) = 1$  (où  $\pi$  est une uniformisante locale de  $K$ ).

On désigne par  $A$  l'anneau des entiers de  $K$ ,  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $A$ . Le cardinal de  $A/\mathfrak{m}$  est  $q$ .

Si  $n$  est un entier naturel,  $v_q(n)$  désigne l'exposant de la plus haute puissance de  $q$  qui divise  $n$ .

La suite  $u_0, u_1, \dots$  est une suite très bien répartie bien ordonnée [5] (en abrégé T.B.R.B.O.), c'est-à-dire que les  $u_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) sont des éléments de  $A$ , et  $v(u_i - u_j) = v_q(i - j)$  pour tout couple d'entiers positifs ou nuls  $i$  et  $j$ .

On pose

$$P_n(x) = (x - u_0) \dots (x - u_{n-1}),$$
$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(u_n)} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad Q_0(x) = 1,$$

de même on pose

$$K_n(y) = \frac{(y - u_1) \dots (y - u_{n-1})}{(u_n - u_{n-1}) \dots (u_n - u_1)}.$$

La suite des polynômes  $Q_n(x)$  [resp.  $K_n(y)$ ] forme une base normale de  $\mathcal{C}(A, K)$  espace des fonctions continues de  $A$  dans  $K$  muni de la

norme de la convergence uniforme sur  $A$ , c'est-à-dire que si

$$f(x) \in \mathcal{C}(A, K) \quad [\text{resp. } f(y) \in \mathcal{C}(A, K)],$$

alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q_n(x) \quad [\text{resp. } f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n K_{n+1}(y)]$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(a_n) = +\infty$  [resp.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(b_n) = +\infty$ ] (cf. [1], théorème 1).

On note additivement les distances, on emploiera l'expression « le rayon de la boule est  $R$  » au lieu de « la boule a un rayon dont la valuation est  $R$  ».

On désigne par  $[x]$ , la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire l'entier  $n$ , tel que  $n \leq x < n + 1$ .

$\mathcal{K}$  désigne un corps de nombres,  $\mathcal{A}$  son anneau des entiers,  $\mathfrak{P}$  est un idéal premier de  $\mathcal{A}$ .  $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{P}}$  et  $\hat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{P}}$  sont les complétés de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{A}$  pour la topologie  $\mathfrak{P}$ -adique de  $\mathcal{K}$  normalisée par  $v_{\mathfrak{P}}(\pi) = 1$  (où  $\pi \in \mathfrak{P}$  et  $\pi \notin \mathfrak{P}^2$ ).

On note encore  $v_{\mathfrak{P}}$  l'extension de  $v_{\mathfrak{P}}$  à  $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{P}}$ .

On pose  $q = N_{\mathcal{K}/\mathcal{O}}(\mathfrak{P})$  et  $v_q$  est la pseudo valuation associée à  $\mathfrak{P}$ .

**I. — Caractérisation des fonctions  $r$ -lipschitziennes**

E. HELSMOORTEL a montré [6] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q_n(x) \in \mathcal{C}(A, K)$  soit lipschitzienne, c'est-à-dire pour que

$$\inf_{(x, h) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*} v \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = M_1(f) > -\infty,$$

est que

$$\inf_{n \geq 1} (v(a_n) - L(n, 1)) > -\infty, \quad \text{où } L(n, 1) = \left\lfloor \frac{\log n}{\log q} \right\rfloor.$$

Si cette condition est réalisée, on a

$$\inf_{n \geq 1} (v(a_n) - L(n, 1)) = M_1(f).$$

Je généralise cette caractérisation aux fonctions  $r$ -lipschitziennes.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}(A, K)$ , et soit  $m_1 \in \mathcal{A}^* = A - \{0\}$ . On pose

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \quad M_0(f) = \inf_{x \in \mathcal{A}} (v(f(x))).$$

Puis, par récurrence, on définit, pour  $(m_1, m_2, \dots, m_j) \in (\mathcal{A}^*)^j$ ,

$$\Delta_{m_1, \dots, m_j}^j(f(x)) = \frac{\Delta_{m_1, \dots, m_{j-1}}^{j-1}(f(x+m_j)) - \Delta_{m_1, \dots, m_{j-1}}^{j-1}(f(x))}{m_j},$$

$$M_j(f) = \inf_{(m_1, \dots, m_j, x) \in (\mathcal{A}^*)^j \times \mathcal{A}} v(\Delta_{m_1, \dots, m_j}^j(f(x))),$$

on appellera  $M_j(f)$  la  $j$ -constante de Lipschitz de  $f$ .

DÉFINITION 1.1. — Une fonction  $f(x) \in \mathcal{C}(A, K)$  est  $r$ -lipschitzienne si, et seulement si,  $M_i(f) > -\infty$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

Pour caractériser les fonctions  $r$ -lipschitziennes nous allons introduire les quantités  $L(s, r)$ .

DÉFINITION 1.2. — Soit  $u_0, u_1, \dots$  une suite T.B.R.B.O. de  $A$ . On pose, pour  $s \geq r$ ,

$$L(s, r) = \max_{0 \leq i_r < i_{r-1} < \dots < i_1 < s} \{ v(u_s - u_{i_1}) + v(u_{i_1} - u_{i_2}) + \dots + v(u_{i_{r-1}} - u_{i_r}) \},$$

$$L(s, 0) = 0.$$

Posons, pour  $m_1 \neq u_0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{m_1 - u_0}^1(Q_s(x)) &= \frac{Q_s(x + m_1 - u_0) - Q_s(x)}{m_1 - u_0} \\ &= \sum_{n \geq 1, r \geq 0} \mu_{n-1, r}^s K_n(m_1) Q_r(x). \end{aligned}$$

On a  $\mu_{n-1, r}^s = 0$  si  $n + r > s$ , car  $\Delta_{m_1 - u_0}^1(Q_s(x))$  est un polynôme de degré  $s - 1$  au plus en  $m_1$  et  $x$ .

