

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDENOUR REZZOUK

**Quelques propriétés du noyau d'un opérateur  
différentiel linéaire non hypoelliptique, à  
coefficients constants**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 102 (1974), p. 435-447

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1974\\_\\_102\\_\\_435\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__435_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU NOYAU  
D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE  
NON HYPOELLIPTIQUE,  
À COEFFICIENTS CONSTANTS

PAR

ABDENOUR REZZOUK

---

RÉSUMÉ. — En utilisant un raffinement de la caractérisation géométrique des polynômes hypoelliptiques de L. HÖRMANDER, nous démontrons ici que l'espace  $\mathcal{E}_p(\Omega)$  des fonctions indéfiniment dérivables sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , annulées par un opérateur différentiel linéaire non hypoelliptique à coefficients constants, contient un sous-espace isomorphe à l'espace  $s$  des suites à décroissance rapide.

**Introduction**

L. HÖRMANDER prouve, dans [1] (chap. IV), que l'espace vectoriel des fonctions annulées par un opérateur différentiel linéaire, à coefficients constants  $P(D)$  sur  $\mathbf{R}^n$ , est contenu dans une *classe de Gevrey* si  $P(D)$  est *hypoelliptique*, sa *dimension fonctionnelle* au sens de Komura [2] est donc finie.

Nous montrons ici qu'au contraire la dimension fonctionnelle de l'espace  $\mathcal{E}_p$  des fonctions  $C^\infty$ , annulées par  $P$ , est infinie si  $P$  n'est pas hypoelliptique. Plus précisément, si  $P$  n'est pas hypoelliptique,  $\mathcal{E}_p$  contient un sous-espace fermé (facteur direct dans  $\mathcal{E}_p$ ) isomorphe à l'espace  $s$  des suites à décroissance rapide (th. 2).

Pour prouver ce résultat, nous démontrons un raffinement de la caractérisation géométrique des polynômes hypoelliptiques de L. HÖRMANDER ([1], chap. IV) : Si  $P(D)$  n'est pas hypoelliptique, il existe une suite  $\zeta_k$  de vecteurs de  $\mathbf{C}^n$  telle que  $P(\zeta_k) = 0$ ;  $\|\zeta_k\| = 0$  ( $\zeta_k^N$ ) pour  $N$  assez grand (autrement dit,  $\zeta_k$  est à croissance lente); la partie imaginaire de  $\zeta_k$  reste bornée; et la partie réelle de la première composante de  $\zeta_k$  est égale à  $k$  (th. 1).

### Rappel des définitions

(a) La classe de Gevrey  $g^s(\mathbf{R}^n)$  est l'espace vectoriel des fonctions  $f$  indéfiniment dérivables sur  $\mathbf{R}^n$ , telles que, pour tout compact  $K$ , il existe deux constantes positives  $C$  et  $L$  telles qu'on ait

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right| \leq C L^{|\alpha|} (\alpha!)^s,$$

pour tout multi-indice de dérivation  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

[On a posé comme d'habitude

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.]$$

(b) On dit qu'un opérateur différentiel, à coefficients constants  $P(D)$ , est *hypoelliptique* si, pour toute distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ ,  $(P(D)u \in C^\infty(\mathbf{R}^n))$  implique  $(u \in C^\infty(\mathbf{R}^n))$ . Dans [1], HÖRMANDER prouve que  $P$  est hypoelliptique si, et seulement si,  $\text{Im } \zeta$  tend vers l'infini quand  $\zeta$  tend vers l'infini dans la variété algébrique  $P(\zeta) = 0$  de  $\mathbf{C}^n$ .

(c) Soient  $E$  un espace localement convexe,  $p$  une semi-norme continue sur  $E$ , et  $B$  une partie bornée de  $E$ . On pose

$$d_n(B, p) = \inf_{E_n \in G_n(E)} \sup_{y \in B} d_p(y, E_n),$$

où  $G_n(E)$  désigne l'ensemble des sous-espaces de dimension  $n$  de  $E$ , et  $d_p(y, E_n) = \inf p(y-z)$  est la distance de  $y$  à  $E_n$  (pour la distance définie par  $p$ ).

