BULLETIN DE LA S. M. F.

ERIC AMAR
ALINE BONAMI

Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar{\partial}$

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 23-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__23_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 23-48.

MESURES DE CARLESON D'ORDRE α ET SOLUTIONS AU BORD DE L'ÉQUATION $\bar{\partial}$

PAR

ERIC AMAR et ALINE BONAMI (*)

[Universités d'Orléans et d'Orsay]

RÉSUMÉ. — Nous définissons des mesures de Carleson généralisées, dont la balayée appartient à L^p, à $L^{p,\infty}$, ou à des espaces de Lipschitz, et montrons que de telles mesures peuvent être obtenues par interpolation entre mesures bornées et mesures de Carleson.

Nous en déduisons des conditions suffisantes sur w, qui sont en un certain sens les meilleures possibles, pour que l'équation $\bar{\partial}u = w$ dans un domaine strictement pseudo-convexes possède une solution au bord dans L^p, $L^{p,\infty}$, ou une solution lipschitzienne.

ABSTRACT. — We define generalized Carleson measures whose "balayée" belongs to L^p, $L^{p,\infty}$, or a Lipschitz space. We prove that such measures may be obtained by interpolating between bounded measures and Carleson measures.

We deduce sufficient conditions on w, in order that the $\bar{\partial}$-equation $\bar{\partial}u = w$ in a strictly pseudoconvex domain has a boundary solution in L^p, $L^{p,\infty}$, or in a Lipschitz space.

1. Introduction

Rappelons qu'une mesure positive w dans le disque unité $D = \{ z \in \mathbf{C};\ |z| < 1 \}$ est appelée mesure de Carleson s'il existe une constante A telle que, quel que soit l'intervalle $I \subset \partial D$,

$$w(\{ z = re^{i\theta} \in D;\ e^{i\theta} \in I,\ 0 < 1-r < |I| \}) \leqslant A\,|I|. \tag{1.1}$$

Il est bien connu que, si w est une mesure de Carleson, quelle que soit la fonction $f \in H^1(\partial D)$ de prolongement harmonique u dans D,

$$\int_D |u(z)|\, dw(z) \leqslant C\, \|f\|_{H^1(\partial D)}. \tag{1.2}$$

(*) Texte reçu le 2 juin 1978.

Eric AMAR et Mme Aline BONAMI, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45045 Orléans et Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. (296) Analyse harmonique, Mathématique (Bât. 425) 91405 Orsay Cedex.

C'est dire, par dualité, que la balayée de Poisson de w, c'est-à-dire la fonction g sur ∂D définie par

$$g(e^{i\theta}) = \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, dw(re^{i\varphi}),$$

appartient à la classe BMO.

Il était naturel de se demander ce que l'on pouvait dire des mesures w satisfaisant à une condition semblable à (1.1) le second membre étant élevé à la puissance α, ou bien, réciproquement, de se demander à quelle condition sur w sa balayée appartient à L^p, $1 < p < \infty$.

Plus généralement, soit X un espace de nature homogène au sens de R. COIFMAN et G. WEISS [1], muni de la pseudo-distance ρ et de la mesure μ. Comme eux, nous appelons

$$B(x, t) = \{y \in X;\ \rho(x, y) < t\},$$

et supposons qu'il existe A tel que, quels que soient $x \in X$ et $t > 0$,

$$\mu(B(x, 2t)) \leqslant A\,\mu(B(x, t)).$$

Étant donné un ouvert $\Omega \subset X$, on note $T(\Omega)$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^+ \times X$ défini par

$$T(\Omega) = \{(t, x);\ B(x, t) \subset \Omega\}.$$

DÉFINITION. — On dit que la mesure w sur $\mathbf{R}^+ \times X$ satisfait à *une condition de Carleson d'ordre* α si, quel que soit l'ouvert $\Omega \subset X$,

$$|w|(T(\Omega)) \leqslant C[\mu(\Omega)]^\alpha.$$

L'espace des mesures de Carleson d'ordre α est noté V^α.

Afin d'étendre les résultats à d'autres noyaux que le noyau de Poisson, nous appelons *noyau sur* X toute fonction $(t, x, y) \to P_t(x, y)$ mesurable sur $\mathbf{R}^+ \times X^2$ telle que, quel que soit $1 \leqslant q \leqslant \infty$ et $x \in X$, $P_t(x, .)$ appartienne à $L^q(\mu)$.

Nous nous intéressons tout d'abord au cas où $\alpha < 1$. Nous montrons que, si P_t est un noyau raisonnable, la balayée de w par le noyau P_t, c'est-à-dire la fonction $y \to \int P_t(x, y)\, dw(t, x)$, appartient à l'espace $L^{p, \infty}$, avec $1/p = 1\text{-}\alpha$, espace qui apparaît donc comme l'analogue, pour l'indice p, de l'espace BMO. Nous montrons que, si l'on veut que la balayée de w appartienne à L^p, il faut que w appartienne à un espace plus petit, W^α.

Puis nous identifions V^α et W^α à des interpolés entre l'espace des mesures bornées et l'espace des mesures de Carleson.

Lorsque $\alpha = 1$, la balayée de w, si P_t est un noyau convenable, est une fonction de BMO. Lorsque $\alpha > 1$, nous montrons qu'elle satisfait à une condition de Lipschitz. Dans le disque unité, DUREN [2] s'était déjà intéressé à de telles mesures, et avait montré une inégalité semblable à (1.2), la norme dans H^1 étant remplacée par la norme dans H^p, avec $\alpha = 1/p$. Notre résultat dans ce cas particulier, est évidemment le dual du sien.

Nous montrons ensuite que, réciproquement, toute fonction de $L^{p,\infty}$ s'écrit comme balayée d'une mesure de Carleson d'ordre α, $\alpha = 1 - 1/p$, au moins lorsque X est $\mathbf{R}^n$, et P_t le noyau de Poisson. De même, toute fonction de BMO est balayée de Poisson d'une mesure de Carleson. Ce résultat, trouvé dans le même moment et par d'autres méthodes par P. JONES, nous paraît nouveau. Il utilise un prolongement de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ en une fonction F qui est $\mathscr{C}^\infty$ et tel que, quel que soit β, $t^{|\beta|-1} \, | D^\beta F | \, dt \, dx$ soit une mesure de Carleson d'ordre α si $f \in L^{p,\infty}$, une mesure de Carleson si $f \in$ BMO. Notre construction de F utilise une méthode de VAROPOULOS. Le problème reste ouvert de trouver un moyen linéaire d'associer F à f.

Dans une deuxième partie (§ 6), nous utilisons la théorie esquissée ici pour donner des estimations sur les solutions de $\bar{\partial}$. Soit Ω un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, de frontière de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 2$: si w est une $(0, 1)$-forme dans Ω telle que $\bar{\partial} w = 0$, on s'intéresse aux solutions à la frontière $\partial\Omega$ de l'équation $\bar{\partial} u = w$. Dans [8], H. SKODA montre qu'il existe une solution qui s'exprime comme balayée de w par des noyaux qu'il construit explicitement. Il nous suffit de montrer que ces noyaux satisfont aux hypothèses données dans la première partie pour en déduire que la solution de Skoda appartient à $L^{p,\infty}$, à L^p, ou bien à l'espace Γ^β défini par E. STEIN, suivant que certains coefficients associés à w sont des mesures de Carleson d'ordre α, $\alpha = 1 - (1/p)$, ou bien des mesures de l'espace W^α, ou bien des mesures de Carleson d'ordre α, $\alpha = 1 + (\beta/2n)$.

2. Mesures de Carleson d'ordre α, $\alpha < 1$, et mesures dont la balayée est dans L^p.

Soit P_t un noyau sur X. Quelle que soit la fonction $f \in L^q(\mu)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$P_t f(x) = \int P_t(x, y) f(y) \, d\mu(y)$$

est bien défini, ainsi que la fonction maximale associée

$$M f(x) = \sup_{(t,y) \text{ tels que } \rho(x,y) \leq t} |P_t f(y)|.$$

On dira que P_t satisfait à la condition (H1) si :

(H1) *quel que soit* $1 < q < \infty$, *il existe une constante* C_q *telle que, pour tout* $f \in L^q(\mu)$,

$$\|Mf\|_q \leqslant C_q \|f\|_q.$$

La condition (H1) est en particulier satisfaite par le noyau P_t^0, défini par

$$P_t^0(x, y) = \frac{1}{\mu[B(x, t)]} \chi_{B(x,t)}(y).$$

En effet, si $f \geqslant 0$, $M^0 f$ coïncide, à une constante près, avec la fonction maximale ordinaire dont on sait qu'elle définit un opérateur borné dans L^q, $q > 1$.