Si  $n + r \leq s$ , on a, conformément à la théorie générale (cf. [1], prop. 7, cor. 2) :

$$\mu_{n-1, r}^s = \frac{1}{u_n - u_0} P_n(u_n) P_r(u_r) \sum_{0 \leq l \leq n, 0 \leq k \leq r} \frac{Q_s(u_l + u_k - u_0)}{P_{n+1}(u_l) P_{r+1}(u_k)}.$$

Plus généralement, posons

$$\begin{aligned} \Delta_{m_1 - u_0, m_2 - u_0, \dots, m_j - u_0}^j(Q_s(x)) \\ = \sum_{j, (r \geq 0)}^* \mu_{l_1 - 1, \dots, l_{j-1}, r}^s K_{l_1}(m_1) \dots K_{l_j}(m_j) Q_r(x), \end{aligned}$$

la notation  $\sum_{j, (r \geq 0)}^*$  indique que la sommation porte sur  $l_1 \geq 1, l_2 \geq 1, \dots, l_j \geq 1, r \geq 0$ .

PROPOSITION I.1. — Avec les notations précédentes, on a l'identité

$$\mu_{l_1 - 1, \dots, l_{j-1}, r}^s = \sum_{r_1, \dots, r_{j-1}, s > r_1 > \dots > r_{j-1} > r \geq 0} \mu_{l_1 - 1, r_1}^s \mu_{l_2 - 1, r_2}^{r_1} \dots \mu_{l_{j-1} - 1, r}^{r_{j-1}}$$

et

$$\mu_{l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_{j-1}, r}^s = 0 \quad \text{si } l_1 + l_2 + \dots + l_j + r > s.$$

La deuxième partie de la proposition est évidente, puisque  $\Delta_{m_1 - u_0, \dots, m_j - u_0}^j(Q_s(x))$  est un polynôme de degré  $s - j$  au plus en  $(m_1, m_2, \dots, m_j, x)$ .

Nous allons montrer la première partie de la proposition I.1 par récurrence sur  $j$ .

L'identité est vraie pour  $j = 1$ , par définition même de  $\mu_{l_1-1, r}^s$ , supposons-la vraie pour  $j$ , et montrons qu'elle est encore vraie pour  $j + 1$ .

$$\begin{aligned} & \Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0, m_{j+1}-n_0}^{j+1} (Q_s(x)) \\ &= \frac{\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0}^j (Q_s(x + m_{j+1} - u_0)) - \Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0}^j (Q_s(x))}{m_{j+1} - u_0} \\ &= \sum_{i, (r_j \geq 0)}^* \mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r}^s K_{l_1}(m_1) \dots K_{l_j}(m_j) \\ & \quad \times \frac{Q_{r_j}(x + m_{j+1} - u_0) - Q_{r_j}(x)}{m_{j+1} - u_0} \\ &= \sum_{i, (r_j \geq 0)}^* \mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r}^s K_{l_1}(m_1) \dots K_{l_{j-1}}(m_{j-1}) \\ & \quad \times K_{l_j}(m_j) (\sum_{l_{j+1} \geq 1, r_{j+1} \geq 0} \mu_{l_{j+1}-1, r_{j+1}}^{r_j} K_{l_{j+1}}(m_{j+1}) Q_{r_{j+1}}(x)) \\ &= \sum_{i+1, (r_{j+1} \geq 0)}^* (\sum_{r \geq r_{j+1}} \mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r_j}^s \mu_{l_{j+1}-1, r_{j+1}}^{r_j}) \\ & \quad \times K_{l_1}(m_1) \dots K_{l_j}(m_j) K_{l_{j+1}}(m_{j+1}) Q_{r_{j+1}}(x). \end{aligned}$$

Donc en identifiant, on trouve

$$\mu_{l_1-1, \dots, l_{j+1}-1, r_{j+1}}^s = \sum_{r_j > r_{j+1}} \mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r_j}^{r_j} \mu_{l_{j+1}-1, r_{j+1}}^{r_j},$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} & \mu_{l_1-1, \dots, l_{j+1}-1, r_{j+1}}^s \\ &= \sum_{r_j > r_{j+1}} (\sum_{r_1, r_2, \dots, r_{j-1}, s > r_1 > \dots > r_{j-1} > r_j \geq 0} \mu_{l_1-1, r_1}^s \mu_{l_2-1, r_2}^{r_1} \\ & \quad \dots \mu_{l_{j-1}-1, r_{j-1}}^{r_{j-2}}) \mu_{l_{j+1}-1, r_{j+1}}^{r_j} \\ &= \sum_{r_1, r_2, \dots, r_j, s > r_1 > r_2 > \dots > r_j > r_{j+1} \geq 0} \mu_{l_1-1, r_1}^s \dots \mu_{l_{j-1}-1, r_{j-1}}^{r_{j-2}} \mu_{l_{j+1}-1, r_{j+1}}^{r_j}, \end{aligned}$$

et la proposition I.1 est démontrée.

PROPOSITION I.2. —  $Q_s(x)$  est une fonction  $j$ -lipschitzienne pour tout entier  $j \geq 1$ , et on a  $M_j(Q_s) \geq -L(s, j)$  pour tout couple d'entiers  $s \geq j \geq 1$ .

