BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL TALAGRAND

Sur les convexes compacts dont l'ensemble des points extrémaux est $\mathcal{K}$-analytique

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 49-53

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__49_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 49-53.

SUR LES CONVEXES COMPACTS DONT L'ENSEMBLE DES POINTS EXTRÉMAUX EST $\mathscr{K}$-ANALYTIQUE

PAR

MICHEL TALAGRAND (*)

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI]

RÉSUMÉ. — On démontre que si l'ensemble $\mathscr{E}$ des points extrémaux d'un convexe compact est $\mathscr{K}$-analytique, alors $\mathscr{E}$ est borélien (d'un type très spécial). Si de plus $\mathscr{E}$ est analytique propre au sens de J. E. JAYNE, c'est un $K_{\sigma\delta}$.

Soient K un convexe compact, et $\mathscr{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Lorsque K est métrisable, $\mathscr{E}$ est un G_δ, qui peut d'ailleurs ne pas être K_σ [3]. Lorsque K n'est pas métrisable, la situation est beaucoup plus complexe, puisque $\mathscr{E}$ peut être très irrégulier. Par contre, plusieurs résultats connus montrent que si on impose à $\mathscr{E}$ une condition de régularité *a priori* assez faible, alors $\mathscr{E}$ est en fait très régulier. Ainsi, par exemple, si $\mathscr{E}$ peut s'obtenir à partir des G_δ fermés de K par l'opération de Souslin, K est métrisable [7] et donc $\mathscr{E}$ est un G_δ. La même conclusion découle aussi de l'hypothèse que $\mathscr{E}$ est image continue d'un espace métrisable séparable [4]. Dans ce travail on apporte, dans cette même direction, des solutions partielles au problème suivant (dû à G. CHOQUET). Lorsque $\mathscr{E}$ est $\mathscr{K}$-analytique (c'est-à-dire image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact [1], est-ce que $\mathscr{E}$ est un $K_{\sigma\delta}$?

La définition suivante est due à L. VAŠAK [11] :

DÉFINITION 1. — *Soit K un espace compact. Un sous-ensemble A de K est dit dénombrablement déterminé* (d. d.) *s'il existe une famille dénombrable (A_n) de compacts de K telle que, pour $x \in A$ et $y \notin A$, il existe n tel que $x \in A_n$ et $y \notin A_n$.*

Par exemple, tout sous-ensemble de $(0, 1)$ est d.d. Dans un espace compact, tout sous-ensemble $\mathscr{K}$-analytique et toute image continue d'un espace métrisable séparable sont d. d. On le voit sans peine (où on se reporte à [10], proposition 1.1).

(*) (Texte reçu le 28 novembre 1977.)

Michel TALAGRAND, Équipe d'Analyse (E.R.A. n° 294), Mathématiques, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

THÉORÈME 2. — *Si l'ensemble $\mathscr{E}$ des points extrémaux d'un convexe compact K est d. d. (par exemple s'il est $\mathscr{K}$-analytique), on peut l'écrire*

$$\mathscr{E} = \bigcap_n (F_n \cup V_n),$$

où, pour chaque n, l'ensemble F_n est fermé, et l'ensemble V_n ouvert. (On peut bien sûr imposer de plus à F_n d'être disjoint de V_n.) En particulier, $\mathscr{E}$ est borélien.

Démonstration. — Soit (A_n) une suite de compacts tels que, pour tout $x \in \mathscr{E}$ et tout $y \notin \mathscr{E}$, il existe n tel que $x \in A_n$ et $y \notin A_n$.

Désignons par $M_1^+ (K)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur K, muni de la topologie vague, et par $r(\mu)$ la résultante d'une mesure $\mu \in M_1^+ (K)$ (on a donc $f(r(\mu)) = \mu(f)$ pour toute fonction f affine continue).

