BULLETIN DE LA S. M. F.

NESSIM SIBONY

Un exemple de compact polynomialement convexe dans $\mathbb{C}^2$

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 141-147
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__141_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 141-147.

UN EXEMPLE DE COMPACT POLYNOMIALEMENT CONVEXE DANS $\mathbf{C}^2$

PAR

NESSIM SIBONY

RÉSUMÉ. — On construit dans $\mathbf{C}^2$ un compact K polynomialement convexe, d'intérieur connexe et tel que $\bar{K}^0 = K$; cependant il existe des fonctions continues sur K et holomorphes dans K^0 qui ne sont pas limite uniforme sur K de polynômes. De plus, le spectre de $A(K)$ s'identifie avec K, et la frontière de Šilov de $P(K)$ coïncide avec le bord de K.

K étant un compact de $\mathbf{C}^n$, on note $\mathscr{C}(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K à valeurs complexes, munie de sa norme uniforme. On notera $P(K)$ l'adhérence dans $\mathscr{C}(K)$ des polynômes; $A(K)$ désignera la sous-algèbre de $\mathscr{C}(K)$, constituée par les fonctions holomorphes dans K^0.

Un théorème célèbre de MERGELYAN affirme que, lorsque K est polynomialement convexe dans $\mathbf{C}$, on a $A(K) = P(K)$.

E. KALLIN a donné, dans [4], un exemple de compact polynomialement convexe dans $\mathbf{C}^n$ tel que $\bar{K}^0 = K$ et $P(K) \neq A(K)$.

Dans [4], p. 350, on pose la question : Si K est polynomialement convexe dans $\mathbf{C}^n$ et vérifie $\bar{K}^0 = K$, K^0 connexe, est-ce que $P(K) = A(K)$?

V. N. SENIČKIN [6] a donné récemment un exemple qui vérifie les conditions (*a*), (*b*), (*c*) ci-dessous. C'est son exemple qui est à l'origine de cette note.

Nous construisons ici un compact K dans $\mathbf{C}^2$ qui vérifie les conditions suivantes :

(*a*) $\bar{K}^0 = K$, et K^0 connexe;

(*b*) K est polynomialement convexe;

(*c*) $A(K) \neq P(K)$;

(*d*) $\operatorname{Sh} A(K) = \operatorname{Sh} P(K) = \partial K$, où $\operatorname{Sh} A(K)$ désigne la frontière de Shilov de l'algèbre $A(K)$;

(*e*) $\operatorname{Sp} A(K) = \operatorname{Sp} P(K) = K$, $\operatorname{Sp} A(K)$ est le spectre de Gelfand de l'algèbre $A(K)$.

La construction reprend l'idée de V. N. SENIČKIN de mettre sur la frontière de K un arc de mesure de Hausdorff H_2 strictement positive. L'ex mple donné ici est cependant beaucoup plus simple que celui de SENIČKIN [6], il possède des propriétés géométriques qui permettent de vérifier les conditions (d) et (e). Il serait intéressant de savoir si on a toujours Sp $A(K) = K$ lorsque K est polynomialement convexe, et $\overline{K^0} = K$.

Nous allons construire d'abord un compact qui vérifie les conditions (a), (b), (c), puis, en précisant les fonctions qui interviennent dans la construction, on pourra vérifier les conditions (d) et (e).

Soient D le disque unité dans $\mathbf{C}$, et Γ un arc, de mesure de Lebesgue positive, contenu dans $\overline{D}$ et ne rencontrant le cercle unité qu'au point 1. Un tel arc a été construit par OSGOOD [5]. On sait alors que l'algèbre A_Γ des fonctions holomorphes dans $\overline{\mathbf{C}}\setminus\Gamma$, et continues dans $\overline{\mathbf{C}}$, sépare les points de $\overline{\mathbf{C}}$ [7]. Il est également clair que $D\setminus\Gamma$ est un domaine de Runge.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 1. — *Soit U un domaine de Runge dans $\mathbf{C}^n$. Il existe une fonction $\varphi \geqslant 9$ continue dans U telle que $\varphi(z) = \sup_i |p_i(z)|$ pour tout $z \in U$, les p_i étant des polynômes, de plus, localement, φ est le* sup *d'un nombre fini de modules de polynômes, et $\varphi(z) \geqslant [d(z)]^{-1}$, où $d(z)$ désigne la distance de z au complémentaire de U dans $\mathbf{C}^n$.*