En effet,  $\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0}^j (Q_s(x))$  est, soit un polynôme en  $(m_1, \dots, m_j, x)$ , soit la fonction partout nulle sur  $A$  ( $s < j$ ), donc toujours bornée sur  $A^{j+1}$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} & v(\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0}^j (Q_s(x))) \\ & \geq \inf_{l_1, \dots, l_j, r} (v(\mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r}^s)) \\ & \geq \inf_{l_1, \dots, l_j, r} (v(\sum_{r_1, \dots, r_{j-1}, s > r_1 > \dots > r_{j-1} > r \geq 0} \mu_{l_1-1, r_1}^s \mu_{l_2-1, r_2}^{r_1} \dots \mu_{l_{j-1}-1, r_{j-1}}^{r_{j-2}})) \\ & \geq \inf_{l_1, \dots, l_j} (v_q(l_1) + v_q(l_2) + \dots + v_q(l_j)) \\ & = -\sup_{l_1, \dots, l_j} \{v_q(l_1) + \dots + v_q(l_j)\}. \end{aligned}$$

Ceci d'après l'expression donnée plus haut de  $\mu_{n-1, r}^s$  dans laquelle

$$v\left(P_n(u_n) P_r(u_r) \sum_{0 \leq l \leq n, 0 \leq k \leq r} \frac{Q_s(u_l + u_k + u_0)}{P_{n+1}(u_l) P_{r+1}(u_k)}\right) \geq 0.$$

Or  $l_1, \dots, l_j$  vérifient la condition suivante pour que  $\mu_{l_1-1, \dots, l_j-1, r}^s$  ne soit pas nul :  $l_1 + l_2 + \dots + l_j + r \leq s$ . De là l'inégalité

$$v(\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_j-u_0}^j(Q_s(x))) \geq -L(s, j),$$

ou encore  $M_j(Q_s) \geq -L(s, j)$ .

**COROLLAIRE.** — Une condition suffisante pour que  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ , où  $f \in \mathcal{C}(A, K)$ , soit  $j$ -lipschitzienne est qu'il existe des constantes  $K_i > -\infty$  ( $1 \leq i \leq j$ ) telles que  $v(a_n) - L(n, i) \geq K_i$  pour  $1 \leq i \leq j$  et  $n \geq i$ .

S'il en est ainsi, on a  $K_i \geq M_i(f)$  pour  $1 \leq i \leq j$ .

Ce corollaire est évident si l'on remarque que

$$\Delta_{m_1, \dots, m_i}^i(f(x)) = \sum_{n \geq i} a_n \Delta_{m_1, \dots, m_i}^i Q_n(x)$$

pour  $m_1, \dots, m_i$  fixés.

Nous allons montrer maintenant la réciproque du corollaire.

**THÉORÈME I.1.** — Une condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$  ( $f \in \mathcal{C}(A, K)$ ) soit  $j$ -lipschitzienne est que

$$\inf_{0 \leq r \leq j, n \geq r} (v(a_n) - L(n, r)) > -\infty.$$

Si cette condition est réalisée, on a

$$\inf_{0 \leq r \leq j, n \geq r} (v(a_n) - L(n, r)) = \inf_{0 \leq r \leq j} M_r(f).$$

Pour démontrer ce théorème nous allons raisonner par récurrence sur  $j$  et pour  $j$  fixé par récurrence sur  $n$ .

$j = 0$  :  $\inf_{n \geq 0} v(a_n) = M_0(f) > -\infty$ , ceci est vrai d'après [1] (théorème 1).

$j = 1$  : Posons  $C_1(f) = \inf(M_0(f), M_1(f))$ , comme  $L(n, 1) = 0$  si  $1 \leq n < q$ , on a  $v(a_n) - L(n, 1) = v(a_n)$  pour  $1 \leq n < q$ , et par conséquent  $v(a_n) - L(n, 1) \geq C_1(f)$  pour  $1 \leq n < q$ .

Supposons la proposition vraie pour  $n$ . Posons

$$f_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k Q_k(x),$$

$f_n(x)$  est 1-lipschitzienne d'après le corollaire de la proposition I.2 et de 1-constante de Lipschitz  $M_1(f_n) \geq M_1(f)$ .

Soit alors  $x \in A$ ,  $v(f_n(x) - f(u_i)) \geq M_1(f) + v(x - u_i)$  si  $0 \leq i \leq n$ , et si  $x = u_{n+1}$ , il vient  $v(f_n(u_{n+1})) = v(a_{n+1}) \geq M_1(f) + v(u_{n+1} - u_i)$ , d'où le résultat.

Supposons le théorème vrai jusqu'à  $j - 1 > 1$ .

Supposons donc que, pour  $k = 0, 1, \dots, j - 1$ , on ait montré que

$$v(a_n) - L(n, k) \geq C_k(f) > -\infty \quad \text{pour tout entier } n \geq k,$$

où  $C_k(f) = \inf(M_0(f), M_1(f), \dots, M_k(f))$ .

Posons  $C_j(f) = \inf(M_j(f), C_{j-1}(f))$ . Comme  $L(n, j) = 0$  si  $j \leq n < q + j - 1$ , on a bien

$$v(a_n) - L(n, j) \geq C_j(f) \quad \text{pour } j \leq n < q + j - 1.$$

Supposons que, pour  $q + j - 1 \leq n < s$ , on ait  $v(a_n) - L(n, j) \geq C_j(f)$ , et montrons que  $v(a_s) - L(s, j) \geq C_j(f)$ .

Soit  $f_s(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k Q_k(x)$ ,  $f_s(x)$  est encore  $j$ -lipschitzienne, et sa  $k$ -constante ( $0 \leq k \leq j$ ) de Lipschitz vérifie  $M_k(f_s) \geq M_k(f)$  (d'après l'hypothèse de récurrence et le corollaire de la proposition I.2).

Choisissons des indices  $0 \leq i_1 < \dots < i_j < s$  tels que

$$v(u_{i_1} - u_{i_2}) + v(u_{i_2} - u_{i_3}) + \dots + v(u_{i_j} - u_s) = L(s, j).$$

Choisissons des éléments  $u'_{i_1}, u'_{i_2}, \dots, u'_{i_j}$  tels que  $v(u'_{i_k} - u_{i_k}) \geq L(s, 1) + 1$  et aussi tels que, si l'on pose

$$m_1 = u'_{i_1} - u'_{i_2}, \quad m_2 = u'_{i_2} - u'_{i_3}, \quad \dots, \quad m_j = u'_{i_j} - u_s,$$

alors  $y_{\bar{l}} = m_1 + m_2 + \dots + \hat{m}_{l_1} + \dots + \hat{m}_{l_k} + \dots + m_j \neq 0$  <sup>(1)</sup> pour tout multi-indice  $\bar{l} = (l_1, \dots, l_k)$  ( $0 \leq k \leq j$ )  $1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq j$ . On a  $v(m_1) + \dots + v(m_j) = L(s, j)$ .

