

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN DURAND

Quatre problèmes de Mahler sur la fonction ordre d'un nombre transcendant

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 365-377

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__365_0

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUATRE PROBLÈMES DE MAHLER
SUR LA FONCTION ORDRE D'UN NOMBRE TRANSCENDANT

PAR

ALAIN DURAND

RÉSUMÉ. — En vue d'une nouvelle classification des nombres complexes, MAHLER [5] définit, sur l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, une relation de préordre notée \succ . A l'aide de ce préordre, il obtient une partition de \mathbb{C} en mettant, dans une même classe, deux éléments θ et η tels que $\theta \succ \eta$ et $\eta \succ \theta$. Plusieurs questions sont alors posées : Existe-t-il une infinité non dénombrable de classes distinctes ? Existe-t-il une classe contenant presque tous les nombres complexes (resp. réels) ? Peut-on caractériser d'une manière non triviale la classe d'un élément $\theta \in \mathbb{C}$? D'autre part, en étendant la relation de préordre \succ à l'ensemble \mathcal{E} des classes d'équivalence, on obtient ainsi une relation d'ordre sur \mathcal{E} ; muni de cette relation d'ordre, l'ensemble \mathcal{E} est-il alors totalement ordonné ? Enfin, existe-t-il un plus petit élément parmi les classes des éléments transcendants ?

Cet article répond à quatre de ces questions.

1. Énoncé des problèmes

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$,

$$P(x) = p_N x^N + \dots + p_0 \quad \text{avec } p_N \neq 0,$$

on note

$$\partial(P) = N, \quad H(P) = \sup_{0 \leq k \leq N} |p_k| \quad \text{et} \quad L(P) = \sum_{k=0}^N |p_k|.$$

On appelle $\partial(P)$, $H(P)$ et $L(P)$ respectivement le *degré*, la *hauteur* et la *longueur* de P . On pose en outre

$$\Lambda(P) = 2^{\partial(P)} L(P).$$

Si α est un nombre algébrique et si P est son polynôme minimal, on note $\partial(\alpha)$, $H(\alpha)$, $L(\alpha)$ et $\Lambda(\alpha)$ les quantités $\partial(P)$, $H(P)$, $L(P)$ et $\Lambda(P)$.

En vue d'une nouvelle classification des nombres complexes, MAHLER [5] associe tout d'abord à chaque élément θ de \mathbf{C} une fonction positive non décroissante $O(u|\theta)$ de la variable entière $u \geq 1$, appelée *fonction ordre* de θ , et définie par

$$O(u|\theta) = \sup \log \left\{ \frac{1}{|P(\theta)|} \right\},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des polynômes $P(x) \neq 0$ à coefficients entiers rationnels et tels que

$$\Lambda(P) \leq u, \quad P(\theta) \neq 0.$$

Il définit ensuite une relation de préordre entre ces fonctions de la manière suivante.

Si $a(u) \geq 0$ et $b(u) \geq 0$ sont deux fonctions non décroissantes de $u \geq 1$ pour lesquelles il existe trois entiers positifs c , u_0 et γ tels que

$$a(u^c) \geq \gamma b(u) \quad \text{pour } u \geq u_0,$$

alors on écrit :

$$a(u) \gg b(u) \quad \text{ou} \quad b(u) \ll a(u).$$

Si les relations $a(u) \gg b(u)$ et $b(u) \gg a(u)$ sont toutes deux vérifiées, on écrit :

$$a(u) > < b(u).$$

Il est clair que le signe \gg définit une relation de préordre et le signe $> <$ définit une relation d'équivalence.

Si $\theta, \eta \in \mathbf{C}$, on écrit enfin :

$$\begin{aligned} \theta \gg \eta & \quad \text{si } O(u|\theta) \gg O(u|\eta), \\ \theta > < \eta & \quad \text{si } O(u|\theta) > < O(u|\eta). \end{aligned}$$

MAHLER obtient alors les résultats suivants :

$O(u|\theta) > < \log u$ si θ est algébrique, mais non entier d'un corps quadratique imaginaire;

$O(u|\theta) \gg (\log u)^2$ si θ est transcendant;

$O(u|\theta) > < O(u|\eta)$ si θ, η sont transcendants et algébriquement dépendants sur \mathbf{Q} .

