

# BULLETIN DE LA S. M. F.

GILLES TISSIER

**Quasi-analyticité et approximation sur la frontière d'un ouvert quelconque, dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 104 (1976), p. 165-174

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1976\\_\\_104\\_\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__165_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUASI-ANALYTICITÉ ET APPROXIMATION  
SUR LA FRONTIÈRE D'UN OUVERT QUELCONQUE,  
DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE  
DES FONCTIONS HARMONIQUES

PAR

GILLES TISSIER

[Nancy] .

RÉSUMÉ. — On se place dans le cadre axiomatique de M. BRELOT avec, en plus, des conditions de proportionnalité des potentiels à support ponctuel et de quasi-analyticité.

Soit  $w$  un ouvert de l'espace de base  $\Omega$  et  $v$  un ouvert contenu dans  $\Omega - \bar{w}$  et coupant chaque composante connexe de  $\Omega - w$ . On note

$$P_v = \{ p_y; y \in v \};$$

$$E = \left\{ f \in \mathbf{C}(\partial w); (\exists p \in \mathbf{P}(\Omega)) (\forall \delta \in ]0, 1[) \left( \frac{|f|}{p^\delta} \rightarrow 0 \text{ à l'infini} \right) \right\}$$

muni d'une topologie de limite inductive.

Le résultat essentiel est le suivant : Si les potentiels à support compact tendent vers zéro à l'infini, alors la densité de  $P_v$  dans  $E$  équivaut au non-effilement de  $\int (\bar{w})$  sur  $\partial w$ .

SUMMARY. — The basic space  $\Omega$  is equipped with a sheaf of harmonic functions which verify the axiomatic of M. BRELOT, with classical conditions of proportionality and of quasi-analyticity. Given an open set  $w$  in  $\Omega$ , and  $v$  an open set contained in  $\Omega - \bar{w}$  and intersecting every connected component of  $\Omega - \bar{w}$ , we put

$$P_v = \{ p_y; y \in v \};$$

$$E = \left\{ f \in \mathbf{C}(\partial w); (\exists p \in \mathbf{P}(\Omega)) (\forall \delta \in ]0, 1[) \left( \frac{|f|}{p^\delta} \rightarrow 0 \text{ at the Alexandrof point} \right) \right\};$$

$E$  is equipped with an inductive limit topology.

The main result is the following: if, for an  $y \in \Omega$ ,  $p_y \rightarrow 0$  at the alexandrof point, then the space  $P_v$  is dense in  $E$  if, and only if,  $\int (\bar{w})$  is not thin on  $\partial w$ .

### Introduction

Dans la première partie, on étend à des ouverts à frontière non compacte, certains résultats de densité dans l'espace  $H_p$  établis par A. DE LA PRADELLE et J. DENY pour des ouverts à frontière compacte ([10] et [8]) et par M. BRELOT [2].

Dans la deuxième partie, on construit un espace topologique adapté  $E_{\mathcal{F}}$  qui, dans certain cas particulier, est un sous-espace de  $H_p$ , mais dont la topologie est strictement plus fine que celle induite par  $H_p$ . On obtient alors des théorèmes d'approximation strictement plus fins que les précédents et aussi un théorème de type Runge.

### Notations et hypothèses de base

L'espace de base  $\Omega$  est supposé localement compact, non compact, connexe, localement connexe.  $\alpha$  désigne le point à l'infini.

$\omega$  est un ouvert de  $\Omega$ , et on note  $\partial\omega$  (resp.  $\bar{\omega} = \omega + \partial\omega$ ) la frontière (resp. l'adhérence) de  $\omega$  dans  $\Omega$ ;  $\partial\omega$  est supposée non compacte.

$C(X)$  est l'espace des fonctions continues sur  $X$ .

$C_0(X) = \{f \in C(X); f(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \alpha, x \in X\}$ .

$C_K(X)$  est le sous-espace des fonctions de  $C_0(X)$  qui ont leur support dans le compact  $K$ .

$K(X)$  est l'espace des fonctions de  $C_0(X)$  à support compact, muni de la topologie limite inductive de celles des  $C_K(X)$ .

