BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ FOURNEAU

Isomorphismes de lattis de fermés convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 3-12
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__3_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 3-12.

ISOMORPHISMES DE LATTIS DE FERMÉS CONVEXES

PAR

RENÉ FOURNEAU

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions les isomorphismes entre lattis de fermés convexes ou de bornés fermés convexes d'espaces vectoriels topologiques séparés sur **R**. Lorsque les espaces considérés sont localement convexes et bornologiques, un tel isomorphisme livre un isomorphisme vectoriel topologique.

1. Introduction

Dans [3] (p. 497), KY FAN posait la question suivante : Que peut-on dire de la structure du lattis des bornés fermés convexes d'un espace vectoriel normé ? Nous avons publié récemment [1] une première réponse, dans le cadre plus général des espaces vectoriels topologiques sur **R**. La présente note précise et complète celle-là, en fournissant les théorèmes d'isomorphie demandés par KY FAN.

2. Généralités

2.1. Précisons les notations utilisées dans cet article. Nous désignons par E, E_1 et E_2 des espaces vectoriels topologiques séparés sur le corps **R** des réels. Si A est une partie de E, nous notons $\bar{c}(A)$ son enveloppe convexe fermée, et par $\rangle A \langle$ le sous-espace vectoriel engendré par A. Les lattis dont nous étudions les isomorphismes sont $\mathscr{F}(E)$, ensemble ordonné par inclusion des fermés convexes de E, et dans le cas où E est localement convexe, son sous-lattis $\mathscr{B}(E)$, ensemble des bornés fermés convexes de E. Enfin, $[a : b]$ et $(a : b)$ désignent respectivement le segment d'extrémités a et b et la droite passant par a et b $(a \neq b)$.

2.2. Soit φ un isomorphisme latticiel de $\mathscr{F}(E_1)$ sur $\mathscr{F}(E_2)$ [resp. de $\mathscr{B}(E_1)$ sur $\mathscr{B}(E_2)$]. Quel que soit $x \in E_1$, $\{x\}$ est un atome de $\mathscr{F}(E_1)$

[resp. $\mathscr{B}(E_1)$], donc $\varphi(\{x\})$ est un atome de $\mathscr{F}(E_2)$ [resp. $\mathscr{B}(E_2)$], soit

$$\varphi(\{x\}) = \{y\}, \qquad y \in E_2 \quad ([1], 3.1, p. 471).$$

De là, l'application $\tilde{\varphi} : E_1 \to E_2$ définie par

$$\{\tilde{\varphi}(x)\} = \varphi(\{x\}), \qquad \forall x \in E_1,$$

est une bijection. Nous dirons que $\tilde{\varphi}$ est l'*application induite par* φ. *L'application* φ^* *associée à* φ est la bijection définie par

$$\varphi^*(x) = \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0), \qquad \forall x \in E_1;$$

en particulier, $\varphi^*(0) = 0$.

On définit de même les applications induites par $\overset{-1}{\varphi}$ et associée à $\overset{-1}{\varphi}$.

2.3. *Soit* φ *un isomorphisme latticiel de* $\mathscr{F}(E_1)$ *sur* $\mathscr{F}(E_2)$ [resp. *de* $\mathscr{B}(E_1)$ *sur* $\mathscr{B}(E_2)$].

L'application induite par $\overset{-1}{\varphi}$ *est la réciproque de l'application induite par* φ : $(\overset{-1}{\varphi})^{\sim} = (\tilde{\varphi})^{-1}$ (¹).

Soit $y \in E_2$. On peut écrire :

$$\{\tilde{\varphi}[(\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(y)]\} = \varphi(\{(\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(y)\}) = \varphi[\overset{-1}{\varphi}(\{y\})] = \{y\},$$

soit $\tilde{\varphi}[(\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(y)] = y$. Comme $\tilde{\varphi}$ est une bijection, il en résulte que

$$(\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(y) = (\tilde{\varphi})^{-1}(y), \qquad \forall y \in E_2,$$

donc $(\overset{-1}{\varphi})^{\sim} = (\tilde{\varphi})^{-1}$.