En notant \mathcal{T} l'ensemble des nombres complexes transcendants, il pose ensuite les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. — *Existe-t-il une infinité non dénombrable de classes distinctes ⁽¹⁾?*

PROBLÈME 2. — *Soit $a(u)$ une fonction positive non décroissante de l'entier $u \geq 1$. Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre $\theta \in \mathcal{T}$ tel que*

$$a(u) > < O(u | \theta).$$

PROBLÈME 3. — *Existe-t-il des éléments θ, η dans \mathcal{T} tels qu'aucune des deux relations $\theta \gg \eta$ et $\eta \gg \theta$ ne soit vérifiée?*

PROBLÈME 4. — *Existe-t-il un nombre $\theta \in \mathcal{T}$ tel que $\eta \gg \theta$ pour tout $\eta \in \mathcal{T}$?*

PROBLÈME 5. — *Peut-on écrire :*

(i) $O(u | \theta) > < (\log u)^2$ pour presque tous les nombres réels $\theta \in \mathcal{T}$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R})?

(ii) $O(u | \theta) > < (\log u)^2$ pour presque tous les nombres complexes $\theta \in \mathcal{T}$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2)?

Notre but ici est de résoudre les problèmes 1, 3, 4 et 5 de MAHLER.

2. Résultats préliminaires

A l'instar de KOKSMA dans la première classification des nombres complexes proposée par Mahler, on peut considérer, à la place de la fonction $O(u | \theta)$, la fonction $O^*(u | \theta)$, définie par

$$O^*(u | \theta) = \sup \log \left\{ \frac{1}{|\theta - \alpha|} \right\},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des nombres algébriques α tels que $\Lambda(\alpha) \leq u$ et $\alpha \neq \theta$.

(¹) Mahler annonce dans son article que ce problème a été résolu dans le même temps par Swierczkowski dans une note non publiée.

On définit alors

$$T(\theta) = \left\{ \tau \geq 0; \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{O^*(u | \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty \right\}$$

et

$$\tau(\theta) = \sup \{ \tau; \tau \in T(\theta) \}.$$

Pour comparer $O(u | \theta)$ et $O^*(u | \theta)$, on utilise le lemme suivant, dû à FEL'DMAN [3] :

LEMME 1. — Soit

$$P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbf{Z}[x],$$

un polynôme de degré m , dont les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont deux à deux distinctes. Alors, pour tout $\theta \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} & |a_m| \exp(-m(2m + \log H(P))) \min_{1 \leq i \leq m} |\theta - \alpha_i| \\ & \leq |P(\theta)| \leq (m+1) 4^m H(P) (1 + |\theta|)^m \min_{1 \leq i \leq m} |\theta - \alpha_i|. \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in \mathcal{T}$, on a donc, d'après la seconde inégalité,

$$O^*(u | \theta) \leq c. O(u | \theta) \quad \text{avec } c = c(\theta) > 0.$$

D'autre part, on déduit du lemme 1 le lemme suivant :

LEMME 2. — Soient $\theta \in \mathbf{C}$, et $\tau \geq 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{O^*(u | \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty, \quad \text{i. e. } \tau \in T(\theta),$$

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{O(u | \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty.$$

Enfin, nous aurons besoin du lemme suivant, dû à R. GÜTING [4].

LEMME 3. — Soient α et β deux nombres algébriques.

