BULLETIN DE LA S. M. F.

JOJI KAJIWARA

La réciproque du théorème d'annulation et de finitude de cohomologie dans l'espace produit d'une famille dénombrable de sphères de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 129-139

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__129_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 129-139.

LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ANNULATION ET DE FINITUDE DE COHOMOLOGIE DANS L'ESPACE PRODUIT D'UNE FAMILLE DÉNOMBRABLE DE SPHÈRES DE RIEMANN

PAR

JOJI KAJIWARA
[Kyushu University]

RÉSUMÉ. — Soit X l'espace produit d'une famille dénombrable de sphères de Riemann. On démontre qu'un domaine D dans X, dont tout point frontière est adhérent à l'ensemble des points qui sont d'ordre fini dans $X-D$, est un domaine d'holomorphie si $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour tout $p \geq 1$. Un contre-exemple montre que la condition concernant la frontière de D est nécessaire.

1. Introduction

Dans le cas de dimension finie, SERRE [19] a donné un théorème qui nous dit qu'un domaine D dans C^n est un domaine d'holomorphie si $H^p(D, \mathfrak{O}) = 0$ pour tout entier p avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$, où $\mathfrak{O}$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur D. LAUFER [9] a généralisé ce résultat en montrant qu'un domaine D dans C^n est un domaine d'holomorphie si $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour tout entier p avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Les domaines d'holomorphie dans l'espace produit d'une famille dénombrable de plans complexes ont été étudiés d'abord par HIRSCHOWITZ [6] et plus tard MATOS [13]. RICKART [17] a montré que pour un compact K polynomialement convexe dans un espace produit d'une famille des plans complexes les groupes de cohomologie $H^p(K, \mathfrak{O})$ sont nuls pour $p \geqslant 1$. Récemment, DINEEN [3] a donné un théorème d'annulation de la cohomologie pour les domaines d'holomorphie dans un espace vectoriel de dimension infinie muni de la topologie f-ouverte sans utiliser la d''-cohomologie.

Soit X l'espace produit d'une famille dénombrable de sphères de Riemann, c'est-à-dire $X = (\overline{C})^N$, où $\overline{C}$ est la sphère de Riemann et N est l'ensemble des entiers positifs non nuls. On se propose de démontrer, en utilisant la d''-cohomologie que si D est un domaine d'holomorphie dans X on a $H^p(D, \mathfrak{O}) = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$, et que réciproquement un domaine D dans X, dont tout point frontière est adhérent à l'ensemble des points qui sont d'ordre fini dans $X-D$, est un domaine d'holomorphie si $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour tout entier $p \geqslant 1$. On étudie le prolongement des groupes de cohomologie, et on démontre qu'un ensemble analytique de codimension infinie est un ensemble singulier impropre de tout groupe de cohomologie dans X. Ceci donne un contre-exemple qui montre que la condition concernant la frontière de D ne peut être supprimée.

Je remercie Pierre LELONG pour ses conseils et ses encouragements dans la préparation de ce travail.

2. Préliminaire

Soit X l'espace produit d'une famille dénombrable de sphères de Riemann, c'est-à-dire $X = (\overline{C})^N$, où $\overline{C}$ est la sphère de Riemann et N l'ensemble des entiers positifs non nuls. Soit $\mathfrak{E}_q$ le faisceau des germes de fonctions dérivables qui ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_q, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q$. On pose $\mathfrak{E} = \bigcup_q \mathfrak{E}_q$, faisceau des germes de fonctions dérivables qui localement ne dépendent que d'un nombre fini de variables. Si on a $f_x \in \mathfrak{E}$ pour tout $x \in D$ ouvert de X, on dira que *f est de la classe spéciale sur D*. Rappelons que si f est holomorphe en $x \in X$, il existe un voisinage U_x de x et un $\mathfrak{E}_q$ (dépendant tous deux de x et de f) tels que le germe de f en tout $y \in U_x$ appartienne à $\mathfrak{E}_q$: f holomorphe sur D ouvert de X entraîne donc que, pour tout $x \in D$, le germe f_x en x appartient à $\mathfrak{E}$. Soit $\mathfrak{O}$ le faisceau d'anneaux des germes de fonctions holomorphes sur X. Le faisceau des germes méromorphes sur X est noté par $\mathfrak{M}$. Une section de $\mathfrak{M}$ sur un ouvert D est appelée *une fonction méromorphe sur D*.