3. Théorème général

3.1. *Si* E_1 *et* E_2 *sont des espaces vectoriels topologiques* [resp. *espaces localement convexes*] *séparés sur* **R**, *la dimension de* E_1 *étant supérieure à un, tels qu'il existe un isomorphisme latticiel* φ *de* $\mathscr{F}(E_1)$ *sur* $\mathscr{F}(E_2)$

(¹) Pour des raisons typographiques, nous déplaçons vers la droite, le cas échéant, les symboles supérieurs.

[resp. *de* $\mathscr{B}(E_1)$ *sur* $\mathscr{B}(E_2)$], *l'application* φ^*, *associée à* φ, *est un isomorphisme vectoriel de* E_1 *sur* E_2.

Établissons que, quels que soient a, $b \in E_1$,

$$\tilde{\varphi}([a : b]) = \varphi([a : b]) = [\tilde{\varphi}(a) : \tilde{\varphi}(b)].$$

De fait,

$$[a : b] = \bar{c}(\{a\} \cup \{b\}) = \{a\}_{\iota} \vee \{b\},$$

donc

$$\varphi([a : b]) = \varphi(\{a\}) \vee \varphi(\{b\}) = \{\tilde{\varphi}(a)\} \vee \{\tilde{\varphi}(b)\}$$
$$= [\tilde{\varphi}(a) : \tilde{\varphi}(b)],$$

et, si $c \in [a : b]$,

$$\{\tilde{\varphi}(c)\} = \varphi(\{c\}) \subset \varphi([a : b]) = [\tilde{\varphi}(a) : \tilde{\varphi}(b)],$$

donc

$$\tilde{\varphi}([a : b]) \subset [\tilde{\varphi}(a) : \tilde{\varphi}(b)].$$

Pour conclure à l'égalité, il suffit de remarquer que tout point de $[\tilde{\varphi}(a) : \tilde{\varphi}(b)] = \varphi([a : b])$ définit un singlet qui est image par φ d'un point de $[a : b]$.

De là,

$$\varphi^*([a : b]) = [\varphi^*(a) : \varphi^*(b)], \qquad \forall\, a,\, b \in E_1.$$

Ceci entraîne notamment que $\tilde{\varphi}$ et φ^* préservent la convexité et les enveloppes convexes.

Soit D une droite de E_1 :

$$D = \{x \in E_1 : x = u + \lambda v,\ \lambda \in \mathbf{R}\},$$

où u, $v \in E_1$, $v \neq 0$. Nous allons prouver que $\tilde{\varphi}(D)$ est une droite de E_2.

Pour tout $x \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x \in [u : u + \lambda v]$, soit

$$\tilde{\varphi}(x) \in [\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u + \lambda v)].$$

Or, pour tout $\mu \in \mathbf{R}$,

$$[\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u + \mu v)] \subset (\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u + v)).$$

En effet, si $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha'$, on a

$$\varphi([u - \alpha v : u + \alpha v]) \subset \varphi([u - \alpha' v : u + \alpha' v]),$$

soit

$$[\tilde{\varphi}(u - \alpha v) : \tilde{\varphi}(u + \alpha v)] \subset [\tilde{\varphi}(u - \alpha' v) : \tilde{\varphi}(u + \alpha' v)],$$

donc

$$(\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+v)) \supset \bigcup_{\alpha \geqslant 0} [\tilde{\varphi}(u-\alpha v) : \tilde{\varphi}(u+\alpha v)]$$
$$\supset \bigcup_{\nu \geqslant 0} [\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+\nu v)]$$

et, semblablement

$$(\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+v)) \supset \bigcup_{\nu \leqslant 0} [\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+\nu v)].$$

Dès lors, $\tilde{\varphi}(x) \in (\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+v))$, quel que soit $x \in D$, soit

$$\tilde{\varphi}(D) \subset (\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+v)).$$

Inversement, soient

$$z \in (\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+v)) \qquad \text{et} \qquad y = \tilde{\varphi}^{-1}(z).$$

Il nous reste à montrer que $y \in D$. Il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que

$$z \in [\tilde{\varphi}(u) : \tilde{\varphi}(u+\mu v)] = \tilde{\varphi}([u : u+\mu v]),$$

donc $y \in [u : u+\mu v] \subset D$.

