

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL BERGER

## **Une inégalité universelle pour la première valeur propre du laplacien**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 107 (1979), p. 3-9

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1979\\_\\_107\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__3_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE INÉGALITÉ UNIVERSELLE  
POUR LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU LAPLACIEN

PAR

MARCEL BERGER (\*)

[C.N.R.S.]

RÉSUMÉ. — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, et  $r$  un nombre réel inférieur au rayon d'injectivité. Pour tout point  $m$  de  $M$ , désignons par  $\lambda_1(m, r, g)$  la première valeur propre du problème de Dirichlet pour le laplacien  $\Delta$  de  $(M, g)$  et la boule métrique  $B(m, r)$  de centre  $m$  et de rayon  $r$ . On démontre dans ce travail qu'il existe une constante  $a(n)$  ne dépendant que de la dimension  $n$  de  $M$  telle que, pour tout  $(M, g)$  et tout  $r$ , il existe un  $m$  tel que  $r^{n+2} \lambda_1(m, r, g) < a(n) \text{Vol}(g)$ , où  $\text{Vol}(g)$  désigne le volume total de  $(M, g)$ .

ABSTRACT. — Let  $(M, g)$  be a compact riemannian manifold and  $r$  any real number smaller than the injectivity radius of  $(M, g)$ . For every point  $m$  in  $M$  let  $\lambda_1(m, r, g)$  denote the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the laplacian  $\Delta$  of  $(M, g)$  and the metric ball  $B(m, r)$  of center  $m$  and radius  $r$ . We prove that there exists a constant  $a(n)$  depending only on the dimension  $n$  of  $M$  such that for every  $(M, g)$  and any  $r$  there exists an  $m$  with  $r^{n+2} \lambda_1(m, r, g) < a(n) \text{Vol}(g)$ , where  $\text{Vol}(g)$  is the total volume of  $(M, g)$ .

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ ; pour tout point  $m$  de  $M$  et tout réel  $r$ , on désigne par  $B(m, r)$  la boule métrique ouverte de centre  $m$  et de rayon  $r$ , par  $B'(m, r)$  la boule fermée correspondante et par  $S(m, r)$  leur sphère frontière.

Désormais  $r$  sera toujours strictement inférieur au rayon d'injectivité  $\text{Inj}(g)$  de  $(M, g)$ ; alors  $B'(m, r)$  est une bonne variété à bord, et on peut donc définir  $\lambda_1(m, r, g)$  la première valeur propre du problème de

(\*) Texte reçu le 25 septembre 1978.

Marcel BERGER, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, Mathématiques, Tour 45-55, 5° étage, Université de Paris-VII, 2, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05.

Dirichlet pour  $B'(m, r)$  et le laplacien  $\Delta$  de  $(M, g)$  sur  $B'(m, r)$ . Pour  $r$  fixé, la fonction  $m \mapsto \lambda_1(m, r, g)$  est continue, donc admet un minimum sur  $M$  qui est strictement positif, soit

$$1 \quad \lambda_1(r, g) = \inf \{ \lambda_1(m, r, g); m \in M \}.$$

On a alors la proposition suivante :

**2. PROPOSITION.** — *Pour tout entier  $n$ , il existe un réel  $a(n)$  strictement positif tel que, pour toute variété compacte de dimension  $n$ , pour toute structure riemannienne  $g$  sur  $M$ , et pour tout réel  $r$  strictement inférieur au rayon d'injectivité  $\text{Inj}(g)$  de  $(M, g)$ , on a*

$$\lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} < a(n) \frac{\text{Vol}(g)}{r^{n+2}},$$

où  $\text{Vol}(g)$  désigne le volume de la variété riemannienne  $(M, g)$ .