Un domaine D dans X est appelé *un domaine d'holomorphie* (ou *domaine de méromorphie*) s'il n'existe pas d'ouvert U de X non contenu dans D, $D \cap U$ ayant une composante connexe non vide Δ, et tel que, pour toute fonction holomorphe (ou méromorphe) f sur D, il existe une fonction holomorphe (ou méromorphe) g sur U vérifiant $f = g$ dans Δ.

Une $(0, p)$-forme dérivable φ de la classe spéciale sur un ouvert D de X est une somme localement finie

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)\, d\overline{x}_{i_1} \wedge d\overline{x}_{i_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{x}_{i_p}$$

de monômes $d\bar{x}_{i_1} \wedge d\bar{x}_{i_2} \wedge \ldots \wedge d\bar{x}_{i_p}$ à coefficients fonctions dérivables $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ de la classe spéciale sur D, $i_k \in N$. En utilisant les résultats de DOLBEAULT [4] dans le cas de la dimension finie, on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathfrak{O} \to \mathfrak{E} \xrightarrow{d''} \overset{0,1}{\mathfrak{E}} \xrightarrow{d''} \overset{0,2}{\mathfrak{E}} \to \ldots .$$

Puisqu'elle est une résolution fine du faisceau $\mathfrak{O}$, la cohomologie de Čech est représentée par la d''-cohomologie, *via* l'isomorphisme de Dolbeault comme ci-dessous.

LEMME 1. — *Soit $Z^p_{\mathfrak{E}}(D)$ l'espace vectoriel des formes de $\mathfrak{E}$, de type $(0, p)$ et d''-fermées sur D. Soit $B^p_{\mathfrak{E}}(D)$ l'espace vectoriel des formes de $\mathfrak{E}$, de type $(0, p)$ et d''-exactes sur D pour $p \geqslant 1$ et $B^0_{\mathfrak{E}}(D) = 0$. Alors on a*

$$H^p(D, \mathfrak{O}) = Z^p_{\mathfrak{E}}(D)/B^p_{\mathfrak{E}}(D) \qquad \textit{pour} \quad p \geqslant 0.$$

LEMME 2. — *Soit D un ouvert de X. On pose $D_1 = \{ x = (x_k) \in D; x_1 = 0 \}$. Si $m = \dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ et $n = \dim H^{p+1}(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour un entier $p \geqslant 1$, on a $\dim H^p(D_1, \mathfrak{O}) < (m+1)(n+1)$.*

Démonstration. — Soient $\pi : X \to X_1$ et $\rho : X_1 \to X$ l'application canonique où $X_1 = \{ x = (x_k) \in X; x_1 = 0 \}$. Considérons $(m+1)(n+1)$ formes $f_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, de type $(0, p)$, dérivables, de la classe spéciale et d''-fermées sur D_1. Il existe une fonction dérivable φ de la classe spéciale sur D telle que $\varphi = 1$ dans un voisinage de D_1 et que le support de φ soit contenu dans $D \cap \pi^{-1}(D_1)$. On pose

$$g_{i,j} = -d''\varphi \wedge f_{i,j} \circ \pi / x_1 \quad \text{dans } D_1.$$

Alors chaque $g_{i,j}$ est une $(0, p)$-forme dérivable de la classe spéciale et d''-fermée sur D. Puisque $\dim H^{p+1}(D, \mathfrak{O}) = n$, il existe un $(n+1)$-vecteur constant non nul $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in+1})$ et une $(0, p)$-forme dérivable h_i de la classe spéciale sur D pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, solution de

$$\textstyle\sum_{j=1}^{m+1} b_{ij} g_{ij} = d'' h_i.$$

Alors la $(0, p)$-forme dérivable k_i de la classe spéciale sur D définie par

$$k_i = \textstyle\sum_{j=1}^{m+1} b_{ij} \varphi f_{ij} \circ \pi + x_1 h_i$$

est d''-fermée. Puisque $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) = m$, il existe un $(m+1)$-vecteur constant non nul $(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1})$ et une $(0, p-1)$-forme dérivable s

de la classe spéciale sur D tels que

$$\sum_{j=1}^{m+1} a_i k_i = d'' s.$$

Alors on a

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_i b_{ij} f_{ij} = d'' s \quad \text{dans } D_1,$$

c'est-à-dire dim $H^p(D_1, \mathfrak{O}) < (m+1)(n+1)$.