On se donne sur  $\Omega$  un faisceau de fonctions harmoniques vérifiant l'axiomatique de M. BRELOT ([3], [4], [5]); on suppose que  $\Omega$  est à base dénombrable d'ouverts (ce qui, avec les hypothèses précédentes, et d'après MOKODOBZKY ([5], p. 22), implique l'axiome (3') de M. BRELOT) formée de domaines complètement déterminants, qu'il existe un potentiel strictement positif sur  $\Omega$  <sup>(1)</sup> et que, pour tout  $y \in \Omega$ , les potentiels dans  $\Omega$  de support  $\{y\}$  sont proportionnels. Ces hypothèses ont permis à M<sup>me</sup> HERVÉ [9] de définir les fonctions harmoniques adjointes à celles du faisceau donné.  $p_y$  est un potentiel normalisé de support  $\{y\}$  ([10], p. 388).

Un astérisque caractérisera l'extension aux fonctions harmoniques adjointes d'une notation définie auparavant pour les fonctions harmoniques. On supposera enfin que, pour tout  $x \in \Omega$ , les potentiels\*,  $p_x^* : y \rightarrow p_y(x)$ , sont proportionnels, et que les fonctions harmoniques\* sont de type analytique ([10], [1]).

(<sup>1</sup>)  $\Omega$  est alors dénombrable à l'infini (cf. CORNEA [7]).

On note  $\mathbf{P}$  le cône adapté des potentiels continus sur  $\Omega$ , et  $\mathbf{P}_c$  le sous-espace des potentiels de  $\mathbf{P}$  qui ont un support compact. Pour tout  $p \in \mathbf{P}$ , on définit :

$H_p(X) = \{f \in C(X); |f| \leq \lambda p \text{ sur } X \text{ pour un } \lambda \geq 0\}$ , muni de la norme  $\|f\|_{p,X} = \sup_{x \in X} |(f/p)(x)|$ ,

$H_{\mathbf{P}}(X) = \bigcup_{p \in \mathbf{P}} H_p(X)$ , muni de la topologie limite inductive de celles des  $H_p, p \in \mathbf{P}$ .

Pour  $p \in \mathbf{P}$ , on note  $o(p)_X = \{f \in C(X); |f|/p \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \alpha\}$ , muni de la norme  $\|f\|_{p,X} = \sup_{x \in X} |(f/p)(x)|$ . Soit  $v$  une partie de  $\Omega$ ; on notera  $P_v = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{y_i}; n < +\infty \text{ et } y_i \in v$ .

### 1. Approximation dans l'espace $H_{\mathbf{P}}$

1.1. On dira que le couple  $(v, \omega)$  est admissible si  $v$  est un ouvert contenu dans  $\Omega - \omega$  et coupant chaque composante connexe de  $\Omega - \omega$ .

THÉORÈME 1.1.1. — Soit  $(v, \omega)$  un couple admissible. Alors  $P_v|_{\partial\omega}$  est partout dense dans  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$  si, et seulement si,  $\mathfrak{C}(\omega)$  n'est effilé en aucun point de  $\partial\omega$ .

Démonstration. — On commence par étendre le théorème 10.1 de M<sup>me</sup> HERVÉ [9] aux mesures de Radon continues positives sur l'espace adapté  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ . On procède ensuite comme dans [10].

Considérons maintenant l'espace  $\mathbf{P}_c$  des potentiels sur  $\Omega$  continus et à support compact. Il est immédiat, d'après le principe du minimum, que

$$(\forall p_1, p_2 \in \mathbf{P}_c), (\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ et } K \text{ compact } \subset \Omega),$$

$$\lambda_1 p_1 \leq p_2 \leq \lambda_2 p_1 \text{ sur } \Omega - K.$$

Dans ces conditions, il existe un potentiel  $p \in \mathbf{P}$  qui domine à l'infini chaque élément de  $\mathbf{P}_c$ , c'est-à-dire tel que  $(\forall p \in \mathbf{P}_c) (p/\tilde{p})(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \alpha, x \in \Omega$ .

On a alors  $P_v|_{\partial\omega} \subset o(\tilde{p})_{\partial\omega}$  qui est un espace adapté au sens de CHOQUET [12], et on démontre, comme ci-dessus, que le théorème 1.1.1 est encore valable si on y remplace  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$  par  $o(\tilde{p})_{\partial\omega}$  avec  $p \in \mathbf{P}_c$ .

