

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL TALAGRAND

**Sur les convexes compacts dont l'ensemble des points extrémaux est  $\mathcal{K}$ -analytique**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 107 (1979), p. 49-53

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1979\\_\\_107\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__49_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES CONVEXES COMPACTS  
DONT L'ENSEMBLE DES POINTS EXTRÊMAUX  
EST  $\mathcal{K}$ -ANALYTIQUE**

PAR

MICHEL TALAGRAND (\*)

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI]

RÉSUMÉ. — On démontre que si l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points extrémaux d'un convexe compact est  $\mathcal{K}$ -analytique, alors  $\mathcal{E}$  est borélien (d'un type très spécial). Si de plus  $\mathcal{E}$  est analytique propre au sens de J. E. JAYNE, c'est un  $K_{\sigma\delta}$ .

Soient  $K$  un convexe compact, et  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ses points extrémaux. Lorsque  $K$  est métrisable,  $\mathcal{E}$  est un  $G_\delta$ , qui peut d'ailleurs ne pas être  $K_\sigma$  [3]. Lorsque  $K$  n'est pas métrisable, la situation est beaucoup plus complexe, puisque  $\mathcal{E}$  peut être très irrégulier. Par contre, plusieurs résultats connus montrent que si on impose à  $\mathcal{E}$  une condition de régularité *a priori* assez faible, alors  $\mathcal{E}$  est en fait très régulier. Ainsi, par exemple, si  $\mathcal{E}$  peut s'obtenir à partir des  $G_\delta$  fermés de  $K$  par l'opération de Souslin,  $K$  est métrisable [7] et donc  $\mathcal{E}$  est un  $G_\delta$ . La même conclusion découle aussi de l'hypothèse que  $\mathcal{E}$  est image continue d'un espace métrisable séparable [4]. Dans ce travail on apporte, dans cette même direction, des solutions partielles au problème suivant (dû à G. CHOQUET). Lorsque  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{K}$ -analytique (c'est-à-dire image continue d'un  $K_{\sigma\delta}$  d'un espace compact [1]), est-ce que  $\mathcal{E}$  est un  $K_{\sigma\delta}$ ?

La définition suivante est due à L. VAŠAK [11] :

DÉFINITION 1. — Soit  $K$  un espace compact. Un sous-ensemble  $A$  de  $K$  est dit *dénombrablement déterminé* (d. d.) s'il existe une famille dénombrable  $(A_n)$  de compacts de  $K$  telle que, pour  $x \in A$  et  $y \notin A$ , il existe  $n$  tel que  $x \in A_n$  et  $y \notin A_n$ .

Par exemple, tout sous-ensemble de  $(0, 1)$  est d. d. Dans un espace compact, tout sous-ensemble  $\mathcal{K}$ -analytique et toute image continue d'un espace métrisable séparable sont d. d. On le voit sans peine (où on se reporte à [10], proposition 1.1).

---

(\*) (Texte reçu le 28 novembre 1977.)

Michel TALAGRAND, Équipe d'Analyse (E.R.A. n° 294), Mathématiques, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

THÉORÈME 2. — Si l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points extrémaux d'un convexe compact  $K$  est d. d. (par exemple s'il est  $\mathcal{X}$ -analytique), on peut l'écrire

$$\mathcal{E} = \bigcap_n (F_n \cup V_n),$$

où, pour chaque  $n$ , l'ensemble  $F_n$  est fermé, et l'ensemble  $V_n$  ouvert. (On peut bien sûr imposer de plus à  $F_n$  d'être disjoint de  $V_n$ .) En particulier,  $\mathcal{E}$  est borélien.

Démonstration. — Soit  $(A_n)$  une suite de compacts tels que, pour tout  $x \in \mathcal{E}$  et tout  $y \notin \mathcal{E}$ , il existe  $n$  tel que  $x \in A_n$  et  $y \notin A_n$ .

Désignons par  $M_1^+(K)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $K$ , muni de la topologie vague, et par  $r(\mu)$  la résultante d'une mesure  $\mu \in M_1^+(K)$  (on a donc  $f(r(\mu)) = \mu(f)$  pour toute fonction  $f$  affine continue).