(a) Si α et β sont non conjugués, alors

$$|\alpha - \beta| \geq [2^{\max\{\partial(\alpha), \partial(\beta)\} - 1} L(\alpha)^{\partial(\beta)} L(\beta)^{\partial(\alpha)}]^{-1}.$$

(b) Si α et β sont conjugués et distincts,

$$|\alpha - \beta| \geq [[4 \partial(\alpha)]^{(\partial(\alpha) - 2)/2} L(\alpha)^{(2\partial(\alpha) - 1)/2}]^{-1}.$$

On en déduit donc, dans les deux cas,

$$|\alpha - \beta| \geq \exp(-2 \log \Lambda(\alpha) \log \Lambda(\beta)) \quad \text{si } \alpha \neq \beta.$$

Remarques :

1° Il est facile de voir [en utilisant par exemple le corps $\mathbf{Q}(i), i^2 = -1$] que l'on a

$$O^*(u | \theta) \gg \log u \quad \text{pour tout } \theta \text{ algébrique.}$$

En utilisant le lemme 3, on en déduit donc

$$O^*(u | \theta) > < \log u \quad \text{pour tout } \theta \text{ algébrique.}$$

2° On peut montrer que la condition $1 \in T(\theta)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que θ soit transcendant. La condition suffisante est déduite du lemme 3 et, appliquée en particulier aux séries lacunaires, permet de retrouver des résultats dus à COHN, BARON et BRAUNE, CIJSOUW et TIJDEMAN [1], etc. (cf. DURAND [2]).

3° Les deux problèmes suivants ne sont pas encore résolus.

- Peut-on écrire $O^*(u | \theta) \gg (\log u)^2$ pour tout $\theta \in \mathcal{T}$?
- A-t-on $O^*(u | \theta) > < O(u | \theta)$ pour tout $\theta \in \mathcal{T}$?

3. Solution du problème 1

Pour résoudre le problème 1, on construit une famille $(\theta_\tau)_{\tau \in T}$ de nombres transcendants telle que $\tau(\theta_\mu) > 2$ pour tout $\mu \in T$, $\tau(\theta_\mu) \neq \tau(\theta_\nu)$ si $\mu \neq \nu$ et telle que T soit non dénombrable. En effet, on déduit du lemme 2 que, si θ, ψ sont tels que $2 \in T(\theta)$ et $\tau(\theta) \neq \tau(\psi)$, alors les deux éléments θ et ψ appartiennent à des classes d'équivalence distinctes.

THÉORÈME 1. - Pour tout $\tau \in (3, +\infty[$, l'élément

$$\theta_\tau = \sum_{n \geq 1} 2^{-[2^{\tau n}]},$$

où $[x]$ est la partie entière de $x \in \mathbf{R}$, vérifie $\tau(\theta_\tau) = \tau$.

Preuve. - Soit $\tau \in (3, +\infty[$. Posons

$$\sigma_n = \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{-b_k}, \quad \text{avec } b_k = [2^{\tau k}] \quad (k \geq 1).$$

Comme $\tau \geq 2$, la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est strictement croissante. Par suite, σ_n est algébrique, de degré 1, et de hauteur 2^{b_n} . D'où

$$2^{1+b_n} \leq \Lambda(\sigma_n) \leq 2^{2+b_n}$$

et par conséquent

$$(1.1) \quad \frac{b_n}{2} < \log \Lambda(\sigma_n) < 2 b_n \quad (n \geq 1).$$

De la définition de b_k , on déduit

$$(1.2) \quad \frac{b_n^\tau}{2} < b_{n+1} < 2^\tau b_n^\tau \quad (n \geq 1).$$

(a) Il vient

$$\theta_\tau - \sigma_n = \sum_{k \geq n+1} 2^{-b_k} = 2^{-b_{n+1}} \sum_{k \geq n+1} 2^{b_{n+1} - b_k}.$$

Comme la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est strictement croissante, on a

$$b_k - b_{n+1} \geq (k - n - 1) \quad \text{pour } k \geq n + 1,$$

d'où

$$(1.3) \quad 2^{-b_{n+1}} \leq \theta_\tau - \sigma_n \leq 2^{1-b_{n+1}}.$$

Compte tenu des relations (1.1) et (1.2), on a donc

$$(1.4) \quad \exp(-c_2 [\log \Lambda(\sigma_n)]^\tau) \leq \theta_\tau - \sigma_n \leq \exp(-c_1 [\log \Lambda(\sigma_n^\tau)]^\tau) \quad (n \geq 1),$$

avec $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. Par suite,

$$\tau(\theta_\tau) \geq \tau.$$

(b) Soit $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de σ_p pour tout $p \geq 1$. On écrit :

$$\theta_\tau - \beta = \sigma_n - \beta + \theta_\tau - \sigma_n.$$

Il vient alors, d'après le lemme 3 et la relation (1.1) :

$$|\sigma_n - \beta| \geq \exp(-2 \log \Lambda(\beta) \log \Lambda(\sigma_n)) \geq \exp(-4 b_n \log \Lambda(\beta)) \quad (n \geq 1).$$