La *dimension fonctionnelle* de  $E$  est la borne inférieure de l'ensemble des nombres  $d$  tels que, pour toute partie bornée  $B$  de  $E$ , pour toute semi-norme continue  $p$  sur  $E$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$d_n(B, p) \leq C \exp(-n^{1/(d+\varepsilon)}).$$

C'est un invariant topologique :  $df E = df F$  si  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

La dimension fonctionnelle de  $\mathcal{G}^s(\mathbf{R}^n)$  est finie, égale à  $sn$ ; en particulier, la dimension fonctionnelle de l'espace des fonctions analytiques sur  $\mathbf{R}^n$  est  $n$ . Au contraire, la dimension fonctionnelle de  $s$  est infinie, ainsi que celle

de tout espace localement convexe qui contient un sous-espace fermé isomorphe à  $s$ .

Y. KOMURA donne une autre définition de la dimension fonctionnelle, utilisant l' $\varepsilon$ -entropie (cf. [2]), elle est égale à celle donnée ici + 1.

Cet article correspond à une partie de la thèse de 3<sup>e</sup> cycle de l'auteur, soutenue en 1972, à l'Université de Paris-VII.

### Notations

On utilisera les notations habituelles des équations aux dérivées partielles.

$\Omega$  désignera un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  ( $n > 1$ ),  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  sera la variable dans  $\Omega$ .

$P$ , étant un polynôme à coefficients complexes, s'écrira :

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \zeta^\alpha, \quad \text{où } \zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^n) \in \mathbf{C}^n, \quad a_\alpha \in \mathbf{C}, \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

On écrira aussi :

$$\zeta = (\mu^1, \mu', \nu),$$

où

$\mu^1$  est la partie réelle de la première composante de  $\zeta$  dans  $\mathbf{C}^n$  ( $\text{Re } \zeta^1$ ),

$\mu' = (\text{Re } \zeta^2, \text{Re } \zeta^3, \dots, \text{Re } \zeta^n)$ ,

$\nu = \text{Im } \zeta = (\text{Im } \zeta^1, \text{Im } \zeta^2, \dots, \text{Im } \zeta^n)$ .

On désignera par  $S$  l'ensemble des zéros du polynôme  $P$  dans  $\mathbf{C}^n$ . Au polynôme  $P$ , on associera l'opérateur  $P(D)$  :

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

où

$D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ ,

$D_j = (1/i) (\partial/\partial x_j)$ ,

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ \dots \circ D_n^{\alpha_n}$ .

On désignera par :

$\mathcal{E}$ , l'espace des fonctions indéfiniment dérivables;

$\mathcal{D}$ , l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact;

$\mathcal{D}'$ , les séries d'espaces de distributions;

$\mathcal{E}_p$ , l'espace des fonctions de  $\mathcal{E}$  annulées par  $P$ ;

$s$ , l'espace des suites à décroissance rapide;  
 $\mathcal{E}'$ , l'espace des distributions à support compact.

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $P$  un polynôme non hypoelliptique, alors il existe une suite  $(\zeta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ,  $\zeta_k \in S$ , qui vérifie les trois conditions suivantes :*

(i) *il existe  $c_0 > 0$  tel que  $|\operatorname{Im} \zeta_k| < c_0$  pour tout  $k$ , et  $\zeta_k$  tend vers l'infini lorsque  $k$  tend vers l'infini;*

(ii)  *$\operatorname{Re} \zeta_k^1 = k$  pour tout  $k$  entier supérieur à 1;*

(iii) *il existe  $s \geq 1$  et  $C_1 > 0$  tels que  $|\zeta_k| \leq C_1 \cdot k^s$  pour tout  $k$  entier.*

Pour l'hypoellipticité d'un opérateur  $P$ , on prendra la définition algébrique de HÖRMANDER [1], c'est-à-dire  $P$  est hypoelliptique si, et seulement si,  $|\operatorname{Im} \zeta|$  tend vers l'infini lorsque  $\zeta$  tend vers l'infini en restant dans  $S$ . Donc, si  $P$  n'est pas hypoelliptique, il existe une suite  $(\zeta_k)_{k \in \mathbf{N}}$  avec  $\zeta_k \in S$  et  $C_0 > 0$  telle que  $\zeta_k$  tend vers l'infini avec  $k$  et  $|\operatorname{Im} \zeta_k| < C_0$ . On supposera, sans restreindre la généralité, que c'est la première composante de  $\zeta_k$  qui tend vers l'infini. Posons