Pour toute partie finie  $P$  de  $\mathbb{N}$ , posons

$$A_P = \bigcup_{n \in P} A_n,$$

puis

$$B_P = \left\{ x \in K; \exists \mu \in M_1^+(K), x = r(\mu), \mu(A_P) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

On a  $A_P \subset B_P$ . Puisque  $r$  est continue, et l'ensemble  $\{ \mu \in M_1^+(K); \mu(A_P) \geq 1/2 \}$  fermé,  $B_P$  est fermée. Nous allons prouver que

$$\mathcal{E} = \bigcap_P A_P \cup B_P^c.$$

Soit  $x \in \mathcal{E} \cap B_P$  pour une partie finie  $P$  de  $\mathbb{N}$ . On a  $x = r(\mu)$ , avec  $\mu(A_P) \geq 1/2$ . Puisque  $x \in \mathcal{E}$ , on a  $\mu = \delta_x$ , mesure de Dirac en  $x$ . Puisque  $\delta_x(A_P) \geq 1/2$ , on a  $x \in A_P$ . Ainsi  $\mathcal{E} \cap B_P \subset A_P$ , ce qui montre que  $\mathcal{E} \subset \bigcap_P A_P \cup B_P^c$ .

Soit maintenant  $y \notin \mathcal{E}$ . On sait qu'il existe  $\mu \in M_1^+(K)$  telle que  $y = r(\mu)$  et que  $\mu(H) = 1$  pour tout ensemble  $H$  qui est un  $F_\sigma$  et qui contient  $\mathcal{E}$  ([1], lemme 27.14). Pour tout  $x \in \mathcal{E}$ , il existe  $n$  tel que  $x \in A_n$  et  $y \notin A_n$ . Il existe donc une suite  $(n_k)$  telle que  $\mathcal{E} \subset \bigcup_k A_{n_k}$  et  $y \notin \bigcup_k A_{n_k}$ . On a donc  $\mu(\bigcup_k A_{n_k}) = 1$ . Ainsi, il existe une partie finie  $P$  de  $\mathbb{N}$ , contenue dans l'ensemble des  $n_k$ , et telle que  $\mu(A_P) \geq 1/2$ . On a alors  $y \notin A_P$ , d'où  $y \in B_P \setminus A_P = (A_P \cup B_P^c)^c$ .

C.Q.F.D.

Il convient de remarquer que l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact (même si c'est un simplexe) peut être un ouvert non  $K_\sigma$ .

de son adhérence. C'est alors un borélien qui n'est pas d. d., puisque on voit sans peine qu'un ouvert d. d. d'un espace compact est  $K_\sigma$ .

Rappelons que l'on dit qu'une application d'un espace topologique  $X$  dans un espace topologique  $Y$  est *propre* si elle est continue, fermée, et telle que les images réciproques des points soient compactes. Dans [5], R. C. JAYNE appelle *analytique propres* les espaces topologiques  $X$  tels qu'il existe une application propre de  $X$  sur un sous-ensemble analytique classique d'un espace compact métrisable.

THÉORÈME 3. — *Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points extrémaux du convexe compact  $K$ . S'il existe une application propre de  $\mathcal{E}$  sur un espace métrisable séparable (donc en particulier si  $\mathcal{E}$  est un analytique propre) on peut écrire*

$$\mathcal{E} = \bigcap_n (F_n \cup O_n),$$

où, pour chaque  $n$ , l'ensemble  $F_n$  est fermé et l'ensemble  $O_n$  est un ouvert  $K_\sigma$  disjoint de  $F_n$ . En particulier,  $\mathcal{E}$  est un  $K_{\sigma\delta}$ .

*Démonstration.* — Soit  $f$  une application propre de  $\mathcal{E}$  sur un espace métrisable séparable  $Y$ . Soit  $(V_n)$  une base d'ouverts de  $Y$ . Pour tout  $n$ , posons  $A_n = \overline{f^{-1}(V_n)}$ .

Soient  $x \in \mathcal{E}$  et  $y \notin \mathcal{E}$ . Il existe un voisinage fermé  $W$  de  $y$  tel que  $f^{-1}(f(x)) \cap W = \emptyset$ . Puisque  $f$  est fermée,  $f(W)$  est un fermé ne contenant pas  $f(x)$ . Il existe donc  $n$  tel que  $f(x) \in V_n$  et  $V_n \cap f(W) = \emptyset$ . On a alors  $x \in A_n$  et  $y \notin A_n$ , puisque  $A_n \subset \overline{W^c}$ .