Au total, $\tilde{\varphi}(D)$ est une droite de E_2. De là, φ^* applique les droites de E_1 sur celles de E_2.

Comme tout plan est l'enveloppe convexe de deux droites D_1 et D_2 sécantes distinctes, l'image par φ^* d'un plan de E_1 est un plan de E_2, puisque φ^* préserve les enveloppes convexes.

Enfin, si D et D' sont des droites parallèles de E_1, $\varphi^*(D)$ et $\varphi^*(D')$ sont contenues dans un même plan de E_2 et ne se rencontrent pas, car

$$(\varphi^*)^{-1}[\varphi^*(D) \cap \varphi^*(D')] = D \cap D' = \varnothing,$$

donc sont parallèles.

Tout ce qui précède est indépendant de l'hypothèse sur la dimension de E_1.

Soient à présent x et y deux éléments linéairement indépendants de E_1. Le point $x+y$ est l'intersection de la parallèle à $(0 : x)$ menée par y et de la parallèle à $(0 : y)$ menée par x. Dès lors, $\varphi^*(x+y)$ est l'intersection de la parallèle à $(0 : \varphi^*(x))$ menée par $\varphi^*(y)$ et de la parallèle à $(0 : \varphi^*(y))$ menée par $\varphi^*(x)$, les points $\varphi^*(x)$, $\varphi^*(y)$ étant à leur tour linéairement indépendants; autrement dit,

$$\varphi^*(x+y) = \varphi^*(x) + \varphi^*(y).$$

Soit $x \in E_1$, $x \neq 0$. Comme E_1 est de dimension supérieure à 1, il existe $y \notin (0 : x)$; les points images $\varphi^*(x)$ et $\varphi^*(y)$ sont linéairement indépendants, et l'image par φ^* du plan $P_1 = \rangle \{ x, y \} \langle$ est le plan $P_2 = \rangle \varphi^*(x), \varphi^*(y) \langle$.

De là, l'application $f_1 : (\lambda, \mu) \to \lambda x + \mu y$ est un isomorphisme vectoriel de $\mathbf{R}^2$ sur P_1, et $f_2 : (\lambda, \mu) \to \lambda\varphi^*(x) + \mu\varphi^*(y)$ est un isomorphisme vectoriel de $\mathbf{R}^2$ sur P_2. Dès lors,

$$\sigma = \overset{-1}{f_2} \circ \varphi^* \circ f_1$$

est une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ qui respecte l'ensemble des droites et les droites parallèles.

Cette bijection peut alors être prolongée en une affinité $\tilde{\sigma}$ de $P_2(\mathbf{R})$ sur lui-même, définie par :

1° $\tilde{\sigma}(\lambda, \mu) = \sigma(\lambda, \mu)$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$;

2° pour tout point impropre P de $P_2(\mathbf{R}^2)$, $\tilde{\sigma}(P)$ est le point impropre de $\sigma(D)$, si D est une droite de point impropre P.