$$M = \{(t, \mu', \nu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^n; P((t, \mu') + i\nu) = 0, |\nu| \leq C_0\},$$

$$N_t = \{(\mu', \nu) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^n; (t, \mu', \nu) \in M\},$$

$$J_{(\mu', \nu)} = \{t \in \mathbf{R}; (t, \mu', \nu) \in M\},$$

$$\delta(t) = \inf\{|\nu|; (\mu', \nu) \in N_t\},$$

$$F = \{(t, \delta); P((t, \mu') + i\nu) = 0, |\nu| \leq C_0, |(t, \mu') + i\nu| = \delta\}.$$

**LEMME 1.** — *Soit  $P$  un polynôme non hypoelliptique, avec les notations ci-dessus, il existe  $a > 0$  tel que l'intervalle  $(a, +\infty[$  soit contenu dans  $J_{(\mu', \nu)}$ .*

*Preuve du lemme 1.* — Un ensemble semi-algébrique de  $\mathbf{R}^n$  est une réunion finie d'ensembles  $A$  de  $\mathbf{R}^n$ , défini par un nombre fini d'équations et d'inéquations algébriques,

$$A = \{x; x \in \mathbf{R}^n; P_1(x) = 0, \dots, P_q(x) = 0; Q_1(x) < 0, \dots, Q_m(x) < 0\}.$$

$J_{(\mu', \nu)}$ , étant la projection sur  $\mathbf{R}$  d'un ensemble semi-algébrique  $M$ , est un ensemble semi-algébrique de  $\mathbf{R}$  (théorème de SEIDENBERG-TARSKI [6]). C'est donc, soit un ensemble fini, ce qui est exclu car  $\operatorname{Re} \delta_k^1 \in J_{(\mu', \nu)}$  et  $\operatorname{Re} \zeta_k^1$  tend vers l'infini, soit une réunion finie d'intervalles non vides de  $\mathbf{R}$ , auquel cas l'un des intervalles est de la forme  $(a, +\infty[$ .

**LEMME 2.** — *Soit  $P$  un polynôme non hypoelliptique, avec les notations ci-dessus, il existe  $C > 0$  et  $s \geq 1$  tels que, pour tout  $t$  dans l'intervalle  $(a, +\infty[$ , alors  $\delta(t) \leq C \cdot t^s$ .*

*Preuve du lemme 2.* —  $F$  est un ensemble semi-algébrique.  $F$  n'est pas vide, car  $(t, \delta(t)) \in F$ , pour tout  $t \in (a, +\infty[$  et, d'après la définition de la borne inférieure,  $(t, \delta(t)) \in \partial F$  (bord de  $F$ ), donc  $F$  n'est pas ouvert, et il existe un polynôme  $Q$ , non identiquement nul, tel que

$$((t, \delta) \in \partial F) \Rightarrow (Q(t, \delta) = 0),$$

d'où  $Q(t, \delta(t)) = 0$  et, par le théorème de Puiseux, on a

$$\delta(t) \leq C \cdot t^s.$$

On en déduit qu'on a  $s \geq 1$ , puisque  $\delta(t) = |(t, \mu') + i v| \geq t$ .

*Preuve du théorème 1.* — Il suffit de poser  $t = k$ , on a alors

$$\zeta_k = (k, \mu'_k) + i v_k \quad \text{avec} \quad |v_k| < C_0.$$

Considérons maintenant l'application  $A_p$  qui, à la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ , associe la fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \exp(ix \cdot \zeta_k)$ , où  $\zeta_k$  est la suite définie plus haut, et  $x \cdot \zeta_k = x^1 \zeta_k^1 + \dots + x^n \zeta_k^n$ .

1°  $A_p$  est linéaire continue de  $s$  dans  $\mathcal{E}_p(\mathbf{R}^n)$ ; en effet  $K$  étant un compact de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\sup \{ |D^\alpha A_p((\lambda_k)_k)(x)|; x \in K \} \leq C_K \sup_k |\lambda_k| k^{s \cdot |\alpha| + s'}.$$

2° La proposition suivante montre dans quelle condition suffisante  $A_p$  est un isomorphisme de  $s$  sur  $A_p(s)$ .