Posons  $S(s, j) = \{ (u_s + y_{\bar{l}}) \}_{\bar{l} \in \bar{I}}$ .  $S(s, j)$  est une famille finie d'éléments de  $A$  tous distincts de  $u_s$ . On peut donc trouver [2] une suite T. B. R. B. O.  $v_0, v_1, \dots$  telle que

$$1^\circ v_0 = u_0, v_1 = u_1, \dots, v_s = u_s.$$

$$2^\circ v_i \notin S(s, j) \text{ si } i > s.$$

On sait [2] que si  $v_0, v_1, \dots$  est une suite T. B. R. B. O. de  $A$ , alors la suite des fonctions  $(\psi_{R, i})_{i \in \mathbf{N}}$ , définies comme suit, est une base normale de  $\mathcal{C}(A, K)$  ( $R$  est fixé).

—  $0 \leq i < q^R$ ,  $\psi_{R, i}$  est la fonction caractéristique de la boule de centre  $v_i$  et de rayon  $R$ .

—  $i \geq q^R$ ,  $\psi_{R, i}$  est la fonction caractéristique de la boule de centre  $v_i$  et de rayon  $L(i, 1) + 1$ .

(1) Dans ce paragraphe, la notation  $\hat{m}$  indique que le terme  $m$  est remplacé par 0.

On peut donc écrire  $f_s(x) = \sum_{k \geq 0} b_k \psi_{R,k}(x)$  avec  $b_0 = b_1 = \dots = b_{s-1} = 0$  et  $b_s = a_s$ . D'autre part, on a le résultat suivant [2] :

Soit  $f(x) \in \mathcal{C}(A, K)$ , et soit  $\sum_{n \geq 0} b_n \psi_{0,n}$  son développement sur la base normale définie ci-dessus. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f(x)$  est 1-lipschitzienne;
- (ii)  $v(b_n) - L(n, 1) \geq M_1(f)$  si  $n \geq 1$ .

Soit  $N$  un entier tel que, pour  $n \geq N$ , on ait  $v(a_n) - L(n, j) > C_j(f)$  et  $v(b_n) - L(s, j) > C_j(f)$  [on revient ici à la fonction  $f_s(x)$  qui est  $j$ -lipschitzienne,  $j \geq 2$ ]. Il suffit de choisir  $N$  de telle sorte que  $M_1(f) + L(N, 1) > L(s, j) + C_j(f)$  (en particulier on voit que  $N$  ne dépend ni de  $R$ , ni de la suite T.B.R.B.O. choisie).

Soit  $R' = \max_{s < i < N, z \in S(s, j)} (v(v_i - z))$ .  $R'$  est fini d'après la construction de la suite  $v_0, v_1, \dots$ . Soit  $R = \max(L(N, 1) + 1, R' + 1)$ . Prenons comme base normale de  $\mathcal{C}(A, K)$  la suite des fonctions  $(\psi_{R,i})_{i \in \mathbb{N}}$  relatives à la suite T.B.R.B.O.  $v_0, v_1, \dots$  définie ci-dessus, et au nombre  $R$  défini plus haut. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_{m_1, \dots, m_j}^j(f_s(u_s)) &= \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_j} (f_s(u_s + m_1 + \dots + m_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^j f_s(u_s + m_1 + \dots + \hat{m}_i + \dots + m_j) + \\ &\quad + (-1)^k \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq j} f_s(u_s + m_1 + \dots + \hat{m}_{l_1} + \dots \\ &\quad \quad \quad + \hat{m}_{l_k} + \dots + m_j) + \dots \\ &\quad \quad \quad + (-1)^s f_s(u_s)). \end{aligned}$$

En développant  $f_s$  sur la base des  $(\psi_{R,i})_{i \in \mathbb{N}}$ , il vient

$$\begin{aligned} \Delta_{m_1, \dots, m_j}^j(f_s(u_s)) &= \frac{(-1)^s a_s}{m_1 \dots m_j} + \frac{1}{m_1 \dots m_j} (\sum_{0 \leq k \leq j} \sum_{\bar{l}_k} (-1)^k (\sum_{i \geq s} b_i \psi_{R,i}(u_s + y_{\bar{l}_k}))). \end{aligned}$$

Or si  $s \leq i < q^R$ , on a  $v(v_i - u_s + y_{\bar{l}_k}) \leq R$  d'après la définition même de  $R$ . Donc, si  $s \leq i < q^R$ ,  $\psi_{R,i}(u_s + y_{\bar{l}_k}) = 0$  d'après la définition de  $\psi_{R,i}$ . Si  $i \geq q^R$ , alors  $i > N$ , et par conséquent

$$v(b_i) - L(s, j) > C_j(f).$$

Donc

$$v(a_s) - v(m_1 m_2 \dots m_j) = v(a_s) - L(s, j) \geq C_j(f),$$

car  $v(\Delta_{m_1, \dots, m_j}^j(f_s(u_s))) \geq C_j$ , et le théorème est démontré.



COROLLAIRE. — Si l'entier naturel  $N$  est tel que, pour  $n \geq N$ , on ait

$$L(n, j) > L(n, j-1) > \dots > L(n, 1) > 0,$$

et si  $f(x) = \sum_{n \geq N} a_n Q_n(x)$  est  $j$ -lipschitzienne alors

$$M_0(f) \geq M_1(f) \geq \dots \geq M_j(f).$$

Remarque. — Un tel entier existe toujours, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (L(n, j) - L(n, j-1)) = +\infty \quad (\text{voir [2]}).$$

## II. — Caractérisation des fonctions continûment et uniformément dérivables sur $A$

E. HELSMOORTEL, dans [6], a montré qu'une condition suffisante pour que  $f \in \mathcal{C}(A, K)$  soit  $j$ -fois continûment et uniformément dérivable est que,

$$\text{si } f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v(a_n) - j L(n, 1) = +\infty.$$

Je montre ci-dessous que cette condition est nécessaire et suffisante.