### 2. Étude d'un espace topologique particulier

Nous nous proposons maintenant d'étudier un espace topologique adapté qui, dans certain cas particulier, est un sous-espace de  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ , mais dont la topologie est strictement plus fine que celle induite par  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ .

2.1. L'espace  $E_{\tilde{\mathcal{C}}}(\partial\omega)$ . — Soit  $\tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$  une partie filtrante croissante de fonctions continues  $> 0$  définies sur  $\partial\omega$ .

Pour toute fonction  $p \in \tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$ , on définit  $E_p(\partial\omega) = \bigcap_{\delta \in ]0, 1[} \mathcal{O}(p^\delta)_{\partial\omega}$ . On munit  $E_p(\partial\omega)$  de la famille de normes

$$f \rightarrow \pi_\delta(f) = \sup_{x \in \partial\omega} \left| \frac{f}{p^\delta}(x) \right|.$$

On note  $E_{\tilde{\mathcal{C}}}(\partial\omega) = {}_p U_{\mathcal{C}(\partial\omega)} E_p$  muni de la topologie limite inductive de celles des  $E_p$  quand  $p$  décrit  $\tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$ .

PROPOSITION 2.1.1. — *La famille  $E_{\tilde{\mathcal{C}}}$  des  $E_p$ , lorsque  $p$  décrit  $\tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$  est une famille filtrante, croissante d'espaces de Riesz, chacun de ceux-ci étant muni d'une topologie d'espace de Fréchet.*

*Démonstration :*

1° Soit  $f$  et  $g$  dans  $E_{\tilde{\mathcal{C}}}$ ; puisque  $\tilde{\mathcal{C}}$  est filtrante croissante, on peut supposer que  $f$  et  $g$  sont dans le même  $E_p$ ; il est alors immédiat que  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont dans  $E_p$ .

2° La topologie de chaque  $E_p$  est métrisable, car la famille des normes  $\pi_\delta$ , lorsque  $\delta$  décrit  $\mathbf{Q} \cap ]0, 1[$ , définit la même topologie.

3°  $E_p$  est complet : Soit  $f_n$  une suite de Cauchy d'éléments de  $E_p$ . Pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ ,  $f_n$  s'écrit  $f_n = p^\delta h_{n,\delta}$  avec  $h_{n,\delta} \in C_0(\partial\omega)$ . On vérifie alors que  $h_{n,\delta}$  est une suite de Cauchy dans  $C_0(\partial\omega)$ .

PROPOSITION 2.1.2 :

(a) *L'espace des fonctions continues à support compact sur  $\partial\omega$  est partout dense dans  $E_p$ , et par conséquent dans  $E_{\tilde{\mathcal{C}}}$ , et l'injection canonique  $K(\partial\omega) \rightarrow E_p$  est un morphisme d'espaces topologiques qui est non strict lorsque  $\partial\omega$  n'est pas compacte.*

(b)  *$E_{\tilde{\mathcal{C}}}$  est un espace vectoriel adapté.*

*Démonstration :*

(a.1) Soit  $\mathcal{V}_0$  un voisinage de 0 dans  $E_p$ . Il existe alors  $\delta \in ]0, 1[$  (et  $\varepsilon > 0$ ) tels que la boule  $B_\delta(0; \varepsilon) = \{f \in E_p; \pi_\delta(f) < \varepsilon\}$  soit incluse dans  $\mathcal{V}_0$ .

Soit  $f \in E_p$ ; on a alors  $f = p^\delta h_\delta$  avec  $h_\delta \in C_0(\partial\omega)$ .  $K(\partial\omega)$  étant dense dans  $C_0(\partial\omega)$ , on peut trouver  $g_{\varepsilon,\delta} \in K(\partial\omega)$  telle que  $\|h_\delta - (g_{\varepsilon,\delta}/p^\delta)\| < \varepsilon$ . On a alors  $f - g_{\varepsilon,\delta} \in B_\delta(0; \varepsilon) \subset \mathcal{V}_0$ .

(a.2)  $K(\partial\omega) \rightarrow E_p$  est continue.