**PROPOSITION 1.** — *Supposons qu'il existe une suite  $(T_k) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  de distributions à support compact d'une variable vérifiant :*

(i)  $T_m(\exp ix^1 \zeta_k^1) = \delta_m^k$ , où  $\delta_m^k$  est le symbole de Kronecker, et  $\zeta_k^1$  est la première composante de  $\zeta_k$  du théorème 1 ;

(ii) *Il existe un compact  $K$  tel que les distributions  $T_m$  sont toutes à support dans  $K$ ;*

(iii) *Pour tout  $s \geq 0$ , il existe  $C_s > 0$ ,  $m_s \in \mathbf{N}$  tel que*

$$\sup_k |\langle T_k, f \rangle k^s| \leq C_s \sup \{ |D^n f(x)|; x \in K, n \leq m_s \},$$

pour tout

$$f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}),$$

alors l'application  $A_p$  est un isomorphisme de  $s$  sur  $A_p(s) \subset \mathcal{E}_p(\mathbf{R}^n)$ .

*Preuve.* — L'injectivité est immédiate :

$$(A_p((\lambda_k)_k)(x) = 0)$$

implique

$$(A_p((\lambda_k)_k)(x^1, 0, \dots, 0) = 0 \text{ pour tout } x^1 \in \mathbf{R}),$$

donc, pour tout  $m$ ,

$$\langle T_m, \sum_k \lambda_k \exp ix^1 \cdot \zeta_k^1 \rangle = 0 \text{ c'est-a-dire } \lambda_m = 0,$$

et évidemment  $P(D)(\sum_k \lambda_k \exp ix \zeta_k) = 0$ .

Pour montrer que  $A_p$  est un isomorphisme de  $s$  dans  $\text{Im } A_p$ , il suffit, par le théorème du graphe fermé, de montrer que  $\text{Im } A_p$  est fermé dans  $\mathcal{E}_p$ . En fait, les conditions (i), (ii) et (iii) entraînent que  $\text{Im } A_p$  est un facteur direct dans  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{E}_p$ .

En effet, si  $B : f \rightarrow (\langle T_m, f \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$ , alors (ii) et (iii) entraînent que  $\text{Im } B$  est contenu dans  $s$ , et que  $B$  est continu de  $\mathcal{E}$  dans  $s$ . La condition (i) entraîne  $B \cdot A_p = \text{id}_s$ , et donc  $A_p B A_p = A_p$  et  $(A_p B)^2 = A_p B$ , c'est-à-dire que  $A_p B$  est un projecteur et que  $\text{Im } A_p = \text{Im } (A_p B)$  est un facteur direct dans  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{E}_p$ .

**PROPOSITION 2.** — *Supposons qu'il existe une suite  $(F_m)_m$  de fonctions entières de type exponentiel vérifiant :*

(a) *Il existe  $C > 0$  et  $a > 0$  tels que*

$$|F_m(z)| \leq C \exp a |\text{Im } z| \text{ pour tout } m \in \mathbf{N} \text{ et } z \in \mathbf{C};$$

(b)  $F_m(\zeta_k^1) = \delta_m^k$ ,

*alors il existe une suite de distributions  $T_m$  à support compact vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) de la proposition 1.*

*Preuve.* — Notons

$$\hat{\psi}(y) = \int \exp(-ixy) \psi(x) dx,$$

où  $\psi$  est une fonction à décroissance rapide ( $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ) :

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{F}} \psi)(x) &= (2\pi)^{-1} \int \exp ixy \psi(y) dy, \\ \psi(x) &= (\overline{\mathcal{F}}(\hat{\psi}(y)))(x). \end{aligned}$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  telle que  $\text{Supp } \varphi \subset (-a, +a)$  et

$$\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x) dx = 1.$$

D'après le théorème de Paley-Wiener,  $\hat{\phi}$  est entière, de type exponentiel, et vérifie : Pour tout  $N$ , il existe  $C_N$  tel que

$$|\hat{\phi}(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} \exp(a |\operatorname{Im} z|).$$