De même, on obtient le lemme suivant.

LEMME 3. — *Soit D un ouvert de X tel que $m =$ dim $H^1(D, \mathfrak{O}) < +\infty$. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_{m+1}$ $(m+1)$ fonctions holomorphes sur*

$$D_1 = \{x = (x_k) \in D;\ x_1 = 0\}.$$

Il existe un $(m+1)$-vecteur constant non nul $(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1})$ et une fonction holomorphe h sur D tels que

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i f_i = h \quad \textit{dans } D_1.$$

3. La réciproque du théorème de finitude de cohomologie

DÉFINITION 1. — Soit F un ensemble dans X. Un point $x^0 = (x_k^0)$ de F sera dit *d'ordre p dans F* si F contient le sous-espace de codimension p défini par les équations $x_k = x_k^0$ où k parcourt les p premiers indices, $1 \leqslant k \leqslant p$.

LEMME 4. — *Soit D un ouvert de X tel que $m_i =$ dim $H^i(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et $p \geqslant 2$. Soit $x^0 = (x_k^0)$ un point d'ordre p dans $X-D$. On pose*

$$n_j = \prod_{k=0}^{j} (m_{k+1}+1)^{\binom{j}{k}}$$

pour $0 \leqslant j \leqslant p-1$, $\binom{j}{k}$ désignant le nombre des combinaisons de k objets parmi les j. Soient $f_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}}(x_1)$ une famille de $\nu = n_0 n_1 \ldots n_{p-2}$ fonctions entières de la variables $(x_1 - x_1^0)^{-1}$. Alors il existe un ν-vecteur constant non nul $(b_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}};\ 1 \leqslant i_j \leqslant n_j,\ 0 \leqslant j \leqslant p-2)$ *et une fonction holomorphe $f(x)$ sur D tels que*

$$\sum b_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}} f_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}}(x) = f(x)$$

dans $D_{p-1} = \{ x = (x_k) \in D;\ x_k = x_k^0,\ 2 \leqslant k \leqslant p \}$.

Démonstration. — On pose

$$D_q = \{ x = (x_k) \in D ;\ x_k = x_k^0,\ p-q+1 \leqslant k \leqslant p \}$$

pour $q = 1, 2, \ldots, p-1$. On a

$$\dim H^i(D_j, \mathfrak{O}) < \prod_{k=0}^{j} (m_{i+k}+1)^{\binom{j}{k}}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant p-2$ et $1 \leqslant i \leqslant p-j-1$ d'après le lemme 2. En particulier, $\dim H^1(D_j, \mathfrak{O}) < n_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, p-2$. D'après le lemme 3, pour chaque k avec $2 \leqslant k \leqslant p-1$, il existe un n_{p-k}-vecteur constant non nul $(a_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1} 1}, a_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1} 2}, \ldots, a_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1} n_{p-k}})$ et une fonction holomorphe $f_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1}}$ sur D_{p-k} tels que

$$\sum_{i_{p-k}=1}^{n_{p-k}} a_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1} i_{p-k}} f_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1} i_{p-k}} = f_{i_0 i_1 \ldots i_{p-k-1}} \quad \text{dans } D_{p-k+1}.$$

Il existe un n_0-vecteur constant non nul $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$ et une fonction holomorphe f sur D telle que

$$\sum_{i_0=1}^{n_0} a_{i_0} f_{i_0} = f \quad \text{dans } D_1.$$

$b_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}} = a_{i_0} a_{i_0 i_1} \ldots a_{i_0 i_1 \ldots i_{p-2}}$ et f satisfont la condition donnée.