DÉFINITION II.1. — On dit que  $f \in \mathcal{C}(A, K)$  est  $j$ -fois continûment et uniformément dérivable sur  $A$  si, et seulement si, pour  $1 \leq k \leq j$ ,  $(\forall M > 0) (\forall x \in A) \exists (n_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbf{N}$  tel que  $(\forall (h_i)_{1 \leq i \leq k} \in A^*)$ ,

$$v(h_i) > n_i \Rightarrow v(\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_k}^k(f(x)) - f^{(k)}(x)) \geq M,$$

où  $f^{(k)}(x)$  désigne la dérivée  $k$ -ième de  $f$ .

On a la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. — Une condition nécessaire et suffisante pour que  $f \in \mathcal{C}(A, K)$  soit  $j$ -fois continûment et uniformément dérivable sur  $A$  est que chacune des fonctions  $\Phi_k(x, h_1, \dots, h_k) = \Delta_{h_1, \dots, h_k}^k(f(x))$  soit prolongeable en une application continue de  $A^{k+1}$  dans  $K$  pour  $1 \leq k \leq j$ .

Remarques. — Une fonction  $j$ -fois continûment et uniformément dérivable sur  $A$  est aussi  $j$ -lipschitzienne.

La famille des polynômes  $K_{n_1}(y) \dots K_{n_k}(y) Q_r(x)$ , ( $n_i \geq 1$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $r \geq 0$ ), est une base normale de  $\mathcal{C}(A^{k+1}, K)$ , car  $\mathcal{C}(A^{k+1}, K) = \hat{\otimes}^{k+1} \mathcal{C}(A, K)$  ([1], prop. 6, cor. 2).

Soit  $f$  une fonction  $j$ -fois continûment et uniformément dérivable sur  $A$ ,  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n(x)$ .

Posons

$$\begin{aligned} &\Delta_{m_1-u_0, m_2-u_0, \dots, m_t-u_0}^t (f(x)) \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_t, r} \mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r} K_{n_1}(m_1) \dots K_{n_t}(m_t) Q_r(x), \end{aligned}$$

où  $n_i \geq 1$  pour  $1 \leq i \leq t$  et  $r \geq 0$ .

Posons

$$\delta_{m_1, \dots, m_t}^t (f(x)) = m_1 m_2 \dots m_t \Delta_{m_1, \dots, m_t}^t (f(x)).$$

On déduit facilement de [1] (prop. 7, cor. 2) que

$$\begin{aligned} &\mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r} \\ &= \frac{1}{(u_{n_1} - u_0) \dots (u_{n_t} - u_0)} P_{n_1}(u_{n_1}) \dots P_{n_t}(u_{n_t}) P_r(u_r) \\ &\quad \times \left( \sum_{0 \leq l_i \leq n_i, 0 \leq k \leq r} \frac{\delta_{u_{l_1}-u_0, \dots, u_{l_t}-u_0}^t (f(u_k))}{P'_{n_1+1}(u_{l_1}) \dots P'_{n_t+1}(u_{l_t}) P_{r+1}(u_k)} \right) \end{aligned}$$

( $i$  varie de 1 à  $t$ ).

On en déduit facilement [2] que

$$\begin{aligned} &\mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r} \\ &= \frac{P_{n_1}(u_{n_1}) \dots P_{n_t}(u_{n_t}) P_r(u_r)}{(u_{n_1} - u_0) \dots (u_{n_t} - u_0)} \\ &\quad \times \left( \sum_{j > \sup(n_1, \dots, n_t, r)} a_j \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{0 \leq l_i \leq n_i, 1 \leq i \leq t, 0 \leq k \leq r} \frac{\delta_{u_{l_1}-u_0, \dots, u_{l_t}-u_0}^t Q_j(u_k)}{P'_{n_1+1}(u_{l_1}) \dots P'_{n_t+1}(u_{l_t}) P_{r+1}(u_k)} \right) \end{aligned}$$

et que

$$v(\mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}) \geq \inf_{j > \sup(n_1, \dots, n_t, r)} (v(a_j) - (v_q(n_1) + \dots + v_q(n_t)))$$

avec  $n_1 + n_2 + \dots + n_t < tj$  et  $n_i \geq 1$  ( $1 \leq i \leq t$ ).

Donc si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (v(a_j) - L(tj, t)) = +\infty,$$

ou encore si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (v(a_j) - L(j, t)) = +\infty,$$

ou encore si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (v(a_j) - tL(j, 1)) = +\infty$$

(pour les équivalences entre ces trois conditions voir [2]), alors  $f(x)$  est  $t$ -fois uniformément et continûment dérivable sur  $A$ .

Réciproquement, supposons que  $f(x)$  soit  $t$ -fois continûment et uniformément dérivable sur  $A$ . Considérons la fonction  $f_s(x) = \sum_{k \geq s} a_k Q_k(x)$  [elle est aussi  $t$ -fois uniformément et continûment dérivable sur  $A$ ,

car  $f_s(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k Q_k(x)$ , où  $s$  est un entier qui sera choisi ultérieurement. Posons

$$\begin{aligned} & \Delta_{m_1-u_0, \dots, m_t-u_0}^l(f_s(x)) \\ &= \sum_{n_1 \geq 1, \dots, n_t \geq 1, r \geq 0} \nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)} K_{n_1}(m_1) \dots K_{n_t}(m_t) Q_r(x). \end{aligned}$$

Il est facile de voir [2] que  $\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)} = \mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}$  dès que  $n_1 + n_2 + \dots + n_t + r \geq s$ .