Considérons la suite  $H_m$  suivante :

$$H_m(z) = F_m(\zeta_m^1 - z) \hat{\phi}(z),$$

alors

$$|H_m(z)| \leq C'_N (1 + z)^{-N} \exp(2a |\operatorname{Im} z|) \quad (\text{car } \operatorname{Im} \zeta_m^1 \text{ est bornée}).$$

Il existe donc  $S_m \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ , telle que  $\operatorname{Supp} S_m \subset (-2a, +2a)$  et  $\hat{S}_m(z) = H_m(z)$ . Il suffit de prendre la suite

$$T_m = \exp(-ix \zeta_m^1) \cdot S_m(x)$$

pour avoir les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 1 :

- (i)  $\langle T_m, \exp ix \zeta_k^1 \rangle = \hat{S}_m(\zeta_m^1 - \zeta_k^1) = H_m(\zeta_m^1 - \zeta_k^1) = F_m(\zeta_k^1) \varphi(\zeta_m^1 - \zeta_k^1) = \delta_m^k;$
- (ii)  $\operatorname{Supp} T_m \subset (-2a, +2a);$
- (iii)  $\langle T_m, f \rangle = (i \zeta_m^1)^{-s} \sum_{p \leq s} \binom{s}{p} \int \exp(-ix \zeta_m^1) S^{(s-p)}(x) f^{(p)}(x) dx$   
 $\leq C m^{-s} \left( \sum_{p \leq s} \binom{s}{p} |\operatorname{Im} \zeta_m^1|^{s-p} |S(i \operatorname{Im} \zeta_m^1)| \right)$   
 $\times \sup_{x \in (-2a, +2a), p \leq s} |f^{(p)}(x)|$   
 $\leq C_s m^{-s} \sup_{x \in (-2a, 2a), p \leq s} |f^{(p)}(x)|.$

RECHERCHE DE LA SUITE  $(F_m(z))$ . — Exemple :  $\zeta_k^1 = k$ , alors

$$F_m(z) = \frac{\sin \pi(z - m)}{\pi(z - m)}.$$

Remarquons que

$$F_m(z) = \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{(z - m)}{k} \right) \left( 1 - \frac{(z - m)}{-k} \right).$$

Dans le cas général, on procède de façon analogue.

PROPOSITION 3. — Soit  $F_m$  la suite de fonctions suivante :

$$F_m(z) = U_m(z) V_m(z),$$



avec

$$U_m(z) = \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{(z - \zeta_m^1)}{\alpha_k} \right) \left( 1 - \frac{z - \zeta_m^1}{\alpha_{-k}} \right),$$

$$V_m(z) = \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{(z - \zeta_m^1)}{\beta_k} \right) \left( 1 - \frac{z - \zeta_m^1}{\beta_{-k}} \right),$$

où les suites  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  vérifient :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= \zeta'_{k+m} - \zeta'_m = k + i(b_{k+m} - b_m) \\ \alpha_{-k} &= (-k) + i(b_{k+m} - b_m) \end{aligned} \right\} \text{ pour } k > 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= k + i(b_{m-k} - b_m) \\ \beta_{-k} &= -k + i(b_{m+k} - b_m) \end{aligned} \right\} \text{ si } 1 \leq k \leq m,$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= k + i(b_{m+k} - b_m) \\ \beta_{-k} &= -k + i(b_{m+k} - b_m) \end{aligned} \right\} \text{ si } k > m.$$

Alors  $(F_m)$  vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition 2.

Considérons :

$\mathcal{A}_C$  l'ensemble des suites  $(u_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  avec  $u_k = k + i d_k$  et  $|d_k| < C$ ;

$\mathcal{A}_C^0$  l'ensemble des suites  $(u_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  de  $\mathcal{A}_C$  avec  $d_k = d_{-k}$ ;

$\mathcal{P}_C = \{f; f(z) = (z - u_0) \prod_{k \geq 1} (1 - (z/u_k)) (1 - (z/u_{-k})) \text{ avec } u_k \in \mathcal{A}_C\}$ ;

$\mathcal{P}_C^0 = \{f; f(z) = (z - u_0) \prod (1 - (z/u_k)) (1 - (z/u_{-k})) \text{ avec } u_k \in \mathcal{A}_C^0\}$ .