D'autres exemples de noyaux satisfaisant à la condition (H1) sont donnés par le noyau de Poisson sur $\mathbf{R}^n$ ainsi que les noyaux de Poisson conjugés, le noyau de Poisson-Szegö et le noyau de Szegö sur le bord de la boule dans $\mathbf{C}^n$.

THÉOREME 1. — *Soit* w *une mesure positive sur* $\mathbf{R}^+ \times X$ *satisfaisant à une condition de Carleson d'ordre* α, $\alpha < 1$. *Alors, quel que soit le noyau* P_t *satisfaisant à la condition* (H1) *et quelle que soit la fonction* $f \in L^{q,1}(\mu)$ *avec* $q = 1/\alpha$,

$$\int |P_t f(x)| \, dw(t, x) \leqslant C \|f\|_{q,1}.$$

Réciproquement, si une telle inégalité a lieu pour le noyau P_t^0 *et pour toute fonction* $f \in L^{q,1}$, w *est une mesure de Carleson d'ordre* α.

Posons $F(t, x) = P_t f(x)$, et $\Omega_\lambda = \{x ; Mf(x) > \lambda\}$. Par définition de Mf, $\{|F| > \lambda\} \subset T(\Omega_\lambda)$, et donc

$$w(|F| > \lambda) \leqslant C[\mu(\Omega_\lambda)]^{1/q} = C\mu(Mf > \lambda)^{1/q}.$$

Si l'on note g^* la réarrangée décroissante de g, c'est dire que

$$F^*(\lambda) \leqslant (Mf)^*(c\lambda^q).$$

En particulier,

$$\int_0^{\infty} [F^*(\lambda)]\, d\lambda \leqslant \int_0^{\infty} (Mf)^*(c\lambda^q)\, d\lambda$$
$$\leqslant C\int_0^{\infty} (Mf)^* \lambda^{1/q}\frac{d\lambda}{\lambda} = C\| Mf\|_{q,1} \leqslant C'\| f\|_{q,1}.$$

L'inégalité est démontrée.

La réciproque est une conséquence immédiate du fait que, si $f = \chi_\Omega$, $P_t^0 f(x) \geqslant \delta$ sur $T(\Omega)$.

Par dualité, le théorème 1 exprime que, *quelle que soit la mesure* $w \in V^\alpha$, *il existe une fonction dans* $L^{p,\infty}(\mu)$, *avec* $1/p = 1-\alpha$, *fonction que nous noterons* $P*w$ *et appellerons balayée de* w *par le noyau* P_t, *telle que, quel que soit* $f \in L^{q,1}(\mu)$,

$$\int_{\mathbf{R}^+\times X} P_t f(x)\, dw(t, x) = \int_X f(y)\, P^* w(y)\, d\mu(y).$$

Lorsqu'en particulier w est bornée et $\sup_{t,x}\int |P_t(x, y)|\, d\mu(y) < \infty$,

$$P^* w(y) = \int_{\mathbf{R}^+\times X} P_t(x, y)\, dw(t, x).$$

Nous verrons au paragraphe 5 que, réciproquement, toute fonction de $L^{p,\infty}(\mu)$, au moins dans des cas particuliers, s'écrit comme balayée d'une mesure $w \in V^\alpha$, $\alpha = 1-(1/p)$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des mesures w telles que $P*w$ appartienne à $L^p(\mu)$.

THÉORÈME 2. — *Soit* w *une mesure positive sur* $\mathbf{R}^+ \times X$. *Alors si la fonction*

$$S_w(y) = \int P_t^0(x, y)\, dw(t, x)$$

appartient à $L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$, *quel que soit le noyau* P_t *satisfaisant à l'hypothèse* (H1) *et quelle que soit la fonction* $f \in L^q(\mu)$ $((1/q)+(1/p) = 1)$,

$$\int |P_t f(x)|\, dw(t, x) \leqslant C\| f\|_q.$$

Par hypothèse, l'inégalité

$$\int |P_t^0 f(x)|\, dw(t, x) \leqslant C \|f\|_q,$$

a lieu quelle que soit $f \in L^q(\mu)$. Il suffit alors de remarquer que

$$|P_t f(x)| \leqslant M f(y) \quad \text{quel que soit } y \in B(x, t),$$

et donc

$$|P_t f(x)| \leqslant \frac{1}{\mu[B(x, t)]} \int_{B(x, t)} M f(y)\, d\mu(y) = P_t^0(M f)(x).$$

Remarque 1. — $S_w(y)$ est, à une constante près, égal à

$$\int_{\Gamma(y)} \frac{1}{\mu[B(y, t)]}\, dw(t, x),$$

où $\Gamma(y)$ est le cône $\{(t, x); \rho(x, y) \leqslant t\}$. Lorsque w est la mesure $t\,|\nabla u|^2\, dt\, dx$ dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$, où u est l'intégrale de Poisson d'une fonction f de $\mathbf{R}^n$, on reconnaît en S_w le carré de la fonction de Lusin $S(f)$. Les fonctions $g_\lambda^2(f)$ (*voir* [11] p. 86) s'identifient, elles, à des balayées de w par d'autres noyaux P_t.

Remarque 2. — La condition $w \in V^\alpha$ n'est évidemment pas suffisante pour que la fonction S_w appartienne à L^p $(1/p = 1-\alpha)$. Lorsque $X = \mathbf{R}$, il suffit de considérer la mesure $t^{\alpha-1}\, dt\, d\delta_0$, dont la balayée par P_t^0 est $|x|^{-1+\alpha}$.

DÉFINITION. — *On appelle W^α l'espace des mesures w sur $\mathbf{R}^+ \times X$ telles que la fonction d'aire $S_{|w|}$ associée à $|w|$ appartienne à L^p, $1/p = 1-\alpha$.*

3. Identification des espaces V^α et W^α (ou $\alpha < 1$) à des interpolés entre espaces de mesures bornées et espaces de mesures de Carleson

THÉORÈME 3.

(i) *l'espace V^α s'identifie avec l'interpolé réel $(V^0, V^1)_{\alpha, \infty}$;*

(ii) *l'espace W^α s'identifie avec l'interpolé réel $(V^0, V^1)_{\alpha, p}$ et l'interpolé complexe $(V^0, V^1)_\alpha$.*

Montrons tout d'abord les trois inclusions

$$(V^0, V^1)_{\alpha, \infty} \subsetneq V^\alpha, \qquad (V^0, V^1)_{\alpha, p} \subsetneq W^\alpha, \qquad (V^0, V^1)_\alpha \subsetneq W^\alpha.$$

Soit g une fonction de module 1 sur $T(\Omega)$, et Φ la forme linéaire qui à w fait correspondre $\int_{T(\Omega)} g\,dw$; Φ est de norme 1 dans $(V^0)^*$, et de norme inférieure ou égale à $\mu(\Omega)$ dans $(V^1)^*$ puisque

$$|\Phi(w)| \leqslant |w|(T(\Omega)) \leqslant \|w\|_{V^1}\,\mu(\Omega).$$

En vertu du théorème de Riesz-Thorin, la norme de Φ dans $(V_0, V^1)_{\alpha,\infty}$ est majorée par

$$\|\Phi\|_{(V^0)^*}^{1-\alpha}\,\|\Phi\|_{(V^1)^*}^{\alpha} \leqslant [\mu(\Omega)]^\alpha.$$

Il suffit de prendre g tel que $\int_{T(\Omega)} g\,dw = |w|(T(\Omega))$ pour conclure que $|w|(T(\Omega)) \leqslant C[\mu(\Omega)]^\alpha$, et donc $(V^0, V^1)_{\alpha,\infty} \subsetneq V^\alpha$.