Or  $f_s(x)$  est  $t$ -lipschitzienne, donc si  $s$  est assez grand (corollaire du théorème I.1 et théorème I.1) :

$$\begin{aligned} & \inf_{(m_1, \dots, m_t, x) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}} v(\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_t-u_0}^l(f_s(x))) \\ &= \inf_{n_1 \geq 1, \dots, n_t \geq 1, r \geq 0} v(\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)}) = \inf_{i \geq s} (v(a_i) - L(i, t)). \end{aligned}$$

Choisissons  $s$  de telle sorte que  $L(s, t) - L(s-1, t) > 0$ .

Ceci implique que, si  $n_1 + n_2 + \dots + n_t < s$ , alors

$$v(\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)}) > \inf_{i \geq s} (v(a_i) - L(i, t)),$$

car, dans ce cas,  $v_q(n_1) + \dots + v_q(n_t) \leq L(s-1, t) < L(s, t)$ .

Donc le minimum de  $v(\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)})$  est atteint pour un multi-indice  $(n_1, n_2, \dots, n_t, r)$  tel que  $n_1 + \dots + n_t \geq s$  et par conséquent,

$$\begin{aligned} & \inf_{(n_1, \dots, n_t, r)} v(\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)}) = \inf_{(n_1, \dots, n_t, r), n_1 + \dots + n_t \geq s} v(\nu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}^{(s)}) \\ &= \inf_{n_1, \dots, n_t, r, n_1 + \dots + n_t \geq s} v(\mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}) = \inf_{i \geq s} (v(a_i) - L(i, t)). \end{aligned}$$

Or, si  $n_1 + \dots + n_t \geq s$ , un au moins des  $n_i$  est supérieur ou égal à  $[s/t]$ .

Comme  $\Delta_{m_1-u_0, \dots, m_t-u_0}^l(f(x))$  est une fonction de  $\mathcal{C}(A^{t+1}, K)$ ,

$$\lim_{\sup(n_1, \dots, n_t, r) \rightarrow +\infty} v(\mu_{n_1-1, \dots, n_t-1, r}) = +\infty.$$

Donc si l'on fait décrire à  $s$  une suite infinie croissante d'entiers positifs  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tels que  $L(s_i, t) - L(s_i - 1, t) > 0$  [une telle suite existe puisque  $\lim_{s \rightarrow +\infty} L(s, t) = +\infty$ ], alors

$$\sup_{n_1 + \dots + n_t \geq s_i} (v(a_i) - L(i, t)) \geq \left[ \frac{s_i}{t} \right]$$

et par conséquent

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (v(a_i) - L(i, t)) = +\infty.$$

Le théorème est démontré.

**THÉORÈME II.1.** — *L'espace des fonctions indéfiniment continûment et uniformément dérivables sur  $A$  coïncide avec l'espace des fonctions indéfiniment lipschitziennes sur  $A$ .*

Pour la démonstration, voir [2].

**III. — Polynômes prenant des valeurs entières sur les entiers d'un corps de nombres ainsi que leurs différences finies divisées**

CARLITZ [5] a montré que l'on pouvait caractériser les polynômes de  $Q[x]$ , dont les différences finies divisées 0-ième, 1re, ...,  $r$ -ième (resp. toutes les dérivées, voir aussi [9]) sont à valeurs entières sur  $\mathbf{Z}$ , par la condition suivante :

$$\text{si } P(x) = \sum_{n=0}^m a_n \binom{x}{n}, \text{ alors } v_P(a_n) - L(n, i) \geq 0$$

$$\text{(pour } i \leq n \leq m \text{ et } 0 \leq i \leq r)$$

pour tout nombre premier  $P$ .

Dans ce paragraphe, je généralise ces résultats aux corps de nombres en utilisant une idée de POLYA et OSTROWSKI ([7] et [8]).

DÉFINITION III.1. — Soit  $P(x)$  un polynôme de  $\mathcal{K}[x]$ . On dit que  $P(x)$  est à valeurs entières sur  $\mathcal{A}$  ainsi que ses différences finies divisées 1re, ...,  $j$ -ième si, et seulement si,

$\Delta_{m_1, \dots, m_r}^r(P(x)) \in \mathcal{A}$  pour  $(m_1, m_2, \dots, m_r, x) \in \mathcal{A}^{r+1}$  et  $0 \leq r \leq j$ . On note  $B_r(\mathcal{K})$  l'espace des polynômes de  $\mathcal{K}[x]$  possédant cette propriété.

Pour tout idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $\mathcal{K}$ , on définit une suite T.B.R.B.O. de  $\hat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{P}}$  formée d'éléments de  $\mathcal{A}$  (c'est toujours possible car  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\hat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{P}}$ , [1], prop. 3 bis, rem. 6), que l'on notera  $u_{0, \mathfrak{P}}, u_{1, \mathfrak{P}}, \dots$ , et on définit aussi une suite de polynômes d'interpolation

$$Q_n^{(\mathfrak{P})}(x) = \frac{(x - u_{0, \mathfrak{P}}) \dots (x - u_{n-1, \mathfrak{P}})}{(u_{n, \mathfrak{P}} - u_{0, \mathfrak{P}}) \dots (u_{n, \mathfrak{P}} - u_{n-1, \mathfrak{P}})}$$

Tout polynôme  $P(x)$  de  $\mathcal{K}[x]$  pourra donc se développer sur la base des  $Q_n^{(\mathfrak{P})}(x)$  de la manière suivante  $P(x) = \sum_{n=0}^m a_{n, \mathfrak{P}} Q_n^{(\mathfrak{P})}(x)$ .

On définit de même, pour chaque idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $\mathcal{K}$  les quantités  $L(n, j, \mathfrak{P})$  pour  $n \geq j$  comme étant les quantités  $L(n, j)$  relatives à  $\hat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{P}}$ .