Démonstration. — Soit K_n une suite exhaustive de compacts polynomialement convexes tels que $K_n \subset \overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$. Pour tout $\zeta \in K_{n+2}\setminus\overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$, il existe un polynôme p, avec $|p(\zeta)| > [d(\zeta)]^{-1}+1$ et $\|p\|_{K_n} \leqslant 1$. Il existe donc un nombre fini de polynômes $p_{1,n}, \ldots, p_{k,n}$ tels que, si $\varphi_n(z) = \sup_{1\leqslant i\leqslant k} |p_{k,n}(z)|$, alors $\varphi_n(\zeta) > [d(\zeta)]^{-1}$ sur $K_{n+2}\setminus\overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$ et $\varphi_n \leqslant 1$ sur K_n. La fonction $\varphi = \sup_n \varphi_n$, vérifie les conditions demandées. On peut également supposer que, si $\zeta \in \partial U$, $\varphi(\zeta) = +\infty$.

Soit φ une fonction vérifiant les conditions du lemme 1, en prenant, pour domaine U, l'ouvert $D\setminus\Gamma$.

Posons

$$\Omega_\varphi = \{(z, w);\ z \in D\setminus\Gamma) \text{ et } |w| < \exp(-\varphi(z))\}.$$

L'ensemble Ω_φ est ouvert dans $\mathbf{C}^2$ puisque φ est continue.

On a $K_\varphi = \overline{\Omega}_\varphi = \{(z, w);\ z \in D,\ |w| \leqslant \exp(-\varphi(z))\}$. En effet, on a vu que φ est continue à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

(a) On a $\overline{K_\varphi^0} = \overline{\Omega_\varphi^0} = \overline{\Omega}_\varphi = K_\varphi$. Dans la suite, nous poserons $K_\varphi = K$ et $\Omega_\varphi = \Omega$. L'ensemble $K^0 = \Omega$ est connexe; en effet, si (z_1, w_1), (z_2, w_2) sont deux points de Ω, il existe des arcs dans Ω qui vont de (z_1, w_1) à $(z_1, 0)$, puis de $(z_1, 0)$ à $(z_2, 0)$, en restant dans U, enfin de $(z_2, 0)$ à (z_2, w_2). On peut même remarquer que Ω est simplement connexe.

(b) K est polynomialement convexe. En effet,

$$K = \{(z, w);\ |z| \leqslant 1,\ |w| \leqslant 1,\ |w| \exp(\varphi(z)) \leqslant 1\};$$

or $\varphi = \sup_i |p_i|$, donc $\exp(\varphi) = \sup_j |q_j|$, où les q_j sont des polynômes. Il est facile de voir, d'après la construction de φ, qu'on a ces relations sur $\overline{D}$. Par suite, $|w| \exp(\varphi(z)) \leqslant 1$ équivaut à $|w\, q_j(z)| \leqslant 1$ pour tout j, donc K est polynomialement convexe.

(c) Montrons que $A(K) \neq P(K)$. Soit f une fonction non constante de A_Γ; considérons sa restriction à $\overline{D}$, elle se prolonge en une fonction de $A(K)$ indépendante de la variable w. Il est clair qu'une telle fonction n'appartient pas à $P(K)$, sinon elle serait analytique dans D et par suite dans tout $\overline{\mathbf{C}}$, étant bornée, elle serait constante.

Nous allons préciser à présent le compact K afin de vérifier les conditions (d) et (e).

Dans [2], A. BROWDER et J. WERMER ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'algèbre A_Γ restreinte à Γ soit une algèbre de Dirichlet, c'est-à-dire pour que $\operatorname{Re} A_\Gamma$ soit dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Gamma)$.

Nous avons besoin ici, simplement de l'existence d'un arc Γ de mesure de Lebesgue positive dont tout point est point pic pour A_Γ [7].