D'autre part, d'après la relation (1.3),

$$|\theta_\tau - \sigma_n| \leq 2^{1-b_{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

Par conséquent, si

$$b_{n+1} \geq 9 b_n \cdot \log \Lambda(\beta),$$

alors on a

$$\frac{1}{2} \exp(-4 b_n \log \Lambda(\beta)) \geq 2^{1-b_{n+1}},$$

d'où

$$|\theta_\tau - \beta| \geq \frac{1}{2} \exp(-4 b_n \log \Lambda(\beta)).$$

Ainsi, d'après la relation (1.2), on en déduit que si $p \in \mathbb{N}$ vérifie

$$(1.5) \quad b_p^{\tau-1} \geq 18 \cdot \log \Lambda(\beta),$$

alors

$$(1.6) \quad |\theta_\tau - \beta| \geq \frac{1}{2} \exp(-4 b_p \log \Lambda(\beta)),$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ le plus petit entier vérifiant (1.5). On a donc soit $p = 1$, soit

$$b_{p-1}^{\tau-1} < 18 \cdot \log \Lambda(\beta) \leq b_p^{\tau-1}.$$

Dans le premier cas, on a

$$b_p = b_1,$$

et dans le second cas, compte tenu de (1.2),

$$b_p \leq 2^\tau \cdot 18^{\tau/(\tau-1)} [\log \Lambda(\beta)]^{\tau/(\tau-1)}.$$

Dans les deux cas, on obtient donc, d'après (1.6) :

$$(1.7) \quad |\theta_\tau - \beta| \geq \exp(-c_3 [\log \Lambda(\beta)]^{1+(\tau/(\tau-1))}) \quad \text{avec } c_3 > 0.$$

Comme $\tau \geq 3$, on a

$$1 + \frac{\tau}{\tau-1} \leq \tau;$$

des relations (1.4) et (1.7), on tire ainsi

$$(1.8) \quad |\theta_\tau - \beta| \geq \exp(-c_4 [\log \Lambda(\beta)]^\tau) \quad (c_4 > 0) \text{ pour tout } \beta \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Par suite,

$$\tau(\theta_\tau) \leq \tau.$$

De (a) et (b), on déduit donc

$$\tau(\theta_\tau) = \tau.$$

Remarque. — On obtient évidemment les mêmes résultats si l'on remplace l'exposant $b_k = \lfloor 2^{\tau k} \rfloor$ par $\lfloor q^{\tau k} \rfloor$ avec $q \in \mathbf{R}$ et $q \geq 2$. On peut ainsi formuler les résultats obtenus sous la forme suivante.

THÉORÈME 2. — Soient $q \in \mathbf{R}$, $q \geq 2$ et $\tau \in (3, +\infty[$. Posons

$$\theta = \theta_\tau^{(q)} = \sum_{n \geq 1} 2^{-\lfloor q^{\tau n} \rfloor},$$

et soient

$$b_k = b_k(\tau, q) = \lfloor q^{\tau k} \rfloor \quad \text{et} \quad \sigma_n = \sigma_n(\tau, q) = \sum_{k=1}^n 2^{-b_k},$$

alors

(a) $\tau(\theta) = \tau$;

(b) $2^{-b_{n+1}} \leq \theta - \sigma_n \leq 2^{1-b_{n+1}}$ et $b_n/2 < \log \Lambda(\sigma_n) < 2b_n$;

(c) Il existe $c = c(\tau, q) > 0$ telle que, pour tout $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de σ_p pour tout $p \geq 1$, on ait

$$|\theta - \beta| \geq \exp(-c[\log \Lambda(\beta)]^{1+(\tau/(\tau-1))}).$$

COROLLAIRE (Problème 1 de MAHLER). — L'ensemble \mathcal{E} des classes d'équivalence de \mathbf{C} par la relation $> <$ contient un sous-ensemble équipotent à $(3, +\infty[$. En particulier, \mathcal{E} est infini non dénombrable.