Montrons les inclusions suivantes. Si w est une mesure de Carleson, $w \in V^1$, il est bien connu que, quel que soit $f \in L^2(\mu)$,

$$\int |P_t^0 f|^2\, d|w|(t, x) \leqslant C\|w\|_{V^1}\|f\|_2^2.$$

Si $w \in V^0$,

$$\int |P_t^0 f|^2\, d|w|(t, x) \leqslant \|w\|_{V^0}\|f\|_\infty^2.$$

Par interpolation, on en déduit que, si w appartient à l'un des interpolés $(V^0, V^1)_{\alpha,p}$ ou $(V^0, V^1)_\alpha$, quel que soit $f \in L^{2q}(\mu)$ (où $1/q = 1-(1/p) = \alpha$),

$$(3.1) \qquad \int |P_t^0 f|^2\, d|w|(t, x) \leqslant C\|f\|_{2q}^2.$$

Mais, nous l'avons vu, $|P_t^0 f(x)| \leqslant |M^0 f(y)|$, quel que soit $f \in L^q(\mu)$ et $y \in B(x, t)$. Donc

$$\begin{aligned} |P_t^0 f(x)|^{1/2} &\leqslant \frac{1}{\mu[B(x, t)]}\int_{B(x,t)} \{M^0 f(y)\}^{1/2}\, d\mu(y) \\ &\leqslant P_t^0\{[M^0 f]^{1/2}\}(x). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité (3.1), quel que soit $f \in L^q(\mu)$,

$$\int |P_t^0 f|\, d|w| \leqslant \int (P_t^0\{[M^0 f]^{1/2}\})^2\, d|w| \leqslant C\|(M^0 f)^{1/2}\|_q^2 \leqslant C\|f\|_q.$$

C'est dire que w appartient à l'espace W^α.

Il nous reste à montrer les inclusions $V^\alpha \subsetneq (V_0, V^1)_{\alpha,\infty}$, et $W^\alpha \subsetneq (W^0, W^1)_{\alpha, p}$, $W^\alpha \subsetneq (W_0, W^1)_\alpha$. Elles sont conséquences de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Si w est une mesure de l'espace V^α (resp. de l'espace W^α), il existe une mesure de Carleson positive w_0 et une fonction $h \in L^{p,\infty}(w_0)$ (resp. $h \in L^p(w_0)$), où $1/p = 1-\alpha$, telles que $w = hw_0$.*

Admettons un instant la proposition : le théorème se déduit immédiatement du fait que h appartient à $(L^1(w_0), L^\infty(w_0))_{\alpha,\infty}$ (resp. $h \in (L^1(w_0), L^\infty(w_0))_{\alpha, p}$, $h \in (L^1(w_0), L^\infty(w_0))_\alpha$) et du fait que $L^1(w_0)$ s'identifie à un sous-espace de V^0, $L^\infty(w_0)$ à un sous-espace de V^1.

La démonstration de la proposition découle du lemme suivant :

LEMME 1. — *Si w est une mesure positive sur $\mathbf{R}^+ \times X$ et f sa balayée par le noyau P_t^0, alors la mesure $\{ P_t^0(1/f) \} w$ est une mesure de Carleson.*

Il s'agit de montrer que, quel que soit l'ouvert Ω,

$$\int_{T(\Omega)} P_t^0 \frac{1}{f}(x)\, dw(t, x) \leqslant C\mu(\Omega).$$

Mais l'intégrale de gauche est encore égale à

$$\int_{T(\Omega)} \left\{ \int P_t^0(x, y) \frac{1}{f(y)} d\mu(y) \right\} dw(t, x).$$

Or, si $(t, x) \in T(\Omega)$, $P_t^0(x, y) > 0$ si, et seulement si, $y \in \Omega$. Cette intégrale est donc majorée par

$$\int_\Omega \frac{1}{f(y)} \left\{ \int_{\mathbf{R}^+ \times X} P_t^0(x, y)\, dw(t, x) \right\} d\mu(y) = \mu(\Omega).$$

Démontrons la proposition : on peut supposer w positive; posons $w_0 = \{ P_t^0(1/f) \} w$, et $h(t, x) = [P_t^0(1/f)(x)]^{-1}$, qui est inférieur à $P_t^0 f(x)$ d'après l'inégalité de Schwarz. Il reste à montrer que

$$P_t^0 f(x) \in L^{p,\infty}(w_0)$$

si $w \in V^\alpha$, $P_t^0 f(x) \in L^p(w_0)$ si $w \in W^\alpha$. Mais il est bien connu que, si w_0 est une mesure de Carleson,

$$\int |P_t^0 f|^p\, dw_0(t, x) \leqslant C \int |f|^p\, d\mu$$

et

$$\| P_t^0 f \|_{L^{p,\infty}(w_0)} \leqslant C \| f \|_{L^{p,\infty}(\mu)}.$$

4. Mesures de Carleson d'ordre α, $\alpha \geqslant 1$

Nous supposerons dans ce paragraphe que la mesure μ satisfait à la condition supplémentaire qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\mu[B(x, t)] \leqslant C t^{\beta}.$$

Nous supposerons également que les noyaux P_t satisfont aux deux conditions suivantes, avec $\gamma > 0$ et $\delta > 0$:

(H2) $| P_t(x, y) | \leqslant C t^{\gamma} (\rho(x, y) + t)^{-\beta-\gamma}$;

(H3) quels que soient x, y_0, y et t tels que $t + \rho(x, y_0) \geqslant K \rho(y_0, y)$,

$$| P_t(x, y) - P_t(x, y_0) | \leqslant C \rho(y_0, y)^{\delta} [\rho(x, y_0) + t]^{-\beta-\delta}.$$

C'est le cas, en particulier du noyau de Poisson dans $\mathbf{R}^n$, avec $\beta = n$, $\gamma = \delta = 1$, et du noyau de Poisson-Szegö dans la boule de $\mathbf{C}^n$, avec $\beta = n$, $\gamma = n$, $\delta = 1/2$, si l'on munit le bord de la boule de la distance

$$\rho(z, \zeta) = | 1 - z . \bar{\zeta} |.$$

Remarquons que la condition (H2) entraîne immédiatement que

$$\sup_{y,t} \int | P_t(x, y) | \, d\mu(x) < \infty$$

et, si $(t, x) \notin T(B(y, 1))$, $| P_t(x, y) | \leqslant C$.

THÉORÈME 4. — *Soit P_t un noyau satisfaisant aux conditions* (H2) *et* (H3), *et w une mesure bornée;*

(i) *si w est une mesure de Carleson, $w \in V^1$, alors la balayée $P^* w$ de w par le noyau P_t appartient à* BMO (μ);

(ii) *si w est une mesure de l'espace V^{α}, $1 < \alpha < (\delta/\beta) + 1$, la fonction $P^* w$ est bornée et satisfait à la condition de Lipschitz suivante :*

Quels que soient y_0, y, $| P^* w(y_0) - P^* w(y) | \leqslant C \{ \rho(y_0, y) \}^{\beta(\alpha-1)}$.

Le fait que P_t satisfait à la condition $\sup_{y,t}\int |P_t(x, y)|\, d\mu(x) < \infty$ et que w est borné entraîne que $P^* w(y) = \int P_t(x, y)\, dw(t, x)$ est bien défini presque partout, et

$$\int |P^* w|\, d\mu \leqslant C\, |w|\, (\mathbf{R}^\times \times X).$$

La partie (i) est bien connue, au moins dans des cas particuliers. Esquissons-en la démonstration : soit $B = B(y_0, t_0)$ une boule de X. Il s'agit de montrer qu'il existe une constante a_B telle que

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |P^* w - a_B|\, d\mu \leqslant C.$$

Posons $w_0 = \chi_{T(\tilde{B})}\, w$, $w_1 = w - w_0$, avec $\tilde{B} = B(y_0, K t_0)$. Alors

$$\int |P^* w_0|\, d\mu \leqslant |w_0|\, (\mathbf{R}^\times \times X) = w(T(\tilde{B})) \leqslant C\mu(B).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_{\complement T(\tilde{B})} |P_t(x, y) - P_t(x, y_0)|\, d|w|(t, x) \leqslant C.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant, avec $\eta = \beta + \delta$.

LEMME 2. — *Soit* $w \in V^\alpha$ *une mesure positive, et* $B = B(y_0, \theta_0)$. *Alors :*
1° *si* $\eta > \beta\alpha$,

$$\int_{\complement T(B)} [t + \rho(x, y_0)]^{-\eta}\, d\omega(t, x) \leqslant C\, \theta_0^{\alpha\beta - \eta};$$

2° *si* $\eta < \beta\alpha$,

$$\int_{T(B)} [t + \rho(x, y_0)]^{-\eta}\, d\omega(t, x) \leqslant C\, \theta_0^{\alpha\beta - \eta}.$$

Pour démontrer le 1°, il suffit d'écrire

$$\complement T(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (T(B_k) \setminus T(B_{k-1})) \qquad \text{avec} \quad B_k = B(y_0, 2^k \theta_0),$$

et de remarquer que $w(T(B_k)) \leqslant C\, 2^{k\beta}\, \theta_0^\beta$, tandis que, sur $\complement T(B_{k-1})$, $t + \rho(x, y_0) \geqslant c\, 2^k\, \theta_0$.