PROPOSITION III.1. — Pour que le polynôme  $P(x)$  à coefficients dans  $\mathcal{K}$  appartienne à  $B_r(\mathcal{K})$ , il faut et il suffit que

$$v_{\mathfrak{P}}(a_{n, \mathfrak{P}}) - L(n, j, \mathfrak{P}) \geq 0,$$

$$\forall n \geq j, \forall \mathfrak{P} \text{ idéal premier de } \mathcal{K} \text{ et } \forall j \text{ tel que } 0 \leq j \leq r.$$

La démonstration est immédiate à partir du théorème I.1.

Écrivons les polynômes de degré  $m$  de  $B_r(\mathcal{K})$  sous la forme  $P_i(x) = (\alpha_i/m!) x^m +$  termes de degré inférieur à  $m$ . On note

$$\mathfrak{a}_m^{(r)} = \{ \alpha_i \}_{i \in I} \cup \{ 0 \}.$$

PROPOSITION III.2. —  $\mathfrak{a}_m^{(r)}$  est un idéal entier de  $\mathfrak{A}$ .

En effet,  $\mathfrak{a}_m^{(r)}$  est un idéal de  $\mathcal{K}$ , car  $\Delta^j$  est un opérateur  $\mathfrak{A}$ -linéaire de  $\mathcal{K}[x]$  dans  $\mathcal{K}[x, m_1, \dots, m_j]$ .

Posons

$$\begin{aligned} \delta^n P(0) &= P(n) - \binom{n}{1} P(n-1) + \dots \\ &\quad + (-1)^k \binom{n}{k} P(n-k) + \dots + (-1)^n P(0), \end{aligned}$$

alors

$$P(x) = P(0) + \binom{x}{1} \delta^1 P(0) + \dots + \binom{x}{m} \delta^m P(0).$$

Donc  $\alpha_i = \delta^m P(0) \in \mathfrak{A}$ .

On pose

$$\Omega(m, \mathfrak{P}) = \sum_{i \geq 1} \left[ \frac{m}{q^i} \right]$$

et

$$\lambda(m, j, \mathfrak{P}) = \inf_{0 \leq r \leq j} (\Omega(m, \mathfrak{P}) - L(m, r, \mathfrak{P})).$$

PROPOSITION III.3. — Si  $P(x)$  est un polynôme primitif à coefficients entiers de degré  $m$ , alors, pour tout idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $\mathfrak{A}$ , on a

1°  $\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l(P(x))) \leq \lambda(m, j, \mathfrak{P})$ ,  $\forall j \geq 0$ .

2° Il existe un polynôme primitif à coefficients entiers  $H_m(x)$  de degré  $m$  tel que

$$\begin{aligned} \inf_{0 \leq l \leq j} (M_l(H_m(x))) &= \lambda(m, j, \mathfrak{P}), \text{ et ceci } \forall \mathfrak{P}. \\ P(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \end{aligned}$$

avec

$$\inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(a_i) = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{P}.$$

Dans  $\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}$ , on a

$$P(x) = b_{0, \mathfrak{P}} + b_{1, \mathfrak{P}} P_1^{(\mathfrak{P})}(x) + \dots + b_{m, \mathfrak{P}} P_m^{(\mathfrak{P})}(x),$$

où  $P_m^{(\mathfrak{P})}(x) = (x - u_{0, \mathfrak{P}})(x - u_{1, \mathfrak{P}}) \dots (x - u_{m-1, \mathfrak{P}})$ .

On a

$$\inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(a_i) = \inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(b_{i, \mathfrak{P}}) = 0$$

(c'est immédiat car la matrice de changement de base est triangulaire avec des 1 sur la diagonale).

Le théorème I.1 indique que

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (P(x))) = \inf_{j \leq i \leq m} (v_{\mathfrak{P}} (b_{i, \mathfrak{P}}) + \lambda (i, j, \mathfrak{P})).$$

Si l'on avait

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (P(x))) > \lambda (m, j, \mathfrak{P}),$$

on aurait, pour tout  $i \leq m$ ,

$$v_{\mathfrak{P}} (b_{i, \mathfrak{P}}) > \lambda (m, j, \mathfrak{P}) - \lambda (i, j, \mathfrak{P}).$$

Or la fonction  $i \rightarrow \lambda (i, j, \mathfrak{P})$  est une fonction non décroissante de  $i$  (voir [2]). Donc on aurait  $v_{\mathfrak{P}} (b_{i, \mathfrak{P}}) > 0, \forall i \leq m$ , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur  $P(x)$ .

La première partie est démontrée.

D'autre part, on sait que l'on a (théorème I.1) :

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (P_m^{(\mathfrak{P})}(x))) = \lambda (m, j, \mathfrak{P}).$$

Construisons une suite finie  $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$  (dépendant de  $m$ ) d'éléments de  $\mathfrak{A}$  telle que  $v_{\mathfrak{P}} (u_i - u_{i, \mathfrak{P}}) \geq \Omega (m, \mathfrak{P})$  pour tout  $\mathfrak{P}$  (c'est possible puisque les  $v_{\mathfrak{P}}$  sont indépendantes et que  $\Omega (m, \mathfrak{P}) = 0$  pour presque tout  $\mathfrak{P}$ ). Posons

$$H_m(x) = (x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{m-1}).$$

Il est clair que

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (H_m(x))) = \lambda (m, j, \mathfrak{P}).$$

La proposition est démontrée.

Posons

$$\mathfrak{J}(m, j) = \prod_{\mathfrak{P} \text{ premier}} \mathfrak{P}^{-\lambda(m, j, \mathfrak{P})}$$

et

$$\mathfrak{J}(m, j, \mathfrak{P}_1) = \left( \prod_{\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_1} \mathfrak{P}^{-\lambda(m, j, \mathfrak{P})} \right) \mathfrak{P}_1^{-\lambda(m, j, \mathfrak{P}_1) - 1}.$$

$\mathfrak{J}(m, j)$  et  $\mathfrak{J}(m, j, \mathfrak{P}_1)$  sont des idéaux fractionnaires de  $\mathfrak{A}$  car  $\lambda(m, j, \mathfrak{P}) = 0$  pour presque tout  $\mathfrak{P}$ .