Il en résulte que  $\mathcal{E}$  est d. d., et, en reprenant les notations de la preuve du théorème 2, que l'on a  $\mathcal{E} = \bigcap_P A_P \cup B_P^c$ . Il suffit donc de prouver que, pour toute  $P$ , il existe un ouvert  $O_P$  qui soit  $K_\sigma$  et tel que  $\mathcal{E} \cap B_P^c \subset O_P \subset B_P^c$ . Puisque  $B_P^c$  est ouvert, il suffit, d'après le théorème de Urysohn, de construire un ensemble  $H_P$  qui soit  $K_\sigma$  et tel que  $\mathcal{E} \cap B_P^c \subset H_P \subset B_P^c$ .

Soit  $x \in \mathcal{E} \cap B_P^c$ . Puisque  $x \notin A_P$ , on a  $f(x) \notin \bigcup_{n \in P} \overline{V_n}$ . On a donc  $f^{-1}(f(x)) \cap A_P = \emptyset$  puisque,  $f$  étant continue, on a

$$A_P \cap \mathcal{E} = f^{-1}(\bigcup_{n \in P} \overline{V_n}).$$

Soit alors  $W$  un voisinage fermé de  $B_P$  ne rencontrant pas  $f^{-1}(f(x))$ . Alors  $f(W)$  est un fermé ne contenant pas  $x$ . Il existe donc  $n$  tel que  $f(x) \in V_n$  et  $\overline{V_n} \cap f(W) = \emptyset$ , c'est-à-dire que  $x \in A_n$  et  $A_n \cap B_P = \emptyset$ . Il suffit de choisir, pour  $H_P$ , la réunion des  $A_n$  ainsi obtenus.

Les théorèmes 2 et 3 ne résolvent hélas pas le problème de CHOQUET, cité dans l'introduction, qui est à l'origine de ce travail. Le théorème 2 amène la question suivante :

PROBLÈME 4. — Soient  $K$  un espace compact, et  $X$  un sous-ensemble  $\mathcal{H}$ -analytique de  $K$  qui peut s'écrire  $\bigcap_n F_n \cup O_n$ , où, pour chaque  $n$ ,  $F_n$  est fermé et  $O_n$  ouvert. Alors  $X$  est-il un  $K_{\sigma\delta}$ ?

Nous n'avons pu résoudre ce problème, même en supposant  $X$  réunion d'un ouvert et d'un fermé (il est par contre facile de voir qu'un ensemble analytique propre, qui est réunion d'un compact et d'un ouvert, est un  $K_{\sigma}$ ). La difficulté du problème 4 provient du fait que, si un sous-ensemble  $\mathcal{H}$ -analytique  $X$  de  $K$  est contenu dans la réunion  $F \cup O$  d'un ouvert et d'un fermé, il n'existe pas nécessairement d'ensemble  $H$  qui soit  $K_{\sigma}$  et tel que  $X \subset H \subset F \cup O$ . Voici un exemple instructif de cette situation : considérons un point  $\infty$  n'appartenant pas à  $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , et plaçons, sur  $X = \{\infty\} \cup \Sigma$ , la topologie qui rend  $\Sigma$  discret, et admet, pour base de voisinages du point  $\infty$ , les complémentaires des parties de  $\Sigma$  qui sont discrètes et fermées pour la topologie usuelle. Cette topologie est complètement régulière. Dans chacun de ses compactifiés,  $X$  est réunion de l'ouvert  $\Sigma$  et du point  $\infty$ , et il est  $\mathcal{H}$ -analytique puisqu'il s'écrit

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{s < \sigma} \overline{A_s}, \quad \text{où } A_s = \{\infty\} \cup \{\sigma \in \Sigma; s < \sigma\}.$$