Pour démontrer le 2°, on écrit au contraire

$$T(B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (T(B_k) \setminus T(B_{k+1})) \qquad \text{avec} \quad B_k = B(y_0, 2^{-k}\theta_0).$$

Revenons à la démonstration de (ii), et d'abord au fait que $P^* w$ est borné; comme $|P_t(x, y)| \leqslant C$ si $(t, x) \notin T(B(y, 1))$ et w est borné, il suffit de montrer que

$$\int_{T(B)} |P_t(x, y)| \, d|w|(t, x) \leqslant C,$$

ce qui est une conséquence de l'hypothèse (H2) et du lemme 2, avec $\eta = \beta$. Soient maintenant $y_0, y \in X$, $t_0 = \rho(y_0, y)$, $B = B(y_0, K t_0)$.

Si $w_0 = \chi_{T(B)} w$, $P^* \omega_0(y_0)$ et $P^* \omega_0(y)$ sont majorés par $C t_0^{\beta(\alpha-1)}$ grâce à la partie 2° du lemme 2 et à l'hypothèse (H2) tandis que

$$\int_{\complement T(B)} |P_t(x, y) - P_t(x, y_0)| \, d|w|(t, x)$$

satisfait à la même majoration grâce à la partie 1° et l'hypothèse (H1).

Remarque 1. — On peut montrer aisément que, sous l'hypothèse (H2), la fonction maximale associée à P_t est majorée par CM^0. Il s'ensuit que l'hypothèse (H1) est satisfaite.

Remarque 2. — Lorsque $X = \mathbf{R}^n$ et P_t est le noyau de Poisson, il est aisé de montrer que, quel que soit $\alpha > 1$ et w bornée dans V^α, la balayée $P^* w$ appartient à l'espace $\Lambda^{n(\alpha-1)}$. Il suffit d'utiliser la caractérisation des fonctions de $\Lambda^{n(\alpha-1)}$ en termes de leurs intégrales de Poisson ([11], p. 142).

Remarque 3. — Lorsque X est le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$ et ρ sa métrique de Koranyi, l'espace des fonctions f telles que

$$|f(y_0) - f(y)| \leqslant C \rho(y_0, y)^\alpha$$

s'identifie, si $\alpha < 1/2$, avec l'espace $\Gamma^{2\alpha}$ de Stein [10].

5. Représentation des fonctions de L^p, $L^{p,\infty}$ et BMO comme balayées de mesures

Nous allons montrer que réciproquement, au moins dans des cas particuliers, toute fonction $f \in L^p(\mu)$ (resp. $L^{p,\infty}(\mu)$, BMO) peut s'écrire sous la forme $f = P^* w$, où $w \in W^{1-(1/p)}$ (resp. $w \in V^{1-(1/p)}$, $w \in V^1$).

Proposition 2. — *Soit $1 < p < \infty$, et P_t un noyau sur X tel que $P_t(x, y) = P_t(y, x)$ et tel que, quelle que soit la fonction $g \in L^p_{(\mu)}$, $P_t g$ tende vers g dans L^p. Alors, quelle que soit la fonction $f \in L^p(\mu)$, il existe une mesure $w \in W^{1-(1/p)}$ telle que*

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^+ \times X} P_t(x, y)\, dw(t, y).$$

Définissons $f_1 = f$, et choisissons t_1 tel que $\|f - P_{t_1} f\|_p \leqslant (1/2)\|f\|_p$, puis, par récurrence, définissons $f_k = f_{k-1} - P_{t_{k-1}} f_{k-1}$, et choisissons t_k tel que $\|f_k - P_{t_k} f_k\|_p \leqslant 2^{-k}\|f\|_p$. Alors

$$f = \sum (f_k - f_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{t_k} f_k = \int P_t(\,.\,, y)\, dw(t, y),$$

où w est la mesure $\sum \delta_{t_k} \otimes f_k\, \mu$. Mais

$$S_{|w|}(y) = \int P_t^0(x, y)\, d|w|(t, x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int P_t^0(x, y)\,|f_k|(x)\, d\mu(x),$$

donc $\|S_{|w|}\|_p \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \leqslant 2\,C\,\|f\|_p$: la mesure w appartient à la classe $W^{1-(1/p)}$.

Nous allons, dans la suite de ce paragraphe, nous intéresser au cas où $X = \mathbf{R}^n$ et P_t est le noyau de Poisson. La proposition suivante est la généralisation à $L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$ d'un résultat de J. Garnett et O. Stromberg relatif aux fonctions de BMO $(\mathbf{R}^n)$.

Proposition 3. — *Soit f une fonction mesurable sur $\mathbf{R}^n$ à support compact. Alors f appartient à $L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$ si, et seulement si, elle peut s'écrire sous la forme :*

$$f = \sum a_j \chi_{Q_j},$$

où les constantes a_j et les cubes Q_j sont tels que, quel que soit l'ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$,

$$\sum_{Q_j \subset \Omega} |a_j| . |Q_j| \leqslant C |\Omega|^{1-(1/p)}.$$

Nous ferons la démonstration lorsque $n = 1$ et f est à support dans $(0, 1)$. Soit tout d'abord $f = \sum a_j \chi_{I_j}$ une décomposition de f satisfaisant à (5.1). Alors la mesure $w = \sum a_j |I_j| \delta_{(t_j, x_j)}$ où $t_j = |I_j|/2$ et x_j est le le milieu de I_j, est une mesure de $V^{1-1/p}$. Or f est la balayée de $\delta_{(t_j, x_j)}$ pour le noyau P_t^0, donc f, balayée de w, appartient à $L^{p,\infty}(\mathbf{R})$.

Réciproquement, si f appartient à $L^{p,\infty}(\mathbf{R})$, $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^k \chi_{E_k}$, où les E_k sont des ensembles mesurables tels que $|E_k| \leqslant C\, 2^{-kp}$. D'après Stromberg

[12], quel que soit k, χ_{E_k} peut s'écrire sous la forme $\chi_{E_k} = \sum a_j^k \chi_{I_j^k}$, où les a_j^k et I_j^k sont tels que, quel que soit l'ouvert Ω,

$$\sum_{I_j^k \subset \Omega} |a_j^k| . |I_j^k| \leqslant C |\Omega|;$$

de plus on peut supposer que

$$\bigcup_j I_j^k \subset \Omega_k \qquad \text{et} \qquad |\Omega_k| \leqslant C 2^{-kp}.$$

Considérons la décomposition de f :

$$f = \sum_k 2^k \sum_j a_j^k \chi_{I_j^k}.$$

Quel que soit l'ouvert Ω,

$$\sum_{j,k;\, I_j^k \subset \Omega} |a_j^k| . |I_j^k| \leqslant \sum_k 2^k \sum_{I_j^k \subset \Omega \cap \Omega_k} |a_j^k| \, |I_j^k|$$
$$\leqslant C \sum_k 2^k \inf \{ |\Omega_k|, |\Omega| \}.$$

Comme $|\Omega_k| \leqslant C 2^{-kp}$, cette dernière somme est majorée par

$$C |\Omega| \sum_{pk \leqq -\log_2 |\Omega|} 2^k + \sum_{pk > -\log_2 |\Omega|} 2^{k(1-p)} \leqslant C |\Omega|^{1-1/p}.$$

Remarque 1. — La proposition 3 exprime le fait que toute fonction $f \in L^{p,\infty}(\mathbf{R})$ s'écrit comme balayée par le noyau P_t^0 d'une mesure de l'espace V^α, $\alpha = 1-(1/p)$.

PROPOSITION 4. — *Soit f une fonction mesurable à support compact sur $\mathbf{R}^n$:*

(i) *si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, il existe un prolongement F de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ et tel que, quelle que soit la dérivation D^α (où $|\alpha| \geqslant 1$), la mesure $t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F| \, dt \, dx$ appartient à $W^{1-(1/p)}$;*

(ii) *si $f \in L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, il existe un prolongement F de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ et tel que, quelle que soit la dérivation D^α (où $|\alpha| \geqslant 1$) la mesure $t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F| \, dt \, dx$ appartient à $V^{1-(1/p)}$;*

(iii) *si $f \in$ BMO $(\mathbf{R}^n)$, il existe un prolongement F de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ et tel que, quelle que soit la dérivation D^α (où $|\alpha| \geqslant 1$) la mesure $t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F| \, dt \, dx$ appartient à V^1.*

L'intérêt de tels prolongements a été mis en évidence par N. VAROPOULOS dans [13], où il construit un prolongement F d'une fonction $f \in$ BMO $(\mathbf{R}^n)$ tel que $|\nabla F| \, dt \, dx$ soit une mesure de Carleson. Notre argument, pour (ii) et (iii), est une modification du sien.