(a.3) L'injection canonique  $E_p \cap K(\partial\omega) \rightarrow K(\partial\omega)$  n'est pas continue lorsque  $\partial\omega$  n'est pas compacte, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit  $x_n$  une suite de points de  $\partial\omega$  telle que  $x_n \rightarrow \alpha$ . A l'aide du théorème d'Urisohn, on peut associer à chaque  $x_n$  un voisinage compact  $K_n$  ne contenant aucun autre point de la suite, et une fonction  $f_n \in C_{K_n}^+(\partial\omega)$  tels que

$$f_n(x) \leq \inf\left(p(x_n), \frac{1}{n}\right),$$

$$\forall x \in K_n, \quad f_n(x_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad p \geq \frac{1}{2} p(x_n) \quad \text{sur } K_n.$$

Il vient alors :

1°  $f_n$  tend vers zéro dans  $E_p \cap K(\partial\omega)$  : On a en effet :

$$\pi_\delta(f_n) = \sup_{x \in \partial\omega} \left| \frac{f_n(x)}{p^\delta(x)} \right| \leq 2^\delta n^{\delta-1} \rightarrow 0,$$

$$\forall \delta \in ]0, 1[ \text{, quand } n \rightarrow \infty.$$

2°  $f_n$  ne tend pas vers zéro dans  $K(\partial\omega)$  : Il suffit de trouver une mesure de Radon  $\mu$  telle que  $\mu(f_n)$  ne tende pas vers zéro.

La mesure  $\mu = \sum_n \delta_{x_n}/f_n(x_n)$  répond à la question, car  $\mu(f_n) = 1, \forall n$ .

(b) Ce point est une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 2.1.1. — Pour toute fonction continue positive  $p : \partial\omega \rightarrow R$ , l'espace  $E_p(\partial\omega)$  est un espace vectoriel adapté.

Démonstration. — Il suffit d'exhiber, pour toute fonction  $f \in E_p$ , une fonction continue  $u$  ayant les propriétés suivantes :

(a)  $|u/f|(x) \rightarrow +\infty$ , quand  $x \rightarrow \alpha, x \in \partial\omega$ .

(b)  $|u/p^\delta|(x) \rightarrow 0, \forall \delta \in ]0, 1[$ , quand  $x \rightarrow \alpha, x \in \partial\omega$ .

La fonction  $u = f \cdot \sup(|\log|f||, |\log(p)|)$  répond à la question.

Soit en effet  $f \in E_p(\partial\omega)$  et  $(x_n)$  une suite de points de  $\partial\omega$  telle que  $x_n \rightarrow \alpha$ .

On va montrer qu'on peut en extraire une sous-suite  $x_{n_k}$  telle que

$$x_{n_k} \rightarrow \alpha, \quad \left| \frac{u}{f}(x_{n_k}) \right| \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \frac{u}{p^\delta}(x_{n_k}) \right| \rightarrow 0, \quad (\delta \in ]0, 1[) \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

ce qui prouvera notre assertion. On peut se limiter à  $f \geq 0$ .

1° Supposons que  $(f/p)(x_n)$  tend vers zéro : deux cas sont alors à envisager.

(α) La suite  $p(x_n)$  n'est pas bornée : on peut alors extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que  $p(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Comme

$$\frac{u}{f} \geq |\log p|,$$

on obtient  $(u/f)(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$ .

Par ailleurs, pour tout  $\beta \in ]0, \delta[$ , il existe  $h_\beta \in C_0^+(\partial\omega)$  telle que

$$\frac{u}{p^\delta}(x_{n_k}) = h_\beta p^{\beta-\delta} \sup(|\log f|, |\log p|)(x_{n_k}) \rightarrow 0.$$

(β) La suite  $p(x_n)$  est bornée : il vient alors  $f(x_n) \rightarrow 0$  et  $(u/f)(x_n) \rightarrow +\infty$ .

On a d'autre part  $(u/p^\delta)(x_n) \rightarrow 0$ , car

$$\frac{f|\log f|}{p^\delta}(x_n) = \left(\frac{f}{p^{\delta/(1-\lambda)}}\right)^{1-\lambda} f^\lambda |\log f|(x_n) \rightarrow 0 \quad \text{si } 0 < \lambda < 1-\delta$$

$$\frac{f|\log p|}{p^\delta}(x_n) = h_\beta p^{\beta-\delta} |\log p|(x_n) \rightarrow 0 \quad \text{si } \beta > \delta, \text{ car } h_\beta \in C_0(\partial\omega).$$

2° Supposons maintenant que  $(f/p)(x_n)$  ne tend pas vers zéro : il existe alors  $\gamma > 0$ , et une sous-suite  $(x_{n_k})$  tels que  $(f/p)(x_{n_k}) \geq \gamma$  pour tout  $k$ . On en déduit alors que  $p(x_{n_k}) \rightarrow 0$ , puis que  $f(x_{n_k}) \rightarrow 0$  et donc aussi que  $(u/f)(x_{n_k}) \rightarrow \infty$ . Enfin, en procédant comme dans le (β) précédent, on vérifie que  $(u/p^\delta)(x_{n_k}) \rightarrow 0$ .