La valeur la plus intéressante pour  $r$  nous semble être  $r = \text{Inj}(g)/2$ ; en effet, lorsque  $r$  est très petit,  $\lambda_1(r, g)$  tend vers l'infini, et l'inégalité obtenue a peu d'intérêt. De même, lorsque  $r$  tend vers  $\text{Inj}(g)$ , la valeur de  $\lambda_1(r, g)$  peut tendre vers zéro, et l'inégalité obtenue est alors franchement mauvaise. C'est pourquoi nous poserons, pour une variété riemannienne  $(M, g)$ ,

$$3 \quad \lambda_1^*(g) = \lambda_1\left(\frac{\text{Inj}(g)}{2}, g\right).$$

D'où le corollaire suivant :

**4. COROLLAIRE.** — *Avec les mêmes quantificateurs que dans la proposition 2, il existe une constante universelle strictement positive  $b(n)$  telle que*

$$\lambda_1^*(g) + \frac{\pi^2}{\text{Inj}^2(g)} < b(n) \frac{\text{Vol}(g)}{\text{Inj}^{n+2}(g)}.$$

Il est intéressant de se demander si l'on a toujours l'inégalité

$$5 \quad \lambda_1^*(g) \geq \lambda_1(g),$$

où  $\lambda_1(g)$  désigne la première valeur propre non nulle du laplacien  $\Delta$  sur la variété sans bord  $M$ . Il existe toujours un cas où 5 est vraie, c'est celui ci-dessous; ce qui fournit donc dans ce cas, pour  $\lambda_1(g)$ , une borne universelle, universelle en ce sens par exemple qu'elle ne dépend pas de bornes pour la courbure de  $(M, g)$ .

**6. PROPOSITION.** — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte admettant une isométrie involutive sans point fixe. Alors on a  $\lambda_1(g) \leq \lambda_1^*(g)$  et en particulier

$$\lambda_1(g) + \frac{\pi^2}{\text{Inj}^2(g)} < b(n) \frac{\text{Vol}(g)}{\text{Inj}^{n+2}(g)}.$$

Dans la démonstration de la proposition **2** nous n'avons pas étudié de près la valeur de  $a(n)$ , car en effet la méthode utilisée ne permet pas, à l'heure actuelle, d'obtenir une constante optimale; voir les négligences strictes de cette démonstration.

*Démonstration de la proposition 2.* — Elle est directement inspirée de l'appendice D de [BESSE], dont nous utilisons les notations, définitions et résultats. Le rayon  $r$  étant fixé et strictement inférieur à  $\text{Inj}(g)$ , l'idée est d'utiliser pour toutes les boules  $B(m, r)$  le principe du minimum pour  $\lambda_1(m, r, g)$  avec la fonction test

$$7 \quad k_m : v \mapsto \cos \frac{\pi \cdot d(m, v)}{2r}$$

(où  $d$  désigne la métrique de  $(M, g)$ ), et de faire ensuite la moyenne de ce principe du minimum pour la mesure canonique  $d\mu$  de  $(M, g)$  et  $m$  parcourant  $M$ .

Puisque la fonction  $k_m$  est bien nulle sur  $S(m, r)$ , et d'après la définition **1**, on a donc

$$8 \quad \int_{B(m, r)} |dk_m|^2 d\mu \geq \lambda_1(r, g) \int_{B(m, r)} k_m^2 d\mu,$$

d'après le très classique principe du minimum (cf. par exemple [B-G-M], page 186), pour le cas sans bord, la démonstration étant la même dans le cas où il y a un bord). De **8** on déduit donc, par intégration en  $m$  sur  $M$ , que

$$9 \quad \int_{m \in M} \int_{B(m, r)} |dk_m|^2 d\mu \otimes d\mu \\ \geq \lambda_1(r, g) \int_{m \in M} \int_{B(m, r)} k_m^2 d\mu \otimes d\mu.$$

Nous introduisons, pour calculer dans **9**, la fonction  $f(u, x)$  du volume en coordonnées polaires de centre  $m$  de  $(M, g)$ , soient  $(u, x) \in U_m M \times \mathbf{R}_+$ ,

définies sur le produit de la demi-droite réelle positive par la sphère  $U_m M$  des vecteurs unités tangents à  $M$  en  $m$ . La définition de  $f(u, x)$  étant celle de l'égalité de mesures  $d\mu = f(u, x) d\sigma \circ dx$ , où  $dx$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ , et  $d\sigma$  la mesure canonique sur  $U_m M$ .