Démontrons (i) : P_t désignant le noyau de Poisson, considérons la décomposition $f = \sum P_{t_k} f_k$ obtenue dans la démonstration de la proposition 2. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$, valant 1 en 0 et nulle en dehors de l'intervalle $[0, 1]$.

Posons

$$F(t, x) = \sum_k \varphi\left(\frac{t}{t_k}\right) P_{t_k} f_k(x).$$

Il est clair que F est un prolongement $\mathscr{C}^\infty$ de f. De plus,

$$\left| t^{\alpha+|\beta|-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha D_x^\beta F(t, x)\right| \leqslant \sum_k \frac{1}{t_k} \varphi^{(\alpha)}\left(\frac{t}{t_k}\right) t_k^{|\beta|} \left| D^\beta P_{t_k} f_k(x)\right|.$$

Pour conclure, on utilise le fait que $\int (1/t_k) \left| \varphi^{(\alpha)}(t/t_k)\right| dt = C_\alpha$ est indépendant de k, ainsi que la norme dans L^1 du noyau $t_k^{|\beta|} D^\beta P_{t_k}$.

Démontrons (ii) et (iii). En vertu de la proposition 3 et du résultat analogue de J. GARNETT et O. STROMBERG lorsque $f \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$,

$$f = \sum a_j \chi_{Q_j}$$

où les a_j et Q_j sont tels que, pour tout ouvert Ω,

$$\sum_{Q_j \subset \Omega} |a_j| \, |Q_j| \leqslant C |\Omega|^{1-(1/p)}$$

dans le cas où f appartient à $L^{p, \infty}(\mathbf{R}^n)$, et

$$\sum_{Q_j \subset \Omega} |a_j| \, |Q_j| \leqslant C |\Omega|$$

dans le cas où f appartient à $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$.

Nous supposerons dans la démonstration $n = 1$, et f à support dans $[0, 1]$. Nous allons prolonger chaque fonction caractéristique χ_I en $\tilde{\chi}_I$, et poser

$$F = \sum a_j \tilde{\chi}_{I_j}.$$

Soit $\psi \in \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[)$, valant 1 sur $]0, 1/2[$, nulle hors de $]0, 1[$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ une fonction nulle hors de $[-1/2, 1/2]$, $\varphi_t(x) = (1/t)\,\varphi(x/t)$. On pose alors :

$$\tilde{\chi}_I(t, x) = \psi\left(\frac{t}{|I|}\right) \chi_I \star \varphi_t(x).$$

On vérifie aisément que $\tilde{\chi}_I$ est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, et que $\tilde{\chi}_I(t, x)$ tend vers $\chi_I(x)$ lorsque t tend vers zéro. De plus, $D^\alpha \chi_I$ est à support dans

$$\left[\frac{h}{2}, h\right] \times \left[a-\frac{h}{2}, b+\frac{h}{2}\right] \cup \Gamma_{a,h} \cup \Gamma_{b,h},$$

si $I = (a, b)$ et $\Gamma_{a,h}$ est le cône

$$\Gamma_{a,h} = \left\{(t, x);\ t < \frac{h}{2},\ |x-a| < \frac{t}{2}\right\}.$$

Enfin, quel que soit α, $D^\alpha \tilde{\chi}_I = O(t^{-|\alpha|})$, et, si I et I' sont deux intervalles ayant a pour extrémité commune et $h = \inf(|I|, |I'|)$, alors $D^\alpha \chi_I = \pm D^\alpha \tilde{\chi}_I$ sur $\Gamma_{a,h}$ suivant que I et I' sont du même côté de a ou non. Il suffit, pour conclure dans le cas (iii), de reprendre la démonstration de N. Varopoulos [13].

Il reste à conclure dans le cas (ii). On veut montrer que

$$\int_{T(\Omega)} t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F|\, dt\, dx \leqslant C |\Omega|^{1-(1/p)}.$$

Il suffit de montrer qu'il existe une fonction $g \in L^{p,\infty}(\mathbf{R})$ telle que, quel que soit l'intervalle $I \subset (0, 1)$,

$$\int_{T(I)} t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F|\, dt\, dx \leqslant C . \int_I g\, dx,$$

ou, mieux encore, que $\int_0^{|I|} t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F(t, x)|\, dt \leqslant g(x)$ si $x \in I$. Mais, d'après les inégalités précédentes, sur l'intervalle I :

$$\int_0^{|I|} t^{|\alpha|-1} |D^\alpha F|\, dt \leqslant C \textstyle\sum_{4I_j \cap I \neq \varnothing} |a_{I_j}| . |\inf(|I_j|, |I|) \leqslant C g,$$

si g est la fonction maximale de la fonction $\sum |a_{I_j}| \chi_{I_j}$, qui appartient à $L^{p,\infty}$ en vertu de la proposition 3.

La proposition 4 permet d'obtenir toute fonction f de BMO $(\mathbf{R}^n)$ à support compact (resp. de $L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$) comme balayée par le noyau de Poisson d'une mesure de Carleson (resp. d'une mesure de V^α).

THÉORÈME 5.

(i) *soit f une fonction de* $L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$ (*où* $1 < p < \infty$) *à support compact. Il existe une mesure de Carleson w d'ordre α, où $\alpha = 1-(1/p)$, telle que*

$$f(x) = \int P_t(x-y)\,dw(t, y);$$

(ii) *soit f une fonction de* BMO $(\mathbf{R}^n)$ *à support compact. Il existe une mesure de Carleson w telle que*

$$f(x) = \int P_t(x-y)\,dw(t, y).$$

La partie (ii) de ce théorème a été démontrée simultanément par P. JONES [5] en utilisant une méthode moins explicite qui a l'avantage de se généraliser à d'autres noyaux que le noyau de Poisson.

Pour démontrer le théorème 5 à partir de la proposition 4, il suffit d'utiliser le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ à support compact, F un prolongement de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. Alors*

$$f(y) = \int P_t(x-y)\,t\,\Delta F(t, x)\,dt\,dx + \int P_t(x-y)\frac{\partial}{\partial t}F(t, x)\,dt\,dx.$$

Il suffit de prendre la transformée de Fourier des deux membres de cette identité.

Remarque 1. — La démonstration de la partie (i) de la proposition 4 se généralise aisément au cas où X est la frontière de la boule dans $\mathbf{C}^n$ ou la frontière d'un domaine strictement pseudo-convexe. Dans le premier cas, le rôle du noyau de Poisson est joué par le noyau de Poisson-Szegö : si $P_z(\zeta) = (1-|z|)^n/|1-z.\zeta|^{2n}$ est le noyau de Poisson-Szegö (ici $\zeta \in \partial B$, $z \in B$, où B désigne la boule unité dans $\mathbf{C}^n$), on pose

$$P_t(\zeta', \zeta) = P_{e^{-t}\zeta'}(\zeta) \quad (\text{ici } \zeta, \zeta' \in \partial B).$$

Le prolongement F ainsi obtenu est tel, en particulier, que son gradient anisotrope (*voir* [13]) définit une mesure de Carleson d'ordre p.

Remarque 2. — Il est bien connu que lorsqu'on considère une fonction $f \in$ BMO $(\mathbf{R}^n)$ et son prolongement F par son intégrale de Poisson, $|\nabla F|\,dt\,dx$

n'est pas en général une mesure de Carleson : RUDIN donne le contre-exemple d'une fonction de $L^\infty(\mathbf{R})$ [7]. Regardons, plutôt que des exemples dans $\mathbf{R}$, des exemples de fonctions f définies sur $\mathbf{T}$.

Soit ψ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à décroissance rapide, telle que $\psi(0) = 1$. Quelle que soit la fonction $f \in \mathrm{BMO}(\mathbf{T})$,

$$f(x) = \sum \hat{f}(n) e^{inx},$$

on définit son prolongement F à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}$ par

$$F(t, x) = \sum \hat{f}(n) \psi(tn) e^{inx}.$$

Lorsque $\psi(t) = e^{-|t|}$, F coïncide, à un changement de t en e^{-t} près, avec le prolongement harmonique de f dans le disque unité.

LEMME 3. — *$|\nabla F|\, dt\, dx$ n'est pas, en général, une mesure de Carleson sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}$: il existe des fonctions $f \in \mathrm{BMO}(\mathbf{T})$ telles que*

$$\int_{(0,1)\times\mathbf{T}} |\nabla F|\, dt\, dx = +\infty.$$

$|\nabla F|\, dt\, dx$ n'est donc pas non plus une mesure de Carleson d'ordre α.