La droite projective $\overline{D}$, constituée par $((0, 0) : (1, 0))$ et son point impropre, est sa propre image par $\tilde{\sigma}$. En effet, $\overline{D}$ porte deux points propres fixes pour $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}(0, 0) = (\overset{-1}{f_2} \circ \varphi^*)(0) = (0, 0),$$

puisque $\varphi^*(0) = 0$ et, comme $\overset{-1}{f_2}\,[\varphi^*(x)] = (1, 0)$,

$$\tilde{\sigma}(1, 0) = (\overset{-1}{f_2} \circ \varphi^*)(x) = (1, 0).$$

La permutation de $\overline{D}$, induite par σ, est donc une affinité ([2], 116, p. 72). En d'autres termes, l'application $\tilde{\sigma}_1$ de $\overline{D}$ sur $\overline{D}$, définie par $\tilde{\sigma}_1(\lambda, 0) = \sigma_1(\lambda, 0)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\tilde{\sigma}(P) = P$ si P est le point impropre de $\overline{D}$, est une affinité. Comme elle admet trois points fixes $(0, 0)$, $(1, 0)$, P, elle est l'identité en vertu du théorème de von STAUDT ([2], 60, p. 40). De là,

$$f_2(\lambda, 0) = (f_2 \circ \sigma_1)(\lambda, 0) = (\varphi^* \circ f_1)(\lambda, 0), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R},$$

soit

$$\lambda\varphi^*(x) = \varphi^*(\lambda x), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Ce résultat est valable quel que soit $x \in E_1$, donc φ^* est une bijection linéaire de E_1 sur E_2, d'où la conclusion.

3.2. REMARQUE. — Ce théorème est en défaut lorsque $\dim E_1 = 1$. Ainsi, dans $\mathbf{R}$, toute bijection monotone $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fournit un automorphisme φ de $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ défini par $\varphi(F) = f(F)$ pour tout $F \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$. L'application associée φ^* coïncide avec $f - f(0)$, donc n'est en général pas linéaire.

4. Conséquences

4.1. *Soit φ un isomorphisme latticiel de $\mathscr{F}(E_1)$ sur $\mathscr{F}(E_2)$* [resp. *de $\mathscr{B}(E_1)$ sur $\mathscr{B}(E_2)$*], *où E_2 est de dimension supérieure à* 1.

L'application $(\overset{-1}{\varphi})^*$ associée à $\overset{-1}{\varphi}$ est la réciproque de φ^*: $(\overset{-1}{\varphi})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

Soit $y \in E_2$; on a

$$\varphi^*[(\varphi^*)^{-1}(y)] = y,$$

donc

$$\tilde{\varphi}[(\varphi^*)^{-1}(y)] = y + \tilde{\varphi}(0),$$

de là

$$\begin{aligned}(\varphi^*)^{-1}(y) &= (\tilde{\varphi})^{-1}[y + \tilde{\varphi}(0)] \\ &= (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}[y + \tilde{\varphi}(0)] \quad (2.3) \\ &= (\overset{-1}{\varphi})^*[y + \tilde{\varphi}(0)] + (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0)\end{aligned}$$

soit, puisque $(\overset{-1}{\varphi})^*$ est linéaire (3.1 appliqué à $\overset{-1}{\varphi}$),

$$\begin{aligned}(\varphi^*)^{-1}(y) &= (\overset{-1}{\varphi})^*(y) + (\overset{-1}{\varphi})^*[\tilde{\varphi}(0)] + (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0) \\ &= (\overset{-1}{\varphi})^*(y) + (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}[\tilde{\varphi}(0)] - (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0) + (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0) \\ &= (\overset{-1}{\varphi})^*(y) + (\tilde{\varphi})^{-1}[\tilde{\varphi}(0)] \\ &= (\overset{-1}{\varphi})^*(y).\end{aligned}$$

4.2. *Soit φ un isomorphisme latticiel de $\mathscr{F}(E_1)$ sur $\mathscr{F}(E_2)$* [resp. *de $\mathscr{B}(E_1)$ sur $\mathscr{B}(E_2)$*], *où E_2 est de dimension supérieure à* 1.

Pour tout $F \in \mathscr{F}(E_1)$ [resp. $\mathscr{B}(E_1)$],

$$\varphi^*(F) = \varphi(F) - \tilde{\varphi}(0).$$

De même, pour tout $F' \in \mathscr{F}(E_2)$ [resp. $\mathscr{B}(E_2)$],

$$(\varphi^*)^{-1}(F') = \overset{-1}{\varphi}(F') - (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0).$$

En conséquence, les isomorphismes vectoriels φ^* *et* $(\varphi^*)^{-1}$ *préservent les fermés convexes* [resp. *bornés fermés convexes*].