(d) Soit ψ une fonction $\geqslant 0$, $\psi = \sup_k |p_k|$, où les p_k sont des polynômes, et telle que, pour tout $z_0 \in D$, il existe un polynôme P_{z_0} avec $\operatorname{Re} P_{z_0}(z_0) = \psi(z_0)$ et $\operatorname{Re} P_{z_0}(z) < \psi(z)$ si $z \neq z_0$. On suppose de plus que ψ est bornée sur $\overline{D}$. Il est facile de construire de telles fonctions ψ.

Considérons le compact $K_{(\varphi+\psi)}$ associé à la fonction $(\varphi+\psi)$. Ce compact vérifie les conditions (a), (b), (c).

Soit $(z_0, w_0) \in \partial K_{(\varphi+\psi)}$ tel que $w_0 \neq 0$. On a alors

$$|w_0| = \exp -(\varphi(z_0) + \psi(z_0)).$$

Il existe deux polynômes P et Q tels que $\operatorname{Re} P(z_0) = \psi(z_0)$, $\operatorname{Re} P(z) < \psi(z)$ si $z \neq z_0$, $Q(z_0) = \varphi(z_0)$ et $|Q(z)| \leqslant \varphi(z)$ dans $\overline{D}$.

Soit f la fonction définie par

$$f(z, w) = \frac{\bar{w}_0}{|w_0|} w \exp(P+Q)(z).$$

Il est clair que, $f \in P(K)$,

$$|f(z, w)| \leqslant \exp-(\varphi+\psi)(z).\exp(\varphi+\psi)(z) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(z_0, w_0) = 1.$$

Si $z \neq z_0$, $\exp(P+Q)(z) < \exp(\varphi+\psi)(z)$. Par suite, $|f(z, w)| < 1$ si $z \neq z_0$, et $|f(z, w)| = 1$ si et seulement si $z = z_0$ et $w = w_0$. Par suite la fonction $g = (1+f)/2$ appartient à $P(K)$ et admet le point (z_0, w_0) comme point pic.

Si $w_0 = 0$ et $|z_0| = 1$, il existe une fonction de $A(\bar{D})$ qui a un pic en z_0. Lorsque $w_0 = 0$ et $z_0 \in \Gamma$, d'après le choix de Γ, on a vu qu'il existe une fonction de A_Γ qui a un pic en z_0. Ceci achève la démonstration de la condition (d).

(e) Sp $A(K) = K$. Notons $\mathcal{M}_A$ le spectre de $A(K)$. Soit $\pi : \mathcal{M}_A \to \mathbf{C}^2$, définie par $\pi(X) = (X(z), X(w))$. Puisque K est polynomialement convexe, $\pi(\mathcal{M}_A) = K$. Nous voulons montrer que $\mathcal{M}_A$ s'identifie à K grâce à l'application π.

Soit $f \in A(K)$, $f(z, 0)$ est une fonction holomorphe dans $D \setminus \Gamma$, continue dans $\bar{D}$. D'après un théorème d'Arens [1], on sait que le spectre de l'algèbre $A(D \setminus \Gamma, \bar{D})$ (fonctions continues dans $\bar{D}$, holomorphes dans $D \setminus \Gamma$) s'identifie avec $\bar{D}$. Or $A(D \setminus \Gamma, \bar{D})$ s'injecte dans $A(K)$. Donc, pour $f \in A(K)$,

$$X(f) = X[f - f(z, 0)] + f(z_0, 0) \qquad \text{si} \quad X(z) = z_0.$$

Par suite, il suffit de déterminer X pour les fonctions de $A(K)$ qui s'annulent sur l'ensemble $\{(z, 0); z \in \bar{D}\}$.

Soit $g \in A(K)$ telle que $g(z, 0) \equiv 0$. Dans K^0, on a

$$g(z, w) = \textstyle\sum_{\nu \geqslant 1} a_\nu(z) w^\nu, \qquad \text{où} \quad a_\nu(z) = \dfrac{1}{\nu!} \dfrac{\partial^\nu g(z, 0)}{\partial w^\nu}.$$

En utilisant la formule de Cauchy, on a, pour tout $r < 1$,

$$|a_\nu(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(z, r e^{-(\varphi+\psi)(z)} e^{i\theta})| \, r^{-\nu} e^{\nu(\varphi+\psi)(z)} \, d\theta.$$

Par suite,

$$|w^{\nu} a_{\nu}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(z, e^{-(\varphi+\psi)(z)} e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Ce qui montre que lorsque z tend vers le bord de $D\setminus\Gamma$, $w^{\nu} a_{\nu}(z)$ tend vers zéro puisque $e^{-(\varphi+\psi)(z)} \to 0$ et $g(z, 0) \equiv 0$, donc $w^{\nu} a_{\nu}(z) \in A(K)$.