Démontrons le lemme : il suffit de considérer les fonctions à série lacunaire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i3^n x},$$

dont on sait, en vertu du théorème de Paley, qu'elles appartiennent à $\mathrm{BMO}(\mathbf{T})$ si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Mais

$$\int_{\mathbf{T}} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) \right| dt\, dx \simeq \int_0^1 [\sum |a_n 3^n \psi(t 3^n)|^2]^{1/2}\, dt,$$

les normes L^1 et L^2 étant équivalentes pour les séries lacunaires. Or, si $|\psi(t)| \geqslant 1/2$ lorsque $|t| \leqslant \varepsilon$,

$$(\sum |a_n 3^n \psi(t 3^n)|^2)^{1/2} \geqslant c\, |a_n|\, 3^n \quad \text{lorsque } 3^{-n-1}\varepsilon \leqslant t \leqslant 3^{-n}\varepsilon.$$

Donc $\int_{\mathbf{T}} \int_0^{\varepsilon} |(\partial/\partial x) F(t, x)|\, dt\, dx \geqslant c \sum |a_n|$. Il suffit de prendre

$$f(x) = \sum a_n e^{i3^n x} \quad \text{avec } \sum |a_n| = \infty \quad \text{et} \quad \sum |a_n|^2 < \infty$$

pour avoir l'exemple cherché.

Il est par contre très facile de montrer que, si $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$, le prolongement F considéré est tel que $|\nabla F|\,dt\,dx$ soit une mesure de Carleson.

On déduit immédiatement du lemme 3 la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — *Il existe une fonction $f \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R})$ à support compact telle que, quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathscr{S}$ telle que $\int \varphi\,dx = 1$, le prolongement*

$$F(t, x) = \frac{1}{t}\int \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\,dy,$$

de f à $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ satisfait à

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} |\nabla F(t, x)|\,dt\,dx = +\infty.$$

Il suffit de considérer la fonction $\{\sum a_n e^{i3^n x}\}\,\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$ pour construire cet exemple à partir du lemme.

Remarque 3. — Si, par contre, f appartient à l'espace $\Lambda^\alpha(\mathbf{R})$, il est bien connu que, si F désigne son intégrale de Poisson,

$$|\nabla F(t, x)| \leqslant C\,t^{-1+\alpha}.$$

La mesure $|\nabla F(t, x)|\,dt\,dx$ appartient donc à l'espace $V^{1+\alpha}$, et la fonction f peut s'écrire comme balayée de Poisson de la mesure $(\partial/\partial t)\,F(t, x)\,dt\,dx$.

6. Conditions suffisantes pour que l'équation $\bar{\partial}\,u = w$ admette des solutions au bord höldériennes ou dans L^p

(A) *Mesures de Carleson d'ordre α dans un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$.*

Soit D un domaine borné strictement pseudo-convexe de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 2$) dans $\mathbf{C}^n$:

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n;\ r(z) < 0\},$$

où r est une fonction strictement plurisousharmonique de classe $\mathscr{C}^k$ définie dans un voisinage de $\bar{D}$ et telle que $dr \neq 0$.

Soit $D_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^n;\ -\varepsilon < r(z) < 0\}$. Si ε est choisi suffisamment petit, D_ε est difféomorphe de classe $\mathscr{C}^k$ à $]0, \varepsilon[\times \partial D$, le difféomorphisme φ étant défini par $\varphi(z) = (-r(z), z')$, où z' désigne la projection de z sur ∂D.

Il est bien connu que ∂D, muni de la pseudo-distance de Koranyi ρ (*voir* [9]) et de la mesure euclidienne σ, est un espace de nature homogène. Si $z \in \partial D$ et ζ est proche de z, rappelons que $\rho(z, \zeta)$ est, à une constante près

$$|z-\zeta|^2+|\operatorname{proj}_{C\nu(z)}(\zeta-z)|,$$

si $\nu(z)$ désigne la normale intérieure à ∂D en z, $\operatorname{proj}_{C\nu(z)}$ la projection euclidienne sur le sous-espace complexe engendré par $\nu(z)$. Par abus de langage, lorsque Ω est un ouvert de ∂D, on notera encore $T(\Omega)$ le sous-ensemble $\varphi^{-1}(T(\varphi(\Omega)))$ de D.

Par analogie avec la définition précédente, nous dirons que la mesure μ sur D est une *mesure de Carleson d'ordre* α si μ est une mesure bornée et s'il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit l'ouvert $\Omega \subset \partial D$,

$$|\mu|(T(\Omega)) \leqslant C|\Omega|^\alpha.$$

Les mesures de Carleson (cas où $\alpha = 1$) sur D avaient été introduites par L. Hörmander [4].

Nous appellerons encore $V^\alpha(D)$ l'espace des mesures de Carleson d'ordre α, et, lorsque $\alpha < 1$, $W^\alpha(D)$ l'espace des mesures bornées dont la restriction à D_ε est image par φ^{-1} d'une mesure de l'espace W^α sur $]0, \varepsilon[\times \partial D$. Les théorèmes 1 et 2 de la première partie entraînent immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 6. — *Soit K une fonction continue sur $\partial D \times D$ et telle que le noyau $\tilde{K}_t$ sur ∂D défini, si $t < \varepsilon$, par*

$$\tilde{K}_t(z, \zeta) = K(\zeta, \varphi^{-1}(t, z)),$$

satisfasse à la condition (H1). *Alors, si $\mu \in V^\alpha(D)$ (resp. $\mu \in W^\alpha(D)$),*

$$z \to \int K(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$$

appartient à $L^{p,\infty}(\partial D)$ (resp. $L^p(\partial D)$), avec $1/p = 1-\alpha$.

(B) *Solutions de l'équation $\bar\partial_b u = w$; énoncés des résultats L^p.*

Nous allons appliquer ce théorème pour obtenir une solution dans L^p de l'équation $\bar\partial_b u = w$.

Suivant H. Skoda, si w est une (0, 1)-forme à coefficients mesures bornées dans D telle que $\bar\partial\omega = 0$, on dit que la fonction $u \in L^1(\partial D)$ est solution de l'équation $\bar{\partial}_b u = w$ (ou solution au bord de l'équation $\bar{\partial} u = w$) si, quelle que soit la $(n, n-1)$ forme f à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $\bar{D}$ telle que $\bar{\partial} f = 0$,

$$\int_{\partial D} uf = \int_D w \wedge f.$$

H. SKODA a montré dans [8] que, si w est à coefficients mesures bornées ainsi que la forme $(\bar{\partial} r \wedge w)/\sqrt{-r}$, il existe une solution $u \in L^1(\partial D)$ à l'équation $\bar{\partial}_b u = w$, pouvant s'écrire sous la forme :

$$u(z) = \int_D K(z, \zeta) \wedge w + \int_D L(z, \zeta) \wedge \frac{\bar{\partial} r \wedge w}{\sqrt{-r}},$$

où $K(z, .)$ est une $(n, n-1)$ forme, $L(z, .)$ une $(n, n-2)$ forme, K et L sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ dans $\partial D \times \bar{D} \setminus \Delta$, et

$$\sup_\zeta \int_{\partial D} |K(z, \zeta)| \, d\sigma(z) < \infty \qquad \text{et} \qquad \sup_\zeta \int_{\partial D} |L(z, \zeta)| \, d\sigma(z) < \infty.$$

Grâce à des estimations plus précises sur les noyaux K et L, nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit w une* $(0, 1)$*-forme $\bar{\partial}$-fermée dont les coefficients appartiennent à l'espace $V^\alpha(D)$ (resp. $W^\alpha(D)$), ainsi que les coefficients de la forme $(\bar{\partial} r \wedge w)/\sqrt{-r}$, avec $0 < \alpha < 1$. Il existe alors une solution dans $L^{p, \infty}(\partial D)$* (resp. L^p) *à l'équation $\bar{\partial}_b u = w$, avec $1/p = 1 - \alpha$.*

Pour montrer que la solution de H. SKODA est dans $L^{p, \infty}$ (resp. L^p), il suffit de montrer, en vertu du théorème 6, que $\tilde{K}_t$ et $\tilde{L}_t$ satisfont à l'hypothèse (H1). C'est l'objet du lemme 4.