Un sous-ensemble compact de  $X$  possède une trace sur  $\Sigma$  qui ne contient aucune partie infinie discrète et fermée pour la topologie usuelle, donc est relativement compacte pour cette même topologie. Puisque  $\Sigma$  n'est pas un  $K_{\sigma}$  pour la topologie usuelle,  $X$  n'est pas un  $K_{\sigma}$ . Il est aisé de voir que  $X$  est un  $K_{\sigma\delta}$  de son compactifié de Stone-Čech. Nous n'avons pu décider si c'est un  $K_{\sigma\delta}$  dans chacun de ses compactifiés. Ce résultat clarifierait la situation, mais ne serait pas d'une aide directe puisqu'on peut montrer que  $X$  n'est pas homéomorphe à l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact. On peut montrer par une modification de l'exemple précédent que même si  $X$  est analytique propre, et contenu dans la réunion  $F \cup O$  d'un ouvert et d'un fermé, on ne peut pas toujours trouver d'ensemble  $H$  qui soit  $K_{\sigma}$  et tel que  $X \subset H \subset F \cup O$ .

Pour terminer, nous allons construire un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un  $K_{\sigma}$  qui n'est pas un  $G_{\delta}$  de son adhérence, ce qui résout un problème de H. FAKHOURY [2].

Considérons l'espace  $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , compactifié d'Aleksandrov de  $\mathbb{N}$ . Soit  $I$  un ensemble non dénombrable. Soit  $T$  le compactifié d'Aleksandrov

de  $I \times \mathbb{N}$ , muni de la topologie produit ( $I$  étant muni de la topologie discrète). On désigne par  $\omega$  le point à l'infini. L'ensemble  $X = \{\omega\} \cup I \times \mathbb{N}$  est dense dans  $T$ . Il est réunion du fermé  $\{\omega\}$  et de l'ouvert  $I \times \mathbb{N}$ . C'est un  $K_\sigma$  puisque chaque ensemble  $\{\omega\} \cup I \times \{n\}$  est compact. Ce n'est pas un  $G_\delta$  de  $T$  puisque tout fermé de  $T \setminus X$  est fini et que  $T \setminus X$  n'est pas dénombrable.

Considérons le sous-espace vectoriel  $F$  de  $\varphi(T)$  formé des fonctions continues qui vérifient

$$\forall i \in I, f((i, \infty)) = \frac{1}{2} [f((i, 1)) + f((i, 2))].$$

L'ensemble des formes linéaires positives  $\varphi$  sur  $F$  qui vérifient  $\varphi(1) = 1$ , est un convexe compact lorsqu'il est muni de la topologie vague. On vérifie sans peine que c'est un simplexe, et que l'application, qui envoie un point de  $T$  sur la mesure de Dirac associée, est un homéomorphisme de  $T$  sur son image, qui envoie  $X$  sur l'ensemble des points extrémaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, Vol. 2. — New York, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).
- [2] FAKHOURY (H.). — Stabilité des simplexes de Lion, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A, 1970, p. 110-112.
- [3] HAYDON (R.). — A new proof that every polish space is the extreme boundary of a simplex, *Bull. London math. Soc.*, t. 7, 1975, p. 97-100.
- [4] HAYDON (R.). — An extreme point criterion for separability of a dual Banach space, and a new proof of a theorem of Corson, *Quarterly J. Math.*, 2nd Series, t. 27, 1976, p. 379-385.
- [5] JAYNE (J. E.). — Characterisation and metrization of proper analytic spaces, *Invent. Math.*, Berlin, t. 22, 1973, p. 51-62.
- [6] JAYNE (J. E.). — *Metrization of compact convex sets* (à paraître).
- [7] MACGIBBON (B.). — A criterion for the metrization of a compact convex set in terms of the set of extreme points, *J. Funct. Anal.*, t. 11, 1972, p. 385-392.
- [8] PHELPS (R. R.). — *Lectures on Choquet's theorem*. — Princeton, D. van Nostrand Company, 1966 (*Van Nostrand mathematical Studies*, 7).
- [9] TALAGRAND (M.). — Sur la structure, borélienne des espaces analytiques, *Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 101, 1977, p. 415-422.
- [10] TALAGRAND (M.). — Espaces de Banach faiblement  $\mathcal{H}$ -analytiques, *Annals of Math.* (à paraître).
- [11] VAŠAK (L.). — On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces, *Studia Math.*, Warszawa (à paraître).