LEMME 3.1. — Il existe une constante  $\delta_C > 0$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{P}_C$ ,  $f$  est une fonction entière de type exponentiel vérifiant :

$$|f(z)| \leq |z - a_0| \exp \delta_C |z|.$$

Preuve du lemme 3.1. — Posons

$$h(z) = \frac{f(z)}{z - a_0},$$

$$\log |h(z)| = \sum_1^\infty \log (|1 - za_k^{-1}| |1 - za_{-k}^{-1}|) \\ \times \sum_1^\infty \log (1 + (|z|^2 + 2C|z|)k^{-2}).$$

Or on peut majorer le second membre de l'inégalité par

$$\int_1^\infty 2(2C|z| + |z|^2) [(1 + (2C|z| + |z|^2)t^{-2})t^3]^{-1} m(t) dt \\ = 2\sqrt{2C|z| + |z|^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}(2C|z| + |z|^2)^{-1/2} \right],$$

où  $m(t)$  est le nombre d'entiers inférieur ou égal à  $t$  (pour un calcul analogue, voir [4]).

L'intégrale peut être majorée par  $\delta_c |z|$ , d'où

$$|f(z)| \leq |z - a_0| \exp \delta_c |z|.$$

LEMME 3.2. — Si  $f$  est dans  $\mathcal{P}_c^0$ , alors la fonction  $z \mapsto f(z+p)$  peut s'écrire :

$$f(z+p) = g(z) \pi_p \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{Z},$$

où  $g(z)$  appartient à  $\mathcal{P}_c$ , et  $\pi_p$  est borné par rapport à  $p$ .

Preuve :

$$f(z+p) = (z+p-u_0) \prod \left(1 - \frac{z+p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{z+p}{u_{-k}}\right)$$

avec

$$u_k = k + i d_k \in \mathcal{A}_c^0,$$

le produit étant absolument convergent, en changeant d'indice, on obtient :

$$f(z+p) = \frac{-p+i d_0}{p+i d_p} \prod_{k \neq 0, k \neq p} \left[ \left(1 - \frac{p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{p}{u_{-k}}\right) \right] \\ \times \left[ (z-u'_0) \prod_{k > 0} \left(1 - \frac{z}{u'_k}\right) \left(1 - \frac{z}{u'_{-k}}\right) \right],$$

avec

$$u'_k = k + i d_{k+p} \quad \text{et} \quad u'_{-k} = -k + i d_{-k+p},$$

donc

$$f(z+p) = \pi_p g(z),$$

où

$$g(z) = (z-u'_0) \prod_{k > 0} \left[ \left(1 - \frac{z}{u'_k}\right) \left(1 - \frac{z}{u'_{-k}}\right) \right]$$

et

$$\pi_p = \frac{(-p+i d_0)}{(p+i d_p)} \prod_{k \neq 0, k \neq p} \left[ \left(1 - \frac{p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{p}{u_{-k}}\right) \right].$$

1°  $g(z)$  est évidemment dans  $\mathcal{P}_c$ ;

2° Montrons que  $\pi_p$  est borné par rapport à  $p$ .

Posons

$$\alpha(p) = \prod_{k > 0, k \neq p} \left[ \left(1 - \frac{p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{p}{u_{-k}}\right) \right],$$

$$\beta(p) = \prod_{1 < k \leq m_p, k \neq p} \left[ \left(1 - \frac{p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{p}{u_{-k}}\right) \right] \quad \text{pour } m \in \mathbf{N},$$

$$\gamma(p) = \prod_{k > m_p} \left[ \left(1 - \frac{p}{u_k}\right) \left(1 - \frac{p}{u_{-k}}\right) \right],$$

$$\alpha(p) = \beta(p)\gamma(p),$$

en remarquant que

$$\left| 1 - \frac{p}{u_k} \right| = \left| \frac{k - p - i d_k}{k + i d_k} \right| \leq \left| \frac{k - p + ic}{k} \right|,$$

$$|\beta(p)| \leq \prod_{k=1}^{p-1} \frac{|k - p - ic|}{k} \prod_{k=p+1}^{mp} \frac{|k - p - ic|}{k}$$

$$\times \prod_{k=1}^{p-1} \frac{|k + p - ic|}{k} \prod_{k=p+1}^{mp} \frac{|k + p - ic|}{k}.$$