Alors, d'après la définition 7 pour  $k_m$ , et en posant  $y = d(m, \cdot)$ , on obtient :

$$\int_{B(m, r)} |dk_m|^2 d\mu = \frac{\pi^2}{4r^2} \int_{u \in U_m M} \int_{y=0}^{y=r} \sin^2 \frac{\pi y}{2r} f(u, y) dy \otimes d\sigma.$$

$$\int_{B(m, r)} k_m^2 d\mu = \int_{u \in U_m M} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(u, y) dy \otimes d\sigma.$$

Comme la mesure canonique  $d\mu_1$  du fibré unitaire total  $UM$  de  $(M, g)$  peut s'écrire (cf. [BESSE], 1.123)  $d\mu_1 = d\sigma \circ d\mu$ , l'inégalité 9 devient

$$\frac{\pi^2}{4r^2} \int_{UM} \int_{y=0}^{y=r} \sin^2 \frac{\pi y}{2r} f(u, y) dy \otimes d\mu_1$$

$$\geq \lambda_1(r, g) \int_{UM} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(u, y) dy \otimes d\mu_1.$$

On remplace  $\sin^2$  par  $1 - \cos^2$ , et on remarque que l'on a toujours

$$\int_{B(m, r)} d\mu \leq \text{Vol}(g), \text{ d'où}$$

$$10 \quad \frac{\pi^2}{4r^2} \text{Vol}^2(g)$$

$$\geq \left( \lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} \right) \int_{UM} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(u, y) dy \otimes d\mu_1.$$

Comme dans [BESSE] (page 240), nous intégrons maintenant l'inégalité 10 sur  $(0, r)$  pour la mesure de Lebesgue  $dx$ , et utilisons l'invariance de  $d\mu_1$  sous le flot géodésique  $\zeta$  de  $UM$  pour obtenir :

$$11 \quad \frac{\pi^2}{4r^2} \text{Vol}^2(g) \int_{x=0}^{x=r} dx = \frac{\pi^2}{4r} \text{Vol}^2(g)$$

$$\geq \left( \lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} \right) \int_{UM} \int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx \otimes d\mu_1.$$

**12. LEMME.** — Pour tout  $r$  et tout élément de volume en coordonnées polaires et le flot géodésique  $\zeta$  d'une variété riemannienne, on a une inégalité universelle

$$\int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx > c(n) r^{n+1},$$

où la constante  $c(n)$  ne dépend que de la dimension  $n$  de la variété considérée.

Si l'on n'avait pas de cosinus, on serait dans le cas de l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathbf{13} \quad \int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=r} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx &> \int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=\pi-x} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx \\ &\geq \int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=\pi-x} \sin^{n-1} y dy \otimes dx = d(n) r^{n+1}, \end{aligned}$$

démontrée dans [BESSE], comme conjugaison de **D.14** et de l'inégalité de Kazdan **E.2** (et compte tenu d'une « dénormalisation » de  $\pi$  en  $r$  quelconque).

Or nous pouvons nous ramener à **13** ainsi; fixons un  $\varepsilon$  quelconque dans  $(0, 1)$ ; comme cosinus est une fonction décroissante sur  $(0, \pi/2)$  et que nous réduisons le domaine d'intégration, on a bien

$$\begin{aligned} &\int_{x=0}^{x=r} \int_{y=0}^{y=r} \cos^2 \frac{\pi y}{2r} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx \\ &> \cos^2 \frac{\pi \varepsilon}{2} \int_{x=0}^{x=\varepsilon r} \int_{y=0}^{y=\varepsilon r} f(\zeta^x(u), y) dy \otimes dx \\ &> d(n) \varepsilon^{n+1} r^{n+1} \cos^2 \frac{\pi \varepsilon}{2} = c(n) r^{n+1}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme **12**. Nous ne cherchons pas le meilleur choix possible pour  $\varepsilon$ , vues les nombreuses négligences que nous avons déjà commises. ■