4. Solution du problème 3

La réponse au problème 3 est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Soit $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 3$, et soient

$$\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-b_n}, \quad \text{avec} \quad b_n = 2^{p^n}$$

et

$$\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-d_n} \quad \text{avec} \quad d_n = 4^{p^{2n}}.$$

Alors les éléments σ et ψ ne vérifient ni $O^*(u | \sigma) \ll O^*(u | \psi)$, ni $O^*(u | \psi) \ll O^*(u | \sigma)$. De même, ils ne vérifient ni $O(u | \sigma) \ll O(u | \psi)$ ni $O(u | \psi) \ll O(u | \sigma)$.

Preuve. — Avec les notations du théorème 2, on a $\sigma = \theta_p^{(2)}$ et $\psi = \theta_{p^2}^{(4)}$ et par suite $\tau(\sigma) = p$ et $\tau(\psi) = p^2$. Compte tenu du lemme 2, on en déduit que les relations

$$O^*(u | \psi) \ll O^*(u | \sigma)$$

et

$$O(u | \psi) \ll O(u | \sigma)$$

sont toutes deux impossibles.

Posons

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n 2^{-b_k} \quad \text{et} \quad \psi_n = \sum_{k=1}^n 2^{-d_k} \quad (n \geq 1).$$

Soit

$$u_n = \Lambda(\sigma_{2n}) \quad (n \geq 1).$$

Il vient alors d'après la relation (b) du théorème 2 :

$$(3.1) \quad O^*(u_n | \sigma) \geq (b_{2n+1} - 1) \log 2 \geq c_1 b_{2n+1} \quad (n \geq 1; c_1 > 0),$$

comme

$$O(u | \sigma) \geq c_2 O^*(u | \sigma) \quad (c_2 = c_2(\sigma) > 0),$$

on a donc

$$(3.2) \quad O(u_n | \sigma) \geq c_3 b_{2n+1} \quad (n \geq 1; c_3 > 0).$$

D'autre part, d'après la relation (c) du théorème 2, il existe $c = c(p) > 0$ telle que, pour tout $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de ψ_q pour tout $q \geq 1$, on ait

$$(3.3) \quad |\psi - \beta| \geq \exp(-c [\log \Lambda(\beta)]^{1+(p^2/(p^2-1))}).$$

Soit $r \in \mathbf{N}^*$ quelconque, et soit $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ tel que $\Lambda(\beta) \leq u'_n$; si β est l'un des ψ_q ($q \geq 1$), comme

$$\log u_n = \log \Lambda(\sigma_{2n}) < 2 b_{2n} \quad \text{et} \quad \log \Lambda(\psi_q) > \frac{d_q}{2},$$

on a donc

$$\frac{d_q}{2} < 2 r b_{2n},$$

c'est-à-dire :

$$p^{2q} < 1 + \frac{\log r}{\log 4} + \frac{p^{2n}}{2} < p^{2n} \quad (n \geq n_0(r)),$$

donc

$$q \leq n - 1.$$

Comme

$$|\psi - \psi_q| \geq \frac{1}{2^{d_{q+1}}},$$

et

$$d_{q+1} = 4^{p^{2q+2}} \leq 4^{p^{2n}} = (b_{2n+1})^{2/p},$$

on a donc

$$(3.4) \quad |\psi - \psi_q| \geq \exp(-(b_{2n+1})^{2/p}).$$

Si maintenant β est distinct de ψ_q pour tout $q \geq 1$, on a, d'après (3.3),

$$(3.5) \quad \begin{aligned} |\psi - \beta| &\geq \exp(-c [\log \Lambda(\beta)]^{1+(p^2/(p^2-1))}) \\ &\geq \exp(-c [r \log u_n]^{1+(p^2/(p^2-1))}) \\ &\geq \exp(-c [2rb_{2n}]^{1+(p^2/(p^2-1))}). \end{aligned}$$