Si  $\Gamma$  est la fonction habituelle, définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re} z > 0$$

et

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z} \quad \text{pour } \operatorname{Re} z + n > 0,$$

on a alors :

$$|\beta(p)| \leq \frac{|\Gamma(-ic + p - 1)|}{c |\Gamma(-ic)|} \frac{|\Gamma(-ic + (n-1)p)|}{c |\Gamma(-ic)|} \frac{p}{m p!}$$

$$\times \frac{\Gamma(ic + (m+1)p)}{c |\Gamma(-ic)|} \frac{c |p(-c)|}{|(2p-ic)|} \frac{p}{\Gamma(p-ic) m p!},$$

mais sachant que  $|\Gamma(z+n)| \sim n!$  quand  $n$  tend vers l'infini,  $p$  étant fixé, on choisit  $m$  assez grand. On a alors :

$$|\beta(p)| \leq K \frac{(m-1)p!(m+1)p!}{m p! m p!},$$

la quantité  $[(m-1)p!(m+1)p!]/(m p! m p!)$  est majorée par une constante indépendante de  $p$ . Pour majorer  $\gamma(p)$ , le produit étant convergent, si  $m$  est choisi suffisamment grand :

$$|\gamma(p)| < 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$|\alpha(p)| = |\beta(p)\gamma(p)|$$

est borné.

LEMME 3.3. — Si  $f$  appartient à  $\mathcal{P}_c^0$ , alors on a l'inégalité suivante :

$$|f(z)| \leq K_c \exp \delta_c |\operatorname{Im} z|.$$

C'est une application du théorème de Phragmén-Lindelöf [3].

D'après le lemme 3.1,  $|f(z)| \leq \gamma_c \exp \delta_c |z|$ . Donc :

— si  $z$  est sur l'axe imaginaire,  $z = \operatorname{Im} z$ ,

$$|f(z)| \leq \gamma_c \exp |\operatorname{Im} z|;$$

— si  $z$  est sur l'axe réel,  $z = \operatorname{Re} z = x$ ,

$$f(z) = f(x) = f(x - Ex + Ex),$$

où  $Ex = p$  est la partie entière de  $x$ ,

$$f(x) = f((x-p) + p) = g(x-p)\pi_p,$$

or  $0 \leq x-p < 1$ ,  $|g(x-p)| \leq \gamma_c \exp \delta_c$ , et, d'après le lemme 3.2,  $\pi_p$  est borné;

— donc  $f$  est bornée sur l'axe réel, et d'après le théorème de Phragmén-Lindelöf ([3], p. 47) :

$$|f(z)| \leq K_c \exp a(\operatorname{Im} z).$$

*Preuve de la proposition 3.*

$$F_m(z + \zeta_m^1) = U_m(z + \zeta_m^1) V_m(z + \zeta_m^1),$$

$$z U_m(z + \zeta_m^1) \in \mathcal{P}_{2c}^0 \quad \text{et} \quad z V_m(z + \zeta_m^1) \in \mathcal{P}_{2c}^0,$$

donc

$$|U_m(z + \zeta_m^1)| \leq K \exp \delta_{2c} |\operatorname{Im}(z)| \quad \text{et} \quad |V_m(z + \zeta_m^1)| \leq K \exp \delta_{2c} |\operatorname{Im} z|,$$

d'où

$$(a) \quad |F_m(z)| = |U_m(z) V_m(z)| \leq K^2 \exp 2\delta_{2c} |\operatorname{Im} z|;$$

$$(b) \quad U_m(\zeta_k^1) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq k < m, \quad V_m(\zeta_k^1) = 0 \quad \text{si} \quad k > m,$$

et

$$U_m(\zeta_m^1) = V_m(\zeta_m^1) = 1,$$

c'est-à-dire  $F_m(\zeta_1^k) = \delta_k^m$ .

**THÉORÈME 2.** — Soit  $P$  un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants non hypoelliptique sur  $\mathbf{R}^n$ , alors  $\mathcal{E}_p(\mathbf{R}^n)$  contient un sous-espace isomorphe à l'espace  $s$  des suites à décroissance rapide.

La preuve est maintenant immédiate puisque l'existence de la suite  $(F_m)$  implique celle de  $(T_m)$  et, par la proposition 1, l'application  $A_p$  est un isomorphisme.