(C) *Estimations pour les noyaux K et L.*

LEMME 4. — *Les noyaux $K(z, \zeta)$ et $L(z, \zeta)$ sont majorés, quel que soit $z \in \partial D$ et $\zeta \in D_\varepsilon$, ζ' désignant la projection de ζ sur ∂D, par*

$$C(-r(\zeta))^{1/2} [-r(\zeta) + \rho(z, \zeta')]^{-n-(1/2)}.$$

Nous allons, pour simplifier les notations, supposer que $n = 2$ et reprendre les notations de H. SKODA. Alors

$$K(z, \zeta) = K^1(z, \zeta) \, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_2 + K^2(z, \zeta) \, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_2$$

avec

$$(6.1)\qquad \begin{cases} K^1(z,\zeta)=\dfrac{-r(\zeta)}{D(z,\zeta)}\left[Q_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\bar\zeta_2}-Q_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\bar\zeta_2}\right] \\ K^2(z,\zeta)=\dfrac{-r(\zeta)}{D(z,\zeta)}\left[Q_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\bar\zeta_1}-Q_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\bar\zeta_1}\right], \end{cases}$$

où

$$D(z,\zeta)=[-r(\zeta)+\langle P,\zeta-z\rangle]^2\langle Q,\zeta-z\rangle,$$

$$L(z,\zeta)=K^3(z,\zeta)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

avec

$$(6.2)\qquad K^3(z,\zeta)=\frac{-r(\zeta)}{D(z,\zeta)}[P_2Q_1-P_1Q_2].$$

La majoration annoncée est pratiquement démontrée dans [8] (p. 265), puisque H. Skoda y montre que

$$|D(z,\zeta)|\geqslant C[-r(\zeta)+\rho(z,\zeta')]^3$$

et

$$|P_2Q_1-P_1Q_2|\leqslant C|\zeta-z|.$$

Mais, en vertu de la définition de ρ,

$$|\zeta-z|\leqslant C[-r(\zeta)+\rho(z,\zeta')]^{1/2}.$$

Le lemme 4 admet pour corollaire immédiat que les noyaux $\tilde K_t$ et $\tilde L_t$ satisfont à l'hypothèse (H2), et donc à l'hypothèse (H1). Le théorème 7 est démontré.

Nous allons démontrer également des majorations portant sur les dérivées des noyaux K et L, qui nous permettront d'obtenir des résultats dans les classes Lipschitz.

Convenons tout d'abord d'appeler champ de vecteurs admissible tout champ de vecteurs sur ∂D de classe $\mathscr{C}^k$ qui, en tout point, appartient au sous-espace de l'espace tangent engendré par les vecteurs holomorphes et antiholomorphes.

Lemme 5. — *Quels que soient l'entier $m\leqslant k-1$, $z\in\partial D$ et $\zeta\in D_\varepsilon$, les gradients d'ordre m en z de K et L au point (z,ζ) sont majorés par*

$$C[-r(\zeta)+\rho(z,\zeta')]^{-n-m};$$

de plus, si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont m champs admissibles, de normes bornées par 1 *dans $\mathscr{C}^k$, $X_1 X_2 \ldots X_m K$ et $X_1 X_2 \ldots X_m L$ sont majorés par*

$$C[-r(\zeta)+\rho(z, \zeta')]^{-n-(m/2)}.$$

Nous nous contenterons, là encore, de démontrer le lemme lorsque $n = 2$, autrement dit de démontrer que les noyaux K^1, K^2, K^3 satisfont aux inégalités annoncées. Faisons tout d'abord le changement de variables donné par le lemme 7.1 de [8] : si ζ est un point de D_ε, il est donné par un difféomorphisme ψ de la boule euclidienne de centre ζ et de rayon R sur un ouvert de $\mathbf{R}^4$ tel que, si $z \in \partial D$, $\psi(z)$ puisse s'écrire $(0, x_1, x_2, x_3)$; de plus, si ζ' est la projection de ζ sur ∂D parallèlement à la normale,

$$\rho(z, \zeta') \simeq |x_1|+|x_2|^2+|x_3|^2;$$

enfin les champs de vecteurs $\partial/\partial x_2$ et $\partial/\partial x_3$ engendrent en ζ' le sous-espace tangent engendré par les vecteurs holomorphes et antiholomorphes.

Cette dernière propriété permet d'écrire au voisinage de ζ' tout champ de vecteurs X admissible sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{avec} \quad a_1(z) = \mathcal{O}(|z-\zeta'|)$$
$$= \mathcal{O}(\rho(z, \zeta')^{1/2}).$$

Pour démontrer le lemme 5, il suffit donc de montrer le lemme suivant :

LEMME 6. — *Quels que soient les entiers l_1, l_2, l_3 tels que*

$$l = l_1+l_2+l_3 \leqslant k-1,$$

quel que soit $i = 1, 2, 3$ et quels que soient $\zeta \in D_\varepsilon$ et $z \in \partial D \cap B(\zeta, R)$

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} K^i(z, \zeta)\right| \leqslant C\,|-r(\zeta)+\rho(z, \zeta')|^{-2-((l+l_1)/2)}.$$

Il est aisé de voir, dans les expressions explicites de K^1, K^2 et K^3 (formules (6.1) et (6.2)) que les termes principaux proviennent des dérivations successives de $D(z, \zeta)$. Mais si l'on pose

$$E(x) = -r(\zeta)+\langle P, \zeta-z\rangle,$$
$$F(x) = \langle Q, \zeta-z\rangle,$$

on peut montrer, en reprenant les calculs de [8] (p. 248-252), que

$$\begin{cases} E(x) = -r(\zeta)+x_1+\mathcal{O}(|x|^2), \\ F(x) - x_1+\mathcal{O}(|x|^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x_1}(x) = \mathcal{O}(1), & \dfrac{\partial E}{\partial x_i}(x) = \mathcal{O}(|x|) \quad \text{si} \quad i = 2,\ 3, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \mathcal{O}(1), & \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \mathcal{O}(|x|) \quad \text{si} \quad i = 2,\ 3, \end{cases}$$

tandis que les dérivées d'ordre supérieur sont $\mathcal{O}$ (1); toutes ces majorations sont indépendantes de ζ.

Donc, en particulier,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D^{-1} = 2E^{-3}F^{-1}\frac{\partial E}{\partial x_i} - E^{-2}F^{-2}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$\leqslant C(-r(\zeta)+\rho(z,\zeta'))^{-4},$$

puisque ([8], 1.7.1) :

$$[E(x)]^p[F(x)]^q \geqslant c[-r(\zeta)+\rho(z,\zeta')]^{p+q}.$$

Si $i = 2,\ 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D^{-1} \leqslant C|x|(-r(\zeta)+\rho(z,\zeta'))^{-4}$$

$$\leqslant C[-r(\zeta)+\rho(z,\zeta')]^{-1/2},$$

en vertu de (6.3).

(D) *Équation* $\bar{\partial}_b u = w$ *: solutions dans les espaces de Lipschitz.*

On appelle Γ^β ([3]) l'espace des fonctions u bornées sur ∂D qui appartiennent à la classe de Lipschitz $\Lambda^{\beta/2}$ de ∂D considérée comme variété réelle et telles que, quelle que soit la courbe intégrale d'un champ de vecteurs admissible, $s \in (0, 1) \to \gamma(s)$, la fonction $u \circ \gamma$ appartienne à $\Lambda^\beta((0, 1))$.

THÉORÈME 8.

(i) *soit* w *une* (0, 1)*-forme* $\bar{\partial}$*-fermée dont les coefficients sont des mesures de Carleson, ainsi que les coefficients de la forme* $(\bar{\partial} r \wedge w)/\sqrt{-r}$. *Il existe alors une solution dans* BMO *à l'équation* $\bar{\partial}_b u = w$;

(ii) *soit* w *une* (0, 1)-*forme dont les coefficients appartiennent à* $V^{\alpha}(D)$, *ainsi que les coefficients de la forme* $(\bar{\partial} r \wedge w)/\sqrt{-r}$, *avec*

$$1 < \alpha < 1+((k-1)/2n).$$

Il existe alors une solution dans Γ^{β} *à l'équation* $\bar{\partial}_b u = w$, *avec* $\beta = 2n(\alpha-1)$.

La partie (i) a été démontrée dans [13] par N. VAROPOULOS. On l'obtient aisément ici comme corollaire du théorème 4 : il suffit de montrer que les noyaux $\tilde{K}_t$ et $\tilde{L}_t$ satisfont à l'hypothèse (H3) ce qui découle du lemme 5.

La partie (ii) peut également être obtenue comme corollaire du théorème 4 lorsque $\beta < 1$. Nous allons toutefois reprendre la démonstration pour la généraliser aisément à toute valeur de β.