Soit $F \in \mathscr{F}(E_1)$ [resp. $\mathscr{B}(E_1)$]. Comme $\mathscr{F}(E_1)$ [resp. $\mathscr{B}(E_1)$] est atomistique, les atomes étant les $\{x\}$, $x \in E_1$, ([1], 3.1, p. 471),

$$\varphi(F) = \bigvee_{x \in F} \varphi(\{x\}) = \bar{c}[\tilde{\varphi}(F)] = [\tilde{\varphi}(F)]^{-}.$$

Démontrons, par l'absurde, que $\tilde{\varphi}(F)$ est fermé dans E_2. S'il existe $y \in [\tilde{\varphi}(F)]^{-} \setminus \tilde{\varphi}(F)$, $\overset{-1}{\varphi}(\{y\}) \subset F$. Mais,

$$\{(\tilde{\varphi})^{-1}(y)\} = \{(\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(y)\} = \overset{-1}{\varphi}(\{y\}),$$

d'où

$$^{\sim})^{-1}(y) \in F.$$

Dès lors, $(\tilde{\varphi} \circ (\tilde{\varphi})^{-1})(y) = y \in \tilde{\varphi}(F)$, ce qui est absurde.

Au total, $\varphi(F) = \tilde{\varphi}(F)$, donc

$$\varphi^*(F) = \varphi(F) - \tilde{\varphi}(0).$$

Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, appliquons ce qui précède à $\overset{-1}{\varphi}$ et $F' \in \mathscr{F}(E_2)$ [resp. $\mathscr{B}(E_2)$] :

$$(\varphi^*)^{-1}(F') = (\overset{-1}{\varphi})^*(F') = \overset{-1}{\varphi}(F') - (\overset{-1}{\varphi})^{\sim}(0).$$

4.3. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels topologiques séparés sur* **R**. *Les lattis* $\mathscr{F}(E_1)$ *et* $\mathscr{F}(E_2)$ *sont isomorphes si et seulement s'il existe, entre* E_1 *et* E_2, *un isomorphisme vectoriel qui, tout comme sa réciproque, préserve les fermés convexes.*

Il est évident que la condition est suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire. Si E_1 est de dimension supérieure à un, le résultat se déduit de 3.1 et 4.2, puisque, dans ce cas, la dimension de E_2 est supérieure à un.

Si $\dim E_1$ est nul, E_2 est de dimension nulle, puisque

$$\varphi^*(E_1) = E_2 = \{0\},$$

d'où la conclusion.

Si $\dim E_1$ est égal à 1, on montre, par le raisonnement fait dans la première partie du théorème 3.1, que $\varphi^*(E_1)$ est une droite. Comme $\varphi^*(E_1) = E_2$, le théorème est démontré, deux espaces séparés de dimension un étant liés par un isomorphisme topologique (non nécessairement égal à φ^*).

4.4. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés sur* **R**.

Les lattis $\mathscr{B}(E_1)$ *et* $\mathscr{B}(E_2)$ *sont isomorphes si et seulement s'il existe, entre* E_1 *et* E_2, *un isomorphisme vectoriel qui, tout comme sa réciproque, préserve les bornés fermés convexes.*

La condition est visiblement suffisante.

Sa nécessité, dans le cas où E_1 et E_2 sont de dimension supérieure à un, résulte de 3.1 et 4.2.

Les autres cas se traitent comme en 4.3.

5. Théorèmes d'isomorphie vectorielle topologique

5.1. Dans ce paragraphe, nous donnons les théorèmes qui permettent, dans le cas où les espaces considérés sont bornologiques, de déduire une isomorphie vectorielle topologique d'une isomorphie entre lattis de fermés convexes ou lattis de bornés fermés convexes.