Posons $g_{\lambda}(z, w) = g(z, \lambda w)$, $\lambda < 1$, il est clair que $g_{\lambda} \in A(K)$ et que g_{λ} converge uniformément vers g lorsque λ tend vers 1. Or

$$g_{\lambda}(z, w) = \textstyle\sum_{\nu\geqslant 1} \lambda^{\nu} a_{\nu}(z) w^{\nu}.$$

Ce qui montre qu'il suffit de déterminer X sur les fonctions du type $a_{\nu}(z)\, w^{\nu}$.

Supposons $X(z) = z_0 \in D\setminus\Gamma$. On peut écrire

$$a_{\nu}(z).w^{\nu} = (z-z_0)\left[(z-z_0)^{-1}(a_{\nu}(z)-a_{\nu}(z_0))\right] w^{\nu} + a_{\nu}(z_0)\, w^{\nu},$$

or $(a_{\nu}(z)-a_{\nu}(z_0))(z-z_0)^{-1} w^{\nu} \in A(K)$, donc

$$X(a_{\nu}(z) w^{\nu}) = a_{\nu}(z_0) X(w^{\nu}) = a_{\nu}(z) w_0^{\nu} \qquad \text{si} \quad X(w) = w_0.$$

Par suite, $X(g) = g(z_0, w_0)$.

Si $X(z_0)$ appartient au bord de $(D\setminus\Gamma)$, soit μ une mesure représentant X et portée ∂K. Comme il existe une fonction de $A(K)$ avec un pic en $(z_0, 0)$, on voit que $\mu = \varepsilon(z_0, 0)$, donc $X = \varepsilon(z_0, 0)$. Ce qui montre que K s'identifie avec Sp $A(K)$.

Nous allons donner une autre démonstration de ce dernier point qui n'utilise pas que tout point du bord de K est point pic pour $A(K)$; elle peut donner des idées pour le cas général.

Soit $K = \{(z, w); z \in \overline{H} \subset \mathbf{C}, |w| \leqslant \exp(-V(z))\}$, où H est un ouvert du plan, et V une fonction continue qui tend vers l'infini sur le bord de H; nous supposerons que K admet une base de voisinages $(\Omega_p)_{p\in N}$ qui sont des domaines d'holomorphie, nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses précédentes, le spectre de $A(K)$ s'identifie avec K.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{M}_A$ le spectre de $A(K)$, et soit π l'application $\pi : \mathscr{M}_A \to \mathbf{C}^2$, définie par $\pi(X) = (X(z), X(w))$. Puisque K admet une base de voisinages qui sont des domaines d'holomorphie, on a $\pi(\mathscr{M}_A) = K$.

Soit $X \in \mathscr{M}_A$ avec $X(z) = z_0$ et $X(w) = w_0$. Supposons $z_0 \in H$. Nous allons montrer que X est l'évaluation au point (z_0, w_0).

Pour $0 < \lambda < 1$, notons f_λ la fonction définie par $f_\lambda(z, w) = f(z, \lambda w)$, f_λ appartient à $A(K_\lambda)$, où $K_\lambda = \{(z, w);\ z \in \overline{H},\ |w| \leqslant \lambda^{-1} \exp(-V(z))\}$, et f_λ converge uniformément vers f lorsque λ tend vers 1.

(i) Si $f(z_0, w) \equiv 0$, alors $X(f) = 0$.