On déduit maintenant de **11** et du lemme **12** que

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4r} \text{Vol}^2(g) &> \left( \lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} \right) \text{Vol}(UM) d(n) r^{n+1} \\ &= \left( \lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} \right) \text{Vol}(g) \beta(n-1) d(n) r^{n+1}, \end{aligned}$$

où  $\beta(n-1)$  désigne le volume de la sphère standard  $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$  (cf. [BESSE], **1.124**). Ce qui achève la démonstration de la proposition **2**. ■

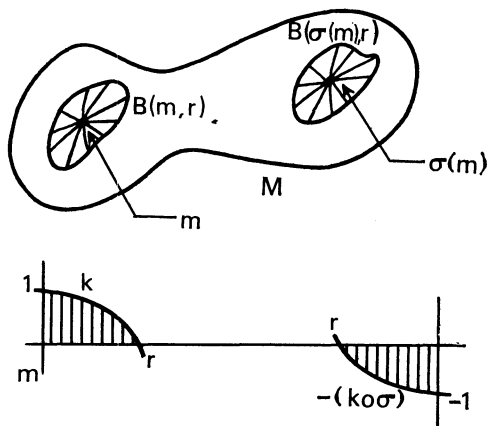
*Démonstration de la proposition 6.*

**14. LEMME.** — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte admettant une isométrie involutive  $\sigma$  sans point fixe. Alors, pour tout point  $m$  de  $M$ , on a  $d(m, \sigma(m)) \geq \text{Inj}(g)$ .



Soit en effet  $\gamma$  une plus courte géodésique de  $m$  à  $\sigma(m)$ ; alors  $\sigma(\gamma)$  est aussi une plus courte géodésique de  $m$  à  $\sigma(m)$ . Si  $\gamma = \sigma(\gamma)$ , le point milieu de  $\gamma$  serait un point fixe de  $\sigma$ , donc  $\gamma \neq \sigma(\gamma)$ , ce qui implique que  $\sigma(m)$  appartient au cut-locus de  $m$ , et donc que  $d(m, \sigma(m)) \geq \text{Inj}(g)$  (cf. par exemple [BESSE], section 5.B). ■

Démontrons maintenant la proposition 6. Posons dorénavant  $r = \text{Inj}(g)/2$ , et soit  $m$  un point de  $M$  tel que  $\lambda_1(m, r, g) = \lambda_1^*(g)$ . Soit enfin  $k$  la fonction  $B(m, r) \rightarrow \mathbf{R}$  qui vérifie  $\Delta k = \lambda_1^*(g) k$  et s'annule



sur  $S(m, r)$ . D'après la définition de  $r$  et le lemme 14, on a  $B(m, r) \cap B(\sigma(m), r) = \emptyset$ ; on peut donc définir une fonction  $\tilde{k}$  sur tout  $M$  par

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k \quad \text{sur } B(m, r), \\ \tilde{k} &= -(k \circ \sigma) \quad \text{sur } B(\sigma(m), r), \\ \tilde{k} &= 0 \quad \text{sur } M - ((B(m, r) \cup B(\sigma(m), r))). \end{aligned}$$

Et comme  $\sigma$  est une isométrie, on a  $\Delta(k \circ \sigma) = \lambda_1^*(g)(k \circ \sigma)$ , puis  $\|d\tilde{k}\|^2 = \lambda_1^*(g)\|\tilde{k}\|^2$ , et enfin

$$\begin{aligned} \int_M \tilde{k} d\mu &= \int_{B(m,r)} k d\mu + \int_{B(\sigma(m),r)} (-(k \circ \sigma)) d\mu \\ &= \int_{B(m,r)} k d\mu - \int_{B(m,r)} k d\mu = 0. \end{aligned}$$

Le principe du minimum montre donc  $\lambda_1^*(g) \geq \lambda_1(g)$ , d'où la proposition 6. ■

#### BIBLIOGRAPHIE

- [BESSE] BESSE (Arthur L.). — *Manifolds all of whose geodesics are closed.* — Berlin, Springer-Verlag, 1978 (*Ergebnisse der Mathematik*, 93).
- [B-G-M] BERGER (M.), GAUDUCHON (P.) et MAZET (E.). — *Le spectre d'une variété riemannienne.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 194).