5.2. Un lemme (dû à MACKEY [4] dans le cas des espaces normés) est nécessaire.

LEMME. — *Si* E_1 *et* E_2 *sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes, séparés et bornologiques sur* **R**, *tout isomorphisme vectoriel de* E_1 *sur* E_2 *qui, tout comme sa réciproque, préserve les hyperplans homogènes fermés est un isomorphisme vectoriel topologique.*

Observons d'abord qu'un isomorphisme vectoriel topologique entre E_1 et E_2 est la même chose qu'un isomorphisme vectoriel bornologique.

Soit T un isomorphisme répondant aux conditions de l'énoncé, et soient $f_2 \in E_2'$, $f_2 \neq 0$, $H_2 = \overset{-1}{f_2}(0)$ et $H_1 = T(H_2)$. Vu l'hypothèse sur T, H_1 est un hyperplan homogène fermé de E_1, donc le noyau d'une forme linéaire continue non triviale f_1 sur E_1.

Un point z étant fixé en dehors de H_1, on peut choisir f_1 en sorte que $f_1(z) = 1$.

Quel que soit $x \in E_1$, $x = h+f_1(x)\,z$, où $h \in H_1$, donc

$$f_2(Tx) = f_2(Th) + f_2\left[f_1(x)\,Tz\right] = f_1(x)\,f_2(Tz),$$

puisque $Th \in H_2$.

Dès lors, si B est un borné de E_1, $f_1(B)$ est borné dans $\mathbf{R}$, $f_2(TB)$ l'est aussi, car

$$f_2(TB) = f_1(B)\,f_2(Tz).$$

Comme ce raisonnement est valable quelle que soit la forme linéaire continue non triviale f_2 sur E_2, TB est borné pour la topologie affaiblie de E_2, donc est borné dans E_2.

Au total, T est une application bornée. On montre de même que $\overset{-1}{T}$ est borné, d'où le lemme.

5.3. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, séparés et bornologiques sur* $\mathbf{R}$.

Les lattis $\mathcal{F}(E_1)$ *et* $\mathcal{F}(E_2)$ *sont isomorphes si et seulement si les espaces vectoriels topologiques* E_1 *et* E_2 *sont isomorphes.*

La suffisance est évidente.

Prouvons la nécessité de la condition. Il résulte de 4.3 qu'il existe un isomorphisme vectoriel T de E_1 sur E_2 qui, comme sa réciproque, respecte les fermés convexes. Ces isomorphismes respectent également les hyperplans homogènes fermés, puisque T et $\overset{-1}{T}$ sont linéaires. Pour conclure, il suffit d'appliquer 5.2.

5.4. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, séparés et bornologiques sur* $\mathbf{R}$.

Les lattis $\mathcal{B}(E_1)$ *et* $\mathcal{B}(E_2)$ *sont isomorphes si et seulement si les espaces vectoriels topologiques* E_1 *et* E_2 *sont isomorphes.*

La condition suffisante est immédiate.

Pour la condition nécessaire, il suffit d'appliquer 4.4 en notant que l'isomorphisme décrit est bornologique.

5.5. Le cas particulier demandé par KY FAN (E_1 et E_2 normés sur $\mathbf{R}$) est une conséquence de 5.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOURNEAU (R.). — Lattis de fermés convexes, *Bull. Soc. royale Sc. Liège*, t. 41, 1972, p. 468-483.

[2] GODEAUX (L.) et ROZET (O.). — *Leçons de géométrie projective*. 2e édition. — Liège, Sciences et Lettres, 1952.

[3] KY FAN *in* KLEE (V. L.). — « *Convexity* ». — Providence, American mathematical Society, 1963 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 7), p. 211-219.

[4] MACKEY (G. W.). — Isomorphisms of normed linear spaces, *Annals of Math.*, t. 43, 1942, p. 244-260.

(Texte reçu le 15 mai 1973.)

René FOURNEAU,
Institut de Mathématique,
Université de Liège,
15, avenue des Tilleuls,
B-4000 Liège, Belgique.