PROPOSITION III.4 :  $\mathfrak{J}(m, j) = \mathfrak{a}_m^{(j)} / (m!)$ .

Soit  $\chi$  un élément de  $\mathfrak{J}(m, j)$  tel que  $v_{\mathfrak{P}}(\chi) = -\lambda(m, j, \mathfrak{P})$  pour un  $\mathfrak{P}$  fixé.

D'après la proposition III.3,  $\chi H_m(x) \in B_j(\mathfrak{K})$ . Soit  $\chi'$  un élément de  $\mathfrak{J}(m, j, \mathfrak{P})$  tel que  $v_{\mathfrak{P}}(\chi') = -\lambda(m, j, \mathfrak{P}) - 1$ , alors d'après la proposition III.3  $\chi' H_m(x) \notin B_j(\mathfrak{K})$ .

Donc  $\chi m! \in \mathfrak{a}_m^{(j)}$  et  $\chi' m! \notin \mathfrak{a}_m^{(j)}$ .

Par conséquent,

$$v_{\mathfrak{P}}(\alpha_m^{(j)}) = v_{\mathfrak{P}}(m!) - \lambda(m, j, \mathfrak{P}) \quad \text{et ceci pour tout } \mathfrak{P},$$

donc

$$\mathfrak{J}(m, j) = \frac{\alpha_m^{(j)}}{(m!)}$$

THÉORÈME III.1 :  $B_j(\mathcal{K}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} \mathfrak{J}(m, j) H_m(x)$ .

En effet, soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $m$  appartenant à  $B_j(\mathcal{K})$ .

$$P(x) = \frac{\alpha}{m!} x^m + \text{termes de degré inférieur},$$

où  $\alpha \in \alpha_m^{(j)}$ , donc  $\alpha/m! \in \mathfrak{J}(m, j)$ , et par conséquent

$$P_1(x) = P(x) - \frac{\alpha}{m!} H_m(x) \in B_j(\mathcal{K}),$$

et est de degré strictement inférieur à  $m$ .

Donc tout polynôme  $P(x)$  de  $B_j(\mathcal{K})$  se met sous la forme

$$P(x) = \beta_0 H_0(x) + \beta_1 H_1(x) + \dots + \beta_m H_m(x) \quad \text{où } \beta_i \in \mathfrak{J}(i, j) \\ (0 \leq i \leq m).$$

La décomposition est unique, car

$$\mathfrak{J}(m, j) H_m(x) \cap \mathfrak{J}(n, j) H_n(x) = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

COROLLAIRE III.1. —  $B_j(\mathcal{K})$  est toujours un  $\alpha$ -module libre.

C'est clair, car  $\mathfrak{J}(m, j) H_m(x)$  est  $\alpha$ -module de type fini sans torsion, et comme  $\alpha$  est de Dedekind, il est projectif.

Par conséquent,  $B_j(\mathcal{K})$  qui est somme directe de projectifs est projectif, et comme il n'est pas de type fini sur un anneau de Dedekind, il est libre (voir [4], exercices).

On dit que  $B_j(\mathcal{K})$  admet une base régulière si, et seulement si, il admet une base formée de polynômes de degré croissant.

PROPOSITION III.5. —  $B_j(\mathcal{K})$  admet une base régulière si, et seulement si,  $\alpha_m^{(j)}$  est principal pour tout entier  $m \geq 0$ .

Pour la démonstration, voir [2] ou [8].

COROLLAIRE III.2. —  $B_j(\mathcal{K})$  admet une base régulière si, et seulement si,  $\mathfrak{J}(m, j)$  est principal pour  $m \geq 0$ .

COROLLAIRE III.3. —  $B_j(\mathcal{K})$  admet une base régulière si, et seulement si, le produit des idéaux premiers de même norme est principal.

Pour la démonstration, voir [2].

Notons  $B_\infty(\mathcal{K})$  l'espace des polynômes à valeurs entières de  $\mathcal{K}[x]$  dont toutes les différences finies divisées sont à valeurs entières, et  $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{K})$  l'espace des polynômes à valeurs entières dont toutes les dérivées sont à valeurs entières.

Notons

$$\mathfrak{J}(m, \infty) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \mathfrak{B}^{-(\Omega(m, \mathfrak{p}) - (n/q))}.$$

PROPOSITION III.6. :  $B_\infty(\mathcal{K}) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{K})$ .

Pour la démonstration, voir [2].

THÉORÈME III.2 :  $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{K}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} \mathfrak{J}(m, \infty) H_m(x)$ .

La démonstration est analogue à celle du théorème III.1 et repose sur le fait que

$$\max_{j \geq 0} L(n, j, \mathfrak{P}) = \begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} \quad (\text{voir [2]}).$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). — Interpolation  $p$ -adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 117-180 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1964).
- [2] BARSKY (D.). — *Polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières et fonctions  $k$ -lipschitziennes sur un anneau local*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Math., Univ. Paris-VII, 1972.
- [3] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, chap. 7, 2<sup>e</sup> édition. — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1179; *Bourbaki*, 14).
- [4] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, Chap. 7. — Paris, Hermann, 1965 (*Act. scient. et ind.*, 1314; *Bourbaki*, 31).
- [5] CARLITZ (L.). — A note on integral-valued polynomials, *Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc.*, séries A, t. 62, 1959, p. 294-299.
- [6] HELSMOORTEL (E.). — Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 546-548.
- [7] OSTROWSKI (A.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für die reine und ang. Math.*, t. 149, 1919, p. 117-124.
- [8] POLYA (G.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für die reine und ang. Math.*, t. 149, 1919, p. 97-116.
- [9] STRAUS (E. G.). — On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 2, 1951, p. 24-27.

(Texte reçu le 4 juillet 1973.)

Daniel BARSKY,  
36, rue de Penthièvre,  
75008 Paris.