Des relations (3.4) et (3.5), on tire donc, pour $n \geq n_0(r)$,

$$(3.6) \quad O^*(u_n^r | \psi) \leq c_4 (b_{2n+1})^{(1+(p^2/(p^2-1)))(1/p)} \quad (c_4 = c_4(r) > 0).$$

Or, d'après la relation (3.1), on a

$$O^*(u_n | \sigma) \geq c_1 b_{2n+1} \quad (n \geq 1; c_1 > 0);$$

on en déduit donc que, quels que soient les nombres positifs r , u_0 et γ , la relation

$$O^*(u | \sigma) \leq \gamma O^*(u^r | \psi) \quad \text{pour } u \geq u_0$$

est impossible, puisque $(1 + (p^2/(p^2-1)))(1/p) < 1$ ($p \geq 3$). Autrement dit, la relation :

$$O^*(u | \sigma) \leq O^*(u | \psi)$$

est impossible.

De même, en utilisant le lemme 1 et les relations (3.3) et (3.4) d'une part, et la relation (3.2) d'autre part, il est facile de montrer que la relation

$$O(u | \sigma) \leq O(u | \psi),$$

est, elle aussi, impossible.

5. Solutions des problèmes 4 et 5

Notons E (resp. F) l'ensemble des nombres réels $\bar{\theta}$ (resp. complexes) tels que $2 \in T(\theta)$. D'après le lemme 2, on a

$$F = \left\{ \theta \in \mathbf{C}; \overline{\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{O(u | \theta)}{(\log u)^2} = +\infty} \right\} \quad \text{et} \quad E = F \cap \mathbf{R}.$$

Comme pour tout nombre complexe θ (resp. réel) transcendant, on a

$$O(u \mid \theta) \gg (\log u)^2,$$

la relation

$$O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$$

est équivalente à

$$\theta \notin F \quad (\text{resp. } \theta \notin E).$$

Comme en outre l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, démontrer les assertions (i) et (ii) du problème 5 revient donc à prouver que E (resp. F) est Lebesgue-mesurable de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} (resp. \mathbf{R}^2).

THÉORÈME 4 :

(a) Les nombres réels θ , tels que $2 \in T(\theta)$, forment un ensemble $E \subseteq \mathbf{R}$ Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

(b) Les nombres complexes θ , tels que $2 \in T(\theta)$, forment un ensemble $F \subseteq \mathbf{C}$ Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

Preuve. — Soit $\theta \in \mathbf{C}$ tel que $2 \in T(\theta)$. Il existe alors une suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$ de nombres algébriques deux à deux distincts tels que

$$|\theta - \beta_n| \leq \exp(-n [\log \Lambda(\beta_n)]^2) \quad (n \geq 1).$$

La démonstration est alors analogue à celle du théorème 23 de SCHNEIDER [6].

(a) Cas réel. — Soit

$$E_n = \bigcup_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}} [\beta - \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2), \beta + \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2)] \quad (n \geq 1).$$

Par suite

$$(4.1) \quad E \subseteq \bigcap_{n \geq 1} E_n.$$

Soit m_1 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} . On a

$$(4.2) \quad m(E_n) \leq \sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}} 2 \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2) \\ = \sum_{u=1}^{+\infty} (\sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}, 2^u \leq \Lambda(\beta) < 2^{u+1}} 2 \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2)).$$

Le nombre de polynômes à coefficients entiers rationnels, de degré $d \geq 1$ et de longueur $\leq L$, est au plus de $(2L)(2L+1)^d$. Donc le nombre des

polynômes P non constants, vérifiant $\Lambda(p) < 2^{u+1}$, est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{d=u} (2 \cdot 2^{u+1-d}) (2 \cdot 2^{u+1-d} + 1)^d &\leq 2 \cdot 2^{u+1} \sum_{d=1}^{d=u} \left(\frac{3 \cdot 2^{u+1-d}}{2} \right)^d \\ &\leq 2^{u+2} \cdot 3^u \cdot u \cdot 2^{u^2/4}. \end{aligned}$$