LEMME 5. — *Soit D un domaine dans $(\overline{C})^n$ tel que* $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ *pour* $1 \leqslant p \leqslant n-1$. *Alors D est un domaine d'holomorphie dans $(\overline{C})^n$.*

Démonstration. — Soit $x^0 = (x_k^0)$ un point frontière de D tel que x_1^0 soit un point frontière de $D' = \{ x_1 \in \overline{C} ; (x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D \}$. Pour un entier positif non nul t, on pose

$$f_i(x_1) = (x_1 - x_1^0)^{-i} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Si t est suffisamment grand, d'après le lemme 4, il existe un t-vecteur constant non nul $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ et une fonction holomorphe f sur D tel que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{t} a_i f_i(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \quad \text{dans } D'.$$

Alors f est une fonction holomorphe qui n'est pas prolongeable en x^0. Ceci montre que D est un domaine d'holomorphie.

THÉORÈME 1. — *Soit D un domaine dans X tel que chaque point frontière de D soit adhérent à l'ensemble des points qui sont d'ordre fini dans $X-D$.*

Si $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ *pour tout entier* $p \geqslant 1$, *il existe un entier positif* n, *un domaine d'holomorphie* Δ *dans* $(\overline{C})^n$ *et une application biholomorphe* ξ *sur* X *consistant à amener un groupe de* n *coordonnées aux* n *premières places, de manière qu'on ait* $\xi(D) = \Delta \times (\overline{C})^{N-n}$.

Démonstration. — Soit $x^0 = (x_k^0)$ un point de D. Il existe un entier positif m et des nombres positifs non nuls $r_1, r_2, \ldots, r_m$ tels que $\{ x = (x_k) \in X ; | x_i - x_i^0 | < r_i, 1 \leqslant i \leqslant m \} \subset D$. On va démontrer que $\{ x = (x_k) \in X ; | x_i - x_i^0 | < r_i, 2 \leqslant i \leqslant m \} \subset D$ s'il existe un nombre positif non nul ε tel que $\{ x = (x_k) \in X ; | x_i - x_i^0 | < \varepsilon, 2 \leqslant i \leqslant m \} \subset D$. Si c'était faux, il existerait $x' = (x'_k) \in D$ tel que $| x'_i - x_i^0 | < r_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$. On peut supposer que x' est d'ordre p entier positif non nul dans $X - D$. Posons

$$f_i(x_1) = (x_1 - x'_1)^{-i} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Si t est suffisamment grand, d'après le lemme 4, il existe un t-vecteur constant non nul $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ et une fonction holomorphe f sur D tels que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{t} a_i f_i(x) = f(x) \qquad \text{dans} \quad \{ x = (x_k) \in D ; \ x_i = x'_i (2 \leqslant i \leqslant p) \}.$$

Soit ρ l'application de $(\overline{C})^2$ dans $(\overline{C})^N$ définie par

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x'_3, x'_4, \ldots).$$

Alors $f(\rho(x_1, x_2))$ est holomorphe dans

$$\begin{aligned} &\{ (x_1, x_2) \in (\overline{C})^2 ; \ | x_2 - x_2^0 | < \varepsilon \} \\ &\quad \cup \{ (x_1, x_2) \in (\overline{C})^2 ; \ | x_1 - x_1^0 | < r_1, \ | x_2 - x_2^0 | < r_2 \}. \end{aligned}$$

D'après P. Lelong [10], $f(\rho(x_1, x_2))$ est prolongeable dans un cylindre $C(x_1) \times d$, où d est le disque $| x_2 - x_2^0 | < r_2$ de $\overline{C}(x_2)$. On obtient une contradiction. Elle montre qu'on a $\{ x = (x_k) \in (\overline{C})^N ; x_i = x'_i, i \geqslant 2 \} \subset D$ pour tout point x' d'un voisinage

$$\{ x = (x_k) \in (\overline{C})^N ; \ | x_i - x_i^0 | < r_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n \}$$

d'un point $x_0 = (x_k^0)$ dans D qui satisfait

$$\{ x = (x_k) \in (\overline{C})^N ; \ x_i = x_i^0, \ i \geqslant 2 \} \subset D.$$

Ceci montre qu'il existe un entier positif n, un domaine Δ dans $(\overline{C})^n$ et une application biholomorphe ξ sur X consistant à amener un groupe de n coordonnées aux n premières places, de manière que $\xi(D) = \Delta \times (\overline{C})^{N-n}$. Puisque $\dim H^p(\Delta, \mathfrak{O}) \leqslant \dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ pour tout entier $p \geqslant 1$, Δ est un domaine d'holomorphie d'après le lemme 5.