**GÉNÉRALISATION À UN OUVERT  $\Omega$ .** — Il existe  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  et  $r \in \mathbf{N} - \{0\}$  tels que

$$0 \in x_0 + \Omega \quad \text{et} \quad \text{Supp } T_m \subset K \subset r(X_0^1 + pr_1 \Omega).$$

**PROPOSITION 4.** — Il existe une suite de distribution  $S_m \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$  et un compact  $K \subset \mathbf{R}$  :

- 1°  $\text{Supp } S_m = \text{Supp } T_m \subset K$ ;
- 2°  $\langle S_m, \exp(iy \zeta_{kr}^1 \cdot r^{-1}) \rangle = \delta_m^k$ ;
- 3° Pour tout  $s \geq 0$ , il existe  $c_s > 0$  et  $m_s \in \mathbf{N}$  tels que

$$\sup_k |\langle S_k, f \rangle k^s| \leq C_s \sup_{x \in K, n \leq m_s} |D^n f(x)| \text{ pour tout } f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}).$$

*Preuve de la proposition 4.* — Il suffit de reprendre la construction des  $T_m$  en remplaçant  $\zeta_k$  par  $\alpha_k = \zeta_{kr} r^{-1}$  qui vérifie aussi les conditions exigées pour la construction

- (i)  $\text{Re } \alpha_k^1 = k$ ;
- (ii)  $|\text{Im } \alpha_k| \leq c$ ;
- (iii)  $|\alpha_k| \leq ck^s$ .

**THÉORÈME 2 bis.** — Soit  $P$  un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants non hypoelliptique sur  $\Omega$ , alors  $\mathcal{E}_p(\Omega)$  contient un sous-espace isomorphe à l'espace  $s$  des suites à décroissance rapide.

*Preuve du théorème 2 bis.* — Il suffit de remplacer  $A_p$  par  $B_p$  :

$$B_p : (\lambda_k) k \mapsto B_p((\lambda_k)_k)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp i(x + x_0) \zeta_{kr}.$$

$B_p$  est évidemment linéaire continue de  $s$  dans  $\mathcal{E}_p(\Omega)$ , la difficulté réside en l'injectivité.

Si  $B_p((\lambda_k)_k) = 0$ , alors :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \exp i(x^1 + x_0^1) \zeta_{kr}^1 = 0,$$

pour tout  $x^1$  appartenant à la première projection de  $\Omega$ , cela implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp iy \alpha_k = 0 \text{ pour tout } y \in K,$$

et donc

$$\lambda_m = \langle S_m, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp iy \alpha_k \rangle = 0 \quad \text{pour tout } m.$$

Pour démontrer que  $B_p$  est un isomorphisme de  $s$  sur  $B_p(s)$ , il suffit de reprendre la démonstration faite pour  $A_p$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (L.). — *Linear partial differential operator*. — Berlin, Springer-Verlag, 1964 (*Grundlehren der mathematischen Gesellschaft*, 116).
- [2] KOMURA (Y.). — Die Nukleartät der Lösungsräume der hypoelliptischen Gleichungen, *Funkcial. Ekvac.*, Tokyo, t. 9, 1966, p. 313-324.
- [3] LEVIN (B. JA.). — *Distribution of zeros of entire functions*. — Providence, American mathematical Society, 1964 (*Translations of mathematical Monographs*, 5).
- [4] MITJAGIN (B. S.). — Dimension approchée et bases dans les espaces nucléaires [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk.*, t. 16, 1961, n° 4, p. 63-132; [en anglais] *Russian math. Surveys*, t. 16, 1961, n° 4, p. 59-127.
- [5] SEIDENBERG (A. A.). — A new decision method for elementary algebra, *Annals of Math.*, Series 2, t. 60, 1954, p. 365-374.
- [6] TARSKI (A.). — *A decision method for elementary algebra and geometry*. 2nd edition. — Berkeley, University of California Press, 1951.

(Texte définitif reçu le 7 juin 1974.)

Abdenour REZZOUK  
 Université de Paris-7,  
 U. E. R. de Mathématiques,  
 2, place Jussieu,  
 Tour 55,  
 75221 Paris-Cedex 05.