Pour n assez grand, $n \geq n_0$, on a donc, pour tout $u \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}, 2^u \leq \Lambda(\beta) < 2^{u+1}} 2 \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2) \\ \leq 2 \exp(-n (\log 2)^2 u^2) \cdot 2^{u+2} \cdot 3^u \cdot u \cdot 2^{u^2/4} \leq \exp\left(-\frac{n}{3} u^2\right). \end{aligned}$$

D'où, d'après (4.2), pour $n \geq n_0$:

$$m_1(E_n) \leq \sum_{u=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n}{3} u^2\right) < 2 \exp\left(-\frac{n}{3}\right).$$

Comme la suite $(E_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, on a donc

$$(4.3) \quad m_1\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_1(E_n) = 0.$$

Des relations (4.1) et (4.3), on déduit ainsi que E est Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

(b) *Cas complexe.* — On considère à présent :

$$\begin{aligned} F_n = \bigcup_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}}} [\operatorname{Re}(\beta) - \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2), \operatorname{Re}(\beta) + \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2)] \\ \times [\mathcal{I}m(\beta) - \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2), \mathcal{I}m(\beta) + \exp(-n [\log \Lambda(\beta)]^2)]. \end{aligned}$$

Soit m_2 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 . Il vient alors

$$(4.4) \quad F \subseteq \bigcap_{n \geq 1} F_n$$

et

$$m_2(F_n) \leq \sum_{u=1}^{+\infty} (\sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}}, 2^u \leq \Lambda(\beta) < 2^{u+1}} 4 \exp(-2n [\log \Lambda(\beta)]^2)).$$

Comme précédemment, on a pour $n \geq n_0$:

$$m_2(F_n) \leq \sum_{u=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n}{3} u^2\right) < 2 \exp\left(-\frac{n}{3}\right),$$

d'où

$$(4.5) \quad m_2\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = 0.$$

Des relations (4.4) et (4.5), on déduit que F est Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

COROLLAIRE 1 (Problème 5 de MAHLER) :

(i) $O(u|\theta) > < (\log u)^2$ pour presque tous les nombres réels θ (au sens de la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}).

(ii) $O(u|\theta) > < (\log u)^2$ pour presque tous les nombres complexes θ (au sens de la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2).

COROLLAIRE 2 (Problème 4 de MAHLER). — Presque tout $\theta \in \mathcal{T}$ vérifie la relation

$$\eta \gg \theta \quad \text{pour tout } \eta \in \mathcal{T}.$$

En effet, pour presque tout $\theta \in \mathcal{T}$, on a, d'après le corollaire 1,

$$O(u|\theta) > < (\log u)^2.$$

Soit $\theta \in \mathcal{T}$ un tel élément. Comme pour tout $\eta \in \mathcal{T}$, on a

$$O(u|\eta) \gg (\log u)^2,$$

on en déduit évidemment

$$\eta \gg \theta \quad \text{pour tout } \eta \in \mathcal{T}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIJSOUW (P. L.) et TIJDEMAN (R.). — On the transcendence of certain power series of algebraic numbers, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 23, 1973, p. 301-305.
- [2] DURAND (A.). — Un critère de transcendence. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* : Groupe d'étude de théorie des nombres, 15^e année, 1973/74, n^o G 11, 9 p.
- [3] FEL'DMAN (N. I.). — Approximation of certain transcendental numbers, I : The approximation of logarithms of algebraic numbers, *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 59, 1966, p. 224-245; [en russe] *Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat.*, t. 15, 1951, p. 53-74.
- [4] GÜTING (R.). — Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers, *Mich. math. J.*, t. 8, 1961, p. 149-159.
- [5] MAHLER (K.). — On the order function of a transcendental number, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 18, 1971, p. 63-76.
- [6] SCHNEIDER (T.). — *Einführung in die transzendenten Zahlen*. — Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

(Texte reçu en mai 1974.)

Alain DURAND,
18, rue des Ragueuets,
95210 Saint-Gratien.