4. Caractérisation des domaines d'holomorphie

DÉFINITION 2. — Un ouvert Δ de $(\overline{C})^n$ sera dit *localement pseudoconvexe* si tout point frontière de Δ a un voisinage ouvert dont l'intersection avec Δ se compose de domaines qui sont convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques (*cf.* P. LELONG [11]). Un domaine D dans X sera dit *localement pseudoconvexe* si, pour tout point $x^0 = (x_k^0)$ et pour tout entier positif non nul n, l'ouvert

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\overline{C})^n ; (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}^0, x_{n+2}^0, \ldots) \in D\}$$

est localement pseudoconvexe dans $(\overline{C})^n$.

THÉORÈME 2. — *Pour un domaine D dans X, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(*a*) *D est un domaine d'holomorphie.*

(*b*) *D est un domaine de méromorphie.*

(*c*) *D est localement pseudoconvexe.*

(*d*) *Il existe un entier positif n, un domaine S dans* $(\overline{C})^n$ *qui est une variété de Stein et une application biholomorphe* ξ *sur X consistant à amener un groupe de n coordonnées aux n premières places, de manières qu'on ait* $\xi(D) = S \times (\overline{C})^{N-n}$.

Démonstration. — (*a*) et (*b*) entraînent (*c*). Montrons (*c*) $\rightarrow$ (*d*). Soit D un domaine localement pseudoconvexe dans X. D'après la démonstration du théorème 1, il existe un entier positif n, un domaine S dans $(\overline{C})^n$ et une application ξ biholomorphe sur X consistant à amener un groupe de n coordonnées aux n premières places, de manière qu'on ait $\xi(D) = S \times (\overline{C})^{N-n}$ et que S ne contienne aucun sous-espace de dimension 1 de la forme $\{x = (x_k) \in (\overline{C})^N ; x_k = \text{Cte}, k \neq i\}$, où i est un entier positif non nul. Puisque D est localement pseudoconvexe, S est localement pseudoconvexe.

D'après FUJITA [5], S est une variété de Stein. Ceci montre que (c) entraîne (d). Si S est une variété de Stein, S est un domaine d'holomorphie et de méromorphie à la fois. Donc (d) entraîne (a) et (b).

THÉORÈME 3. — *Soit D un domaine d'holomorphie dans X. On a $H^p(D, \mathfrak{O}) = 0$ pour $p \geqslant 1$.*

Démonstration. — D'après le théorème 2, on peut supposer que $D = S \times (\overline{C})^{N-n}$, où S est un domaine dans $(\overline{C})^n$ qui est une variété de Stein. Il existe une suite croissante $\{ S_1, S_2, \ldots \}$ de polyèdres analytiques dans S telle que l'adhérence de S_ν soit un compact de $S_{\nu+1}$ pour $\nu = 1, 2, \ldots$, et $S = \bigcup_{\nu=1} S_\nu$. On pose $D_\nu = S_\nu \times (\overline{C})^{N-n}$. Soit f une $(0, p)$-forme dérivable d''-fermée sur D. Puisque D_ν est relativement compact, il existe un entier positif m_ν tel que f soit regardée comme une $(0, p)$-forme dérivable d''-fermée sur $S \times (\overline{C})^{m_\nu}$ pour $\nu \geqslant 1$. On peut trouver une $(0, p-1)$-forme dérivable g de la classe spéciale telle que $d'' g = f$. D'après le lemme 1, on a $H^p(D, \mathfrak{O}) = 0$ pour $p \geqslant 1$.

En conclusion, on énoncera le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Pour un domaine D dans X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *D est un domaine d'holomorphie.*

(b) *D est un domaine de méromorphie.*

(c) *D est localement pseudoconvexe.*

(d) *Tout point frontière de D est adhérent à l'ensemble des points qui sont d'ordre fini dans $X-D$ et $H^p(D, \mathfrak{O}) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.*

(e) *Tout point frontière de D est adhérent à l'ensemble des points qui sont d'ordre fini dans $X-D$ et* $\dim H^p(D, \mathfrak{O}) < +\infty$ *pour tout $p \geqslant 1$.*

5. Prolongement de groupes de coholomogie

DÉFINITION 2. — Un ensemble fermé A d'un ouvert D de X sera dit *analytique* si tout $x \in A$ a un voisinage U_x tel que $A \cap U_x$ soit défini comme l'ensemble des zéros communs d'une famille de fonctions analytiques sur U_x. Un ensemble analytique A de D sera dit *de codimension* n ($\leqslant +\infty$) en un point $x \in A$ si $n = \{ m$; il existe un sous-espace E, de dimension m, de $(C)^N$ et un voisinage U de x tels que $E \cap A \cap U = \{x\}\}$ (*cf.* RAMIS [16]). A sera dit *de codimension infinie* s'il est de codimension infinie en tout point de A.