2.2. Densité de l'espace  $P_v$  dans  $E_{\mathcal{Z}}$  et dans  $C_0(\partial\omega)$ . — Nous supposons dorénavant que la constante 1 est surharmonique.

Il résulte de cette dernière hypothèse que, pour tout  $\delta \in ]0, 1[$  et pour tout  $p \in \mathbf{P}$ , la fonction  $p^\delta$  est un potentiel appartenant à  $\mathbf{P}$ .

On supposera également, dans la suite, que  $P_v|_{\partial\omega} \subset \tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$ , que  $\tilde{\mathcal{C}}(\partial\omega)$  est constituée par les traces sur  $\partial\omega$  d'une famille  $\mathcal{F}$  d'éléments de  $\mathbf{P}$ , et que, pour tout  $p \in \mathbf{P}_c$ ,  $p(x) \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow \alpha$ ,  $x \in \partial\omega$ .

Il suffit, pour que ce dernier point soit vérifié, que l'on des éléments de  $\mathbf{P}_c$  ait cette propriété (cf. la fin du n° 1.1).

PROPOSITION 2.2.1. — Si  $\mathcal{F} \subset \mathbf{P}_c$ , l'espace  $E_{\mathcal{Z}}(\partial\omega)$  est isomorphe à  $E_p(\partial\omega)$ , où  $p$  est un élément quelconque de  $\mathbf{P}_c$ .

Cela résulte du fait que les potentiels à support compact ont même comportement à l'infini (cf. la fin du n° 1.1), et qu'alors les espaces  $E_p$  ont des topologies équivalentes pour  $p \in \tilde{\mathcal{C}}$ .

**THÉORÈME 2.2.1.** — Si  $\mathcal{F} \subset \mathbf{P}_c$ , l'espace  $E_{\mathcal{Z}}(\partial\omega)$  s'injecte continûment dans  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ , et sa topologie est strictement plus fine que celle induite par  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$  (resp.  $C_0(\partial\omega)$ ).

*Démonstration :*

1°  $E_{\mathcal{Z}} \subset H_{\mathbf{P}}$ , car  $(\forall \delta \in ]0, 1[) (\forall p \in \mathbf{P}) p^\delta \in \mathbf{P}$ .

2° L'injection canonique  $E_{\mathcal{Z}} \rightarrow H_{\mathbf{P}}$  est continue. Cela résulte de la continuité des injections de la chaîne

$$E_{\mathcal{Z}} \hookrightarrow E_p \rightarrow o(p^\delta) \rightarrow H_{p^\delta} \rightarrow H_{\mathbf{P}}.$$

3° La topologie de  $E_{\mathcal{Z}}(\partial\omega)$  est strictement plus fine que celle induite par  $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$  (resp.  $C_0(\partial\omega)$ ). Il suffit, pour le prouver, d'exhiber une suite  $f_n \in E_{\mathcal{Z}}$  tendant vers zéro dans  $H_{\sqrt{p}}$ ,  $p \in \tilde{\mathcal{C}}$  (donc tendant aussi vers zéro dans  $C_0(\partial\omega)$ ) et ne tendant pas vers zéro dans  $E_{\mathcal{Z}}$ .