En effet, posons

$$D_{z_0} = \{(z_0, w);\ |w| \leqslant \exp(-V(z_0))\}$$

et

$$D_{z_0, \lambda} = \{(z_0, w);\ |w| \leqslant \lambda^{-1} \exp(-V(z_0))\}.$$

On a $f_\lambda(z_0, w) \equiv 0$ sur $D_{z_0, \lambda}$. Puisque $z_0 \in H$, on peut poser

$$g_\lambda(z, w) = (z - z_0)^{-1} f_\lambda(z, w), \qquad \text{alors} \quad g_\lambda \in A(K).$$

Par suite,

$$X(f_\lambda) = X(g_\lambda(z - z_0)) = X(z - z_0) X(g_\lambda) = 0$$

et

$$X(f) = \lim_{\lambda \to 1} X(f_\lambda) = 0.$$

(ii) Soit $f \in A(K)$, alors $X(f) = f(z_0, w_0)$.

On a vu que $X(f)$ ne dépend que de la restriction de f à D_{z_0}; or, pour $\lambda < 1$ fixé, il existe un voisinage d'holomorphie de K tel que $\Omega_{p_0} \cap \{z_0\} \times \mathbf{C} \subset D_{z_0, \lambda}$. Par suite, f_λ restreinte à $D_{z_0, \lambda}$ possède un prolongement analytique à Ω_{p_0}, c'est un corollaire du théorème B [3].

Soit $\tilde{f}_\lambda$ ce prolongement, puisque c'est une fonction holomorphe au voisinage de K, on a $X(\tilde{f}_\lambda) = \tilde{f}_\lambda(z_0, w_0)$, ([3], p. 213).

Or, d'après (i), $X(f_\lambda) = X(\tilde{f}_\lambda) = \tilde{f}_\lambda(z_0, w_0) = f_\lambda(z_0, w_0)$; d'où en passant à la limite $X(f) = f(z_0, w_0)$.

Il nous reste à examiner le cas où $X(z_0)$ appartient à la frontière de H.

D'après l'hypothèse faite sur V, si $X(z_0)$ appartient au bord de H, $X(w) = 0$.

Puisque K est fermé dans $\mathscr{M}_A$, $U = \mathscr{M}_A \mid K$ est ouvert. Or le bord de U dans $\mathscr{M}_A$ est contenu dans $H \times \{0\}$; en effet, $\pi^{-1}(K \setminus H \times (0))$ est ouvert dans $\mathscr{M}_A$, et on a vu que cet ensemble s'identifie avec $K \setminus H \times (0)$.

Soit $X \in U$, d'après le principe local du maximum [3], $|X(f)| \leqslant \|f\|_{\partial U}$, donc si $f(z, 0) \equiv 0$, $X(f) = 0$. En appliquant le théorème d'Arens, on voit que $X(f) = f(z_0, 0)$, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que l'hypothèse « K admet une base de voisinages d'holomorphie » est équivalente à $V(z) = (\sup_{i \in I} V_i)(z)$ pour tout $z \in \overline{H}$, où chaque V_i est sous-harmonique au voisinage de $\overline{H}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.). — The maximal ideals of certain function algebras, *Pacific J. Math.*, t. 8, 1958, p. 641-648.

[2] BROWDER (A.) and WERMER (J.). — Some algebras of functions on an arc, *J. Math. and Mech.*, t. 12, 1963, p. 119-130.

[3] GUNNING (R.) and ROSSI (H.). — *Analytic functions of several complex variables.* — Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1965 (*Prentice-Hall Series in modern Analysis*).

[4] KALLIN (Eva). — Fat polynomially convex sets, "*Function algebras. Proceedings of an international symposium, held at Tulane University*, 1965", p. 149-152. — Chicago, Scott, Foresman and Company, 1966.

[5] OSGOOD (W. R.). — A Jordan curve of positive area, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 4, 1903, p. 107-112.

[6] SENIČKIN (V. N.). — An example of a thick polynomially convex compact subset of the space $\mathbf{C}^2$... [en russe], *Zapiski Naučn. Semin., Leningrad. Otdel. mat. Inst. Steklov.*, t. 22, 1971, p. 199-201.

[7] STOUT (E. L.). — *The theory of uniform algebras.* — Tarrytown, Bogden and Quigley, 1971.

(Texte reçu le 25 juin 1974.)

Nessim SIBONY,
11, rue de la Glacière,
75013 Paris.