LEMME 6. — *Soient S une variété de Stein de dimension finie et A un ensemble analytique dans S. On a $H^p((S-A)\times(\overline{C})^N, \mathfrak{O}) = 0$ si* $\operatorname{codim}_x A-2 \geqslant p \geqslant 1$ *pour tout $x \in A$.*

Démonstration. — Il existe une famille dénombrable $\{B_\nu\}$ d'hypersurfaces de S telle que $A = \cap B_\nu$. D'après le théorème 3 et SCHEJA [18], on a

$$\begin{aligned} H^p((S-A)\times(\overline{C})^N, \mathfrak{O}) &= H^p(\{(S-B_\nu)\times(\overline{C})^N\}, \mathfrak{O}) \\ &= H^p(\{S-B_\nu\}, \mathfrak{O}) \\ &= H^p(S-A, \mathfrak{O}) = H^p(S, \mathfrak{O}) = 0. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3. — Un ensemble analytique A d'un ouvert D de X sera dit *de définition finie* si tout $x \in A$ a un voisinage U_x tel que $A \cap U_x$ soit défini comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions analytiques sur U_x (*cf.* RAMIS [16]).

LEMME 7. — *Soient D un ouvert de X et A un ensemble analytique de définition finie dans D. La codimension de A en un point $x = (x_k) \in A$ est m entier positif non nul si et seulement s'il existe un entier n supérieur à m, un voisinage U de x, un voisinage V de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $(\overline{C})^n$ et un ensemble analytique B dans V de codimension m en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $U = V\times(\overline{C})^{N-n} \subset D$ et $A \cap U = B\times(\overline{C})^{N-n}$.*

Démonstration. — Due à la topologie de X, il existe un voisinage U tel que $A \cap U$ soit un cylindre de base de dimension finie.

LEMME 8. — *Soit D un domaine dans X et A un ensemble analytique de définition finie dans D. On a*

$$H^p(D-A, \mathfrak{O}) = H^p(D, \mathfrak{O}) \qquad si \quad \operatorname{codim}_x A-2 \geqslant p \geqslant 0$$

pour tout $x \in A$.

Démonstration. — D'après le lemme 7, il existe un recouvrement ouvert $\{D_\nu; \nu = 1, 2, \ldots\}$ de D tel que, pour chaque ν, il existe un entier n_ν, un domaine d'holomorphie V_ν dans $(\overline{C})^{n_\nu}$ avec $D_\nu = V_\nu\times(\overline{C})^{N-n_\nu}$ et un ensemble analytique B_ν avec $p+2 \leqslant \operatorname{codim}_x B_\nu \leqslant n_\nu$ pour tout

$x \in B_\nu$ et $D_\nu \cap A = B_\nu \times (\overline{C})^{N-n_\nu}$. Donc, d'après le lemme 6 et SCHEJA [18], on a

$$H^p(D-A, \mathfrak{O}) = H^p(\{ D_\nu - D_\nu \cap A \}, \mathfrak{O}) = H^p(\{ D_\nu \}, \mathfrak{O}) = H^p(D, \mathfrak{O}).$$

THÉORÈME 5. — *Soient D un domaine dans X, et A un ensemble analytique de codimension infinie dans D. On a $H^p(D-A, \mathfrak{O}) = H^p(D, \mathfrak{O})$ pour tout $p > 0$.*

Démonstration. — Soit p un entier positif non nul. Il existe un recouvrement ouvert $\{ D_\nu \}$ de D tel que chaque D_ν soit un domaine d'holomorphie dans X, $A \cap D_\nu$ soit l'intersection d'une famille d'ensembles analytiques $\{ B_{\nu\mu} \}$ de définition finie et de codimension supérieur à $p+2$. D'après le lemme 8, le théorème 3 et SCHEJA [18], on a

$$H^p(D-A, \mathfrak{O}) = H^p(\{ D_\nu - B_{\nu\mu} \}, \mathfrak{O}) = H^p(\{ D_\nu \}, \mathfrak{O}) = H^p(D, \mathfrak{O}).$$

