BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur une formule d'analyse

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 62-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__62_0>

Sur une formule d'Analyse; par M. Halphen.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La formule dont il s'agit ici est la suivante :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right)f^{(n)}(x) - \frac{n}{1}\,\frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n-1)}\\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{x^2}\,\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]^{(n-2)} + \ldots\\ &+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,\frac{1}{x^k}\,\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle, bien entendu, $\varphi^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)$ désigne une dérivée d'ordre k prise par rapport à $\frac{1}{x}$, et $\left[\frac{f(x)}{x^k}\right]^{(n-k)}$ une dérivée d'ordre $(n-k)$ prise par rapport à x.

Un des moyens les plus simples de vérifier la formule (1) me paraît être le suivant.

On peut, sans nuire à la généralité, supposer

$$f(x) = \sum_m \mathrm{A}\,x^m,\quad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_\mu \mathrm{B}\left(\frac{1}{x}\right)^\mu.$$

A cause de la forme doublement linéaire du second membre de (1), il suffit alors de vérifier l'identité pour

$$f(x) = x^m,\quad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^\mu.$$

Pour ce dernier cas, la formule (1) devient

$$\begin{aligned}&\frac{(m-\mu)(m-\mu-1)\ldots(m-\mu-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}\\ &= 1 - \frac{n}{1}\,\frac{\mu}{m} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\mu(\mu-1)}{m(m-1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{m(m-1)(m-2)} + \ldots,\end{aligned}$$

et le lecteur trouvera sans peine la démonstration de cette identité.

C'est en étudiant les dérivées successives de la fonction $x^m e^{\frac{1}{x}}$

que j'ai été conduit à la formule (1). Elle fournit effectivement ces dérivées, et l'on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^m e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \Big[& x^{m-2n} - \frac{n}{1}(m-n+1)x^{m-2n+1} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}(m-n+1)(m-n+2)x^{m-2n+2} - \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

Un cas particulier remarquable est celui où, m étant entier positif, le nombre n est égal à $(m+1)$. Pour ce cas, on a

$$(3)\qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Il est facile de démontrer directement cette formule (3). J'en indique ici deux démonstrations.

La première est fondée sur l'emploi de la série de Lagrange. On trouve effectivement

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left[1 - \frac{t}{x} + \frac{1}{1.2}\frac{t^2}{x^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\frac{t^{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots\right],$$

développée de cette autre manière :

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{t}{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - \ldots - \frac{t^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)\ldots.$$

Si l'on applique la série de Lagrange à la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, composée avec la racine z de l'équation

$$z = x + tz,$$

la comparaison des deux développements donne la formule (3).

La seconde démonstration consiste à observer que la dérivée d'ordre n du produit $x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$ est de la forme suivante :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\varphi(x)}{x^{n+1}},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier. En développant suivant les puissances décroissantes de x le premier membre, on reconnaît que ce polynôme se réduit à $(-1)^n$.

En intégrant p fois de suite les deux membres de la formule (3), on obtient

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\, dx^p = (-1)^n \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right).$$

La formule (2) fournit l'expression de la dérivée qui figure au second membre, et l'on a ainsi

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^m}\, dx^n = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \Big[x^{2n-m} - \frac{n}{1}(m-n-1)x^{2n-m+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}(m-n-1)(m-n-2)x^{2n-m+2} - \ldots \Big],$$

c'est-à-dire, sous forme finie, l'intégrale $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x^m} e^{\frac{1}{x}}$, quand m est un nombre entier au moins égal à 2, et n inférieur à m. En d'autres termes, la formule (2) s'applique aux valeurs négatives de n et de m, sous ces dernières réserves.

L'identité (3) conduit aisément à cette conséquence que l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^{2n}} y \tag{4}$$

a pour intégrale générale

$$y = \Sigma A x^{n-1} e^{\frac{\alpha}{x}},$$

les coefficients α étant les racines de l'équation $(-\alpha)^n = 1$.