La suite  $f_n = n^\alpha p \cdot [\log np]^-$ ,  $p \in \tilde{\mathcal{C}}$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ , répond à la question. Il vient en effet :

( $\alpha$ )  $f_n \in E_{\mathcal{Z}} \cap H_{\mathbf{P}}$  : Cela résulte du fait que

$$\frac{f_n}{p^\delta}(x) = n^\alpha p^{1-\delta} [\log np]^- (x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow \alpha,$$

$$x \in \Omega, \quad \forall \alpha, \quad \forall n, \quad \forall \delta \in ]0, 1[.$$

( $\beta$ )  $f_n \rightarrow 0$  dans  $H_{\mathbf{P}}$  et dans  $C_0(\partial\omega)$  si  $\alpha < 1/2$  : On a

$$\left| \frac{f_n}{\sqrt{p}} \right| = |n^\alpha \sqrt{p} [\log np]^-| = |n^{\alpha-(1/2)} np [\log np]^-| \leq n^{\alpha-(1/2)} \gamma_0,$$

où  $\gamma_0$  est la constante

$$\gamma_0 = \max_{x \in \mathbf{R}^+} (|\sqrt{x} [\log x]^-|) = \max_{x \in ]0, 1[} (\sqrt{x} |\log x|).$$

On en déduit que  $f_n \rightarrow 0$  dans  $H_{\sqrt{p}}$ , donc dans  $H_{\mathbf{P}}$ , et aussi dans  $C_0(\partial\omega)$  puisque  $p$  est borné, pour tout  $\alpha < 1/2$ .

( $\gamma$ )  $f_n$  ne tend pas vers zéro dans  $E_{\mathcal{Z}}$  si  $\alpha < 1/2$  : Cela résulte de l'inégalité

$$\begin{aligned} \max_{x \in \partial\omega} \left| \frac{f_n}{p^\delta} \right| &= \left\| \frac{f_n}{p^\delta} \right\| = \| n^{\alpha-(1/2)} p^{(1/2)-\delta} \sqrt{np} [\log np]^- \| \\ &\geq n^{\alpha-(1/2)} \gamma_0 \left( \frac{u_0}{n} \right)^{(1/2)-\delta} = n^{\alpha+\delta-1} \gamma'_0, \end{aligned}$$



où  $u_0 \in ]0, 1[$  est donné par  $\gamma_0 = \sqrt{u_0} \cdot |\log u_0|$ , et où

$$\gamma'_0 = \gamma_0 \cdot \min_{\delta \in ]0, 1[} (n_0^{(1/2)-\delta}) \geq \gamma_0 \sqrt{u_0},$$

d'où l'on déduit que  $\|f_n/p^\delta\| \rightarrow \infty$  si  $\alpha + \delta - 1 > 0$ , condition qui est en particulier réalisée si  $0 < \alpha < 1/2$ , pour tout  $\delta$  tel que  $1 - \alpha < \delta < 1$ .

### THÉORÈME 2.2.2.

(a) Le théorème 1.1.1 est encore vrai si on y remplace  $H_p(\partial\omega)$  par  $E_{\mathcal{H}}(\partial\omega)$  (resp.  $C_0(\partial\omega)$ ).

(b) Soit  $\mathcal{C}(\bar{\omega}) = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i$  connexe,  $i \in I \subset N$ ; soit  $(a_i)_{i \in I}$  une suite de points  $a_i \in U_i$ ; on pose  $W = \bigcup_{i \in I} \{a_i\}$ .

Si  $\mathcal{C}(\bar{\omega})$  n'est effilé en aucun point de  $\partial\omega$ , l'espace  $\mathcal{H}(\Omega - W) = \{f \text{ harmoniques dans } \Omega - W\}$  a une trace sur  $\partial\omega$  qui est partout dense dans  $E_p$ ,  $p \in \mathbf{P}_c$ , et dans  $C_0(\partial\omega)$ .

On remarquera que l'énoncé ne nécessite pas que  $\mathcal{F} \subset \mathbf{P}_c$ .

#### Démonstration :

(a) Il résulte de la proposition 2.1.2 (b) et du théorème de G. CHOQUET que toute forme linéaire continue  $\mu \geq 0$  sur  $E_{\mathcal{H}}$  est représentable par une mesure de Radon portée par  $\partial\omega$ . On procède alors comme pour le théorème 1.1.1.

(b) Pour tout ouvert  $X \subset \Omega$  et  $p \in \mathbf{P}$ , notons  $\mathcal{H}(\bar{X})$  le sous-espace des fonctions de  $H_p(\bar{X})$ , harmoniques dans  $X$ .

Soit  $v_i$  un voisinage ouvert de  $a_i$  non effilé en ses points-frontière <sup>(2)</sup>,  $v_i \subset \Omega - \bar{\omega}$ . D'après le théorème 1.1.1, la somme directe des  $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega - v_i)$ ,  $i \in I$ , est dense dans  $E_p(\partial\omega)$ ; il suffit donc de montrer que, pour chaque  $i \in I$ ,  $\mathcal{H}(\Omega - \{a_i\})$  est dense dans  $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega - v_i)$ . Dans la suite de la démonstration, on omettra donc l'indice  $i$ .