Il s'agit de montrer le lemme suivant :

LEMME 7. — *Soit* μ *une mesure de Carleson d'ordre* α *positive, où* $1 < \alpha < 1+((k-1)/2n)$, *et soit* $s \in [0, 1] \to \gamma(s)$ *la courbe intégrale d'un champ de vecteurs* X *de classe* $\mathscr{C}^k$. *Alors si* Q *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$ *sur* $\partial D \times \bar{D} \setminus \Delta$ *satisfaisant aux conclusions du lemme 5, la fonction*

$$v(s) = \int_D Q(\gamma(s), \zeta)\, d\mu(\zeta)$$

appartient à l'espace $\Lambda^{\beta/2}([0, 1])$, *avec* $\beta = 2n(\alpha-1)$. *Si* X *est admissible,* v *appartient à* $\Lambda^{\beta}([0, 1])$.

Si la mesure μ est à support compact dans D, le noyau Q, qui est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, est évidemment majoré ainsi que ses dérivées sur le support de μ, et v est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. On peut donc supposer que μ est à support dans $D_{\varepsilon} \simeq]0, \varepsilon[\times \partial D$.

Soit $1 < \alpha < 1+(1/2n)$ de sorte que $\beta < 1$, et soient s_0 et s_1 dans l'intervalle $[0, 1]$. Quitte à supposer $|s_0 - s_1| < \delta$ (où δ ne dépend que de la norme dans L^{∞} de X), quel que soit $s \in [s_0, s_1]$, $\gamma(s)$ appartient à la boule B de centre $\gamma(s_0)$ de rayon $2t_0 = 2\rho(\gamma(s_0), \gamma(s_1))$. Soit

$$\tilde{B} = B(\gamma(s_0), 2Kt_0).$$

En vertu du lemme 2, puisque le noyau $\tilde{Q}_t$ sur ∂D

$$\tilde{Q}_t(\zeta, z) = Q(z, \varphi^{-1}(t, \zeta))$$

satisfait à l'hypothèse (H2),

$$\int_{T(\tilde{B})} |Q(\gamma(s), \zeta)|\, d\mu(\zeta) \leqslant C\mu(T(\tilde{B})) \leqslant C t_0^{n(\alpha-1)}.$$

Il nous reste à majorer

$$\int_{\complement T(B)} |Q(\gamma(s_1), \zeta) - Q(\gamma(s_0), \zeta)| \, d\mu(\zeta)$$

ou encore

$$|s_1 - s_0| \int_{\complement T(B)} \sup_{s \in (s_0, s_1)} |XQ(\gamma(s), \zeta)| \, d\mu(\zeta).$$

Mais (lemme 5) :

$$\begin{aligned} |XQ(\gamma(s), \zeta)| &\leqslant C[-r(\zeta) + \rho(\gamma(s), \zeta')]^{-\eta} \\ &\leqslant C[-r(\zeta) + \rho(\gamma(s_0), \zeta')]^{-\eta}, \end{aligned}$$

où $\eta = n+1$ si X est quelconque, $\eta = n+(1/2)$ si X est admissible, et ceci sous l'hypothèse que $\zeta \notin T(\tilde{B})$ puisque, $\gamma(s)$ et $\gamma(s_0)$ appartenant à la boule B,

$$-r(\zeta) + \rho(\gamma(s), \zeta') \simeq -r(\zeta) + \rho(\gamma(s_0), \zeta').$$

Il suffit d'appliquer encore une fois le lemme 2 pour obtenir que

$$|v(s_1) - v(s_0)| \leqslant C[t_0^{n(\alpha+1)} + (s_1 - s_0) t_0^{n\alpha - \eta}].$$

On conclut en vérifiant que $t_0 = \rho(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) \leqslant C|s_1 - s_0|$ si X est quelconque, $t_0 \leqslant C|s_1 - s_0|^2$ si X est admissible.

Nous avons démontré le lemme 7 lorsque $\beta < 1$. Lorsque $\beta = 1$, il nous faut majorer la différence symétrique $v(s+h) + v(s-h) - 2v(s)$ si X est un champ admissible. Pour ce faire, on contrôle la différence symétrique de $Q(\gamma(s), \zeta)$, grâce aux majorations sur les dérivées secondes, par $(-r(\zeta) + \rho(\gamma(s), \zeta'))^{-n-1} h^2$. Le reste de la démonstration est analogue.

Plus généralement, si $\beta \in)j, j+1)$, $j < k-1$, v est de classe $\mathscr{C}^j$ si X est admissible puisque, quel que soit $m \leqslant j$,

$$|X^m Q(\gamma(s), \zeta)| \leqslant C[-r(\zeta) + \rho(\gamma(s), \zeta')]^{-n-(m/2)},$$

qui est intégrable par rapport aux mesures de Carleson d'ordre α, avec $n\alpha < n+(m/2)$ d'après le lemme 2. Le fait que $v^{(j)}$ satisfait à une condition de Lipschitz se démontre comme précédemment.

Les mêmes méthodes sont valables lorsque X est quelconque. La norme dans $\Lambda^{\beta/2}$ ou Λ^{β} de v ne dépend évidemment que de la norme de X dans $\mathscr{C}^k$, et la norme de μ dans V^{α}.

Remarque 1. — Il est aisé de montrer que les estimations des théorèmes 7 et 8 sont les meilleures estimations qu'on puisse obtenir pour la solution de H. SKODA à l'équation $\bar{\partial}_b u = \omega$: il suffit de considérer, par exemple, lorsque D est la boule unité de $\mathbf{C}^n$, les (0, 1)-formes $w = \mu\, \partial r$, où $d\mu$ est l'une des mesures $r(\zeta_0)^\alpha\, d\delta_{\zeta_0}$ ($\zeta_0 \in D$) ou bien $t^\alpha\, dt\, d\delta_{\zeta'_0}(\zeta')$ si D est paramétré par $\zeta = t\,\zeta'$, $\zeta' \in \partial D$.

Remarque 2. — On peut faire beaucoup mieux : N. VAROPOULOS a montré dans [13] que le résultat (i) du théorème 8 était le meilleur possible, en ce sens qu'il n'existe pas forcément de solution dans L^∞ de l'équation $\bar\partial_b\, u = w$ lorsque w et $(\bar\partial r \wedge w)/\sqrt{-r}$ sont à coefficients mesures de Carleson. On peut montrer de même que le résultat (ii) du théorème 8 et le théorème 7 sont les meilleurs possibles : soit par exemple $u \in L^{p,\,\infty}(\partial D)$. On peut construire (*voir* § 5) un prolongement $\tilde u$ de u à D tel que les coefficients des formes $\bar\partial u$ et $(\bar\partial r \wedge \bar\partial u)/\sqrt{-r}$ soient des mesures de Carleson d'ordre α, $\alpha = 1-(1/p)$. Supposons qu'il existe une solution v dans L^p à l'équation $\bar\partial_b\, v = \bar\partial \tilde u$: u étant évidemment solution, c'est dire que $v-u$ est valeur au bord d'une fonction analytique. Soit S le projecteur de Szegö dont on sait [6] qu'il est borné dans $L^p(\partial D)$: $(I-S)(v-u) = 0$, donc $(I-S)\,u$ est dans L^p, ce qui est évidemment faux en général.

Remarque 3. — Les théorèmes 7 et 8 se généralisent évidemment aux (p, q)-formes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COIFMAN (R.) et WEISS (G.). — *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 242).

[2] DUREN (P.). — Extension of a theorem of Carleson, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 143-146.

[3] FOLLAND (G.) and STEIN (E. M.). — Estimates for the $\bar\partial_b$-complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. on pure and appl. Math.*, t. 27, 1974, p. 429-522.

[4] HÖRMANDER (L.). — L^p estimates for (pluri)-subharmonic functions, *Math. Scand.*, t. 20, 1967, p. 65-78.

[5] JONES (P.). — *Extension theorems for BMO* (à paraître).

[6] PHONG (D.) and STEIN (E.). — Estimates for the Bergman and Szegö projections on strongly pseudo-convex domains, *Duke math. J.*, t. 44, 1977, p. 695-704.

[7] RUDIN (W.). — The radial variation of analytic functions, *Duke math. J.*, t. 22, 1955, p. 235-242.

[8] SKODA (H.). — Valeurs au bord pour l'opérateur d″..., *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 104, 1976, p. 225-299.

[9] STEIN (E.). — *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables.* — Princeton University Press, 1972 (*Mathematical Notes Princeton University Press*).

[10] STEIN (E.). — Singular integrals and estimates for the Cauchy Riemann equations, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 79, 1973, p. 440-445.

[11] STEIN (E.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton, Princeton University Press, 1970 (*Princeton mathematical Series*, 30).

[12] STROMBERG (J.). — Communication orale.

[13] VAROPOULOS (N.). — BMO functions and the $\bar\partial$ equation, *Pacific J. Math.*, t. 71, 1977, p. 221-273.