THÉORÈME 6. — *Soient D un domaine d'holomorphie dans X, et A un ensemble analytique de codimension infinie dans D. On a*

$$H^p(D-A, \mathfrak{O}) = 0 \quad \textit{pour } p \geqslant 1.$$

Remarque et contre-exemple. — Le théorème 5 montre qu'un ensemble analytique de codimension infinie est un ensemble singulier impropre de tout groupe de cohomologie. Soient D un domaine d'holomorphie dans X, et A un ensemble analytique de codimension infinie dans D. Alors tout point de A est un point frontière de $D-A$ qui n'est pas d'ordre fini dans $X-(D-A)$. $D-A$ n'est pas un domaine d'holomorphie dans X mais $D-A$ satisfait $H^p(D-A, \mathfrak{O}) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ d'après le théorème 6. On ne peut pas supprimer la condition concernant la frontière de D dans le théorème 4. En effet, $X-A$ est un contre-exemple où A est un ensemble analytique de codimension infinie dans X défini par $A = \{ x = (x_k) \in X; x_i = 0, i \in I \}$ pour un sous-ensemble infini I de N. *La condition se vérifie si tout point frontière de D est un point adhérent de l'extérieur de D.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.

[2] BREMERMANN (H. J). — Über die Äquivalenz der pseudo-konvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete in Raum von *n* komplexen Veränderlichen, *Math. Annalen*, t. 128, 1954, p. 63-91.

[3] DINEEN (S.). — Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces, *Math. Annalen*, t. 202, 1973, p. 337-345.
[4] DOLBEAULT (P.). Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, *Annals of Math.*, Series 2, t. 64, 1956, p. 83-330.
[5] FUJITA (R.). Domaines sans point critique intérieur sur l'espace produit, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 4, 1965, p. 493-514.
[6] HIRSCHOWITZ (A.). — Remarque sur les ouverts d'holomorphie d'un produit dénombrable de droites, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, p. 219-229.
[7] KAJIWARA (J.) and KAZAMA (H.). — Continuation and quotient representation of meromorphic functions, *Mem. Fac. Sc. Kyushu Univ.*, t. 25, 1971, p. 10-20.
[8] KAJAWARA (J.) and KAZAMA (H.). — Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set, *Math. Annalen*, t. 204, 1973, p. 1-12.
[9] LAUFER (H. B.). — On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy, *Annals of Math.*, Series 2, t. 84, 1966, p. 102-118.
[10] LELONG (P.). — Sur une propriété de la frontière d'un domaine d'holomorphie, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 216, 1943, p. 107-118.
[11] LELONG (P.). Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, *J. Analyse Math.*, t. 2, 1952, p. 178-208.
[12] LELONG (P.). — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives.* — Paris, Londres, New York, Gordon and Breach, 1968.
[13] MATOS (M. C.). — The envelope of holomorphy of Riemann domains over a countable product of complex planes, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 167, 1972, p. 379-387.
[14] NORGUET (F.). — Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global), *Bull. Soc. math. France*, t. 82, 1954, p. 137-159.
[15] OKA (K.). — Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX : Domaines finis sans point critique intérieur, *Jap. J. Math.*, t. 23, 1953, p. 97-155.
[16] RAMIS (J. P.). — *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe.* — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (*Ergebnisse der Mathematik*, 53).
[17] RICKART (C. E.). — Analytic functions on an infinite number of complex variables, *Duke Math. J.*, t. 36, 1969, p. 581-597.
[18] SCHEJA (G.). — Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen, *Math. Annalen*, t. 144, 1961, p. 345-360.
[19] SERRE (J.-P.). — Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, « *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* » [1953, Bruxelles], p. 57-68. — Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1953 (*Centre belge de Recherches mathématiques*).

(Texte reçu le 21 mars 1974.)

Joji KAJIWARA,
Department of Mathematics,
Faculty of Sciences,
Kyushu University,
Fukuoka 812, Japon,