Soit  $\omega_n$  un système fondamental de voisinages ouverts de  $a$ , non effilés en leurs points-frontière <sup>(2)</sup>, fortement décroissant, avec  $\omega_0 = v$ , et soit  $f \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega - \omega)$ . Pour tout  $n > 0$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega - \omega_{n+1})$  est dense dans  $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega - \omega_n)$  d'après [10] (théorème 6) et le principe du minimum; il existe donc une suite  $f_n \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega - \omega_n)$  telle que  $f_0 = f$ , et vérifiant :

$$|f_{n+1} - f_n| < \varepsilon_n p, \varepsilon_n > 0, \text{ sur } \Omega - \omega_n.$$

<sup>(2)</sup> De tels ouverts existent d'après G. MOKOBODZKI et D. SIBONY (cf. [10], p. 392).

En choisissant la suite  $\varepsilon_n$  telle que  $\sum \varepsilon_n \leq \varepsilon$ , on construit ainsi une suite de fonctions  $f_n$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\Omega - \{a\}$  vers une fonction  $g \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$  vérifiant :

$$|g - f_0| \leq (\sum \varepsilon_n) p \leq \varepsilon p \quad \text{sur } \Omega - \omega_0.$$

*Remarque :*

1° Si  $\bar{\omega}$  n'est effilé en aucun point de  $\partial\omega$ , l'espace  $\mathcal{H}(\Omega - W)$ , défini dans le théorème 2.2.2, est dense dans le Banach  $(\tilde{P})_{\partial\omega}$ , défini en fin du n° 1.1. (Même démonstration que pour le (b) précédent.)

2° Moyennant des adaptations immédiates des notations, tous les théorèmes de densité, établis dans cet article pour les espaces  $H_{\mathbf{p}}(\partial\omega)$ ,  $E_{\mathbb{Z}}(\partial\omega)$  . . . , s'étendent, grâce au principe du minimum, aux espaces  $\mathcal{H}(\omega) \cap H_{\mathbf{p}}(\bar{\omega})$ ,  $\mathcal{H}(\omega) \cap E_{\mathbb{Z}}(\bar{\omega})$ , . . .

3° D'après [1], les résultats obtenus dans cet article s'appliquent aux espaces de solutions d'opérateurs différentiels elliptiques du second ordre étudiés par M<sup>me</sup> Hervé [9].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARONSZAIN (N.). — Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 723-725.
- [2] BRELOT (M.). — Complément à la théorie de J. Deny, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1, 1949, p. 113-120.
- [3] BRELOT (M.). — *Séminaire de théorie du potentiel*, 2<sup>e</sup> année, 1958. — Paris, Secrétariat mathématique, 1959.
- [4] BRELOT (M.). — *Lectures on potential theory*, 2nd edition. — Bombay, Tata Institute, 1967 (*Tata Institute on Fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 19).
- [5] BRELOT (M.). — *Axiomatique des fonctions harmoniques*. — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*, Été 1965, 14).
- [6] CHOQUET (G.). — Le problème des moments, *Séminaire d'initiation à l'analyse*, 1<sup>re</sup> année, 1962, n° 4, 10 p.
- [7] CORNEA (A.). — Sur la dénombrabilité d'un espace harmonique de Brelot, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 190-191.
- [8] DENY (J.). — Systèmes totaux de fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.
- [9] HERVÉ (R.-M.). — Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-471 (*Thèse Sc. math., Paris*, 1961).

- [10] DE LA PRADELLE (A.). — Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 17, 1967, n° 1, p. 383-399.
- [11] DE LA PRADELLE (A.). — A propos du mémoire de G. F. Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, n° 2, p. 355-370.
- [12] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). — Cônes et espaces de fonctions continues, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 506-509.
- [13] VINCENT-SMITH (C. F.). — Uniform approximation of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, n° 2, p. 339-353.

(Texte reçu le 18 décembre 1974.)

Gilles TISSIER,  
I.U.T. Informatique,  
2 bis, boulevard Charlemagne,  
54000 Nancy.