Pour toute partie finie P de $\mathbf{N}$, posons

$$A_P = \bigcup_{n \in P} A_n,$$

puis

$$B_P = \left\{ x \in K;\ \exists\, \mu \in M_1^+ (K),\ x = r(\mu),\ \mu(A_P) \geqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

On a $A_P \subset B_P$. Puisque r est continue, et l'ensemble $\{ \mu \in M_1^+ (K);\ \mu(A_P) \geqslant 1/2 \}$ fermé, B_P est fermée. Nous allons prouver que

$$\mathscr{E} = \bigcap_P A_P \cup B_P^c.$$

Soit $x \in \mathscr{E} \cap B_P$ pour une partie finie P de $\mathbf{N}$. On a $x = r(\mu)$, avec $\mu(A_P) \geqslant 1/2$. Puisque $x \in \mathscr{E}$, on a $\mu = \delta_x$, mesure de Dirac en x. Puisque $\delta_x(A_P) \geqslant 1/2$, on a $x \in A_P$. Ainsi $\mathscr{E} \cap B_P \subset A_P$, ce qui montre que $\mathscr{E} \subset \bigcap_P A_P \cup B_P^c$.

Soit maintenant $y \notin \mathscr{E}$. On sait qu'il existe $\mu \in M_1^+ (K)$ telle que $y = r(\mu)$ et que $\mu(H) = 1$ pour tout ensemble H qui est un F_σ et qui contient $\mathscr{E}$ ([1], lemme 27.14). Pour tout $x \in \mathscr{E}$, il existe n tel que $x \in A_n$ et $y \notin A_n$. Il existe donc une suite (n_k) telle que $\mathscr{E} \subset \bigcup_k A_{n_k}$ et $y \notin \bigcup_k A_{n_k}$. On a donc $\mu(\bigcup_k A_{n_k}) = 1$. Ainsi, il existe une partie finie P de $\mathbf{N}$, contenue dans l'ensemble des n_k, et telle que $\mu(A_P) \geqslant 1/2$. On a alors $y \notin A_P$, d'où $y \in B_P \setminus A_P = (A_P \cup B_P^c)^c$.

C.Q.F.D.

Il convient de remarquer que l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact (même si c'est un simplexe) peut être un ouvert non K_σ

de son adhérence. C'est alors un borélien qui n'est pas d. d., puisque on voit sans peine qu'un ouvert d. d. d'un espace compact est K_σ.

Rappelons que l'on dit qu'une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est *propre* si elle est continue, fermée, et telle que les images réciproques des points soient compactes. Dans [5], R. C. JAYNE appelle *analytique propres* les espaces topologiques X tels qu'il existe une application propre de X sur un sous-ensemble analytique classique d'un espace compact métrisable.

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points extrémaux du convexe compact K. S'il existe une application propre de $\mathscr{E}$ sur un espace métrisable séparable (donc en particulier si $\mathscr{E}$ est un analytique propre) on peut écrire*

$$\mathscr{E} = \bigcap_n (F_n \cup O_n),$$

où, pour chaque n, l'ensemble F_n est fermé et l'ensemble O_n est un ouvert K_σ disjoint de F_n. En particulier, $\mathscr{E}$ est un $K_{\sigma\delta}$.

Démonstration. — Soit f une application propre de $\mathscr{E}$ sur un espace métrisable séparable Y. Soit (V_n) une base d'ouverts de Y. Pour tout n, posons $A_n = \overline{f^{-1}(\overline{V_n})}$.

Soient $x \in \mathscr{E}$ et $y \notin \mathscr{E}$. Il existe un voisinage fermé W de y tel que $f^{-1}(f(x)) \cap W = \emptyset$. Puisque f est fermée, $f(W)$ est un fermé ne contenant pas $f(x)$. Il existe donc n tel que $f(x) \in V_n$ et $V_n \cap f(W) = \emptyset$. On a alors $x \in A_n$ et $y \notin A_n$, puisque $A_n \subset \overset{\circ}{(W^c)}$.

Il en résulte que $\mathscr{E}$ est d. d., et, en reprenant les notations de la preuve du théorème 2, que l'on a $\mathscr{E} = \bigcap_P A_P \cup B_P^c$. Il suffit donc de prouver que, pour toute P, il existe un ouvert O_P qui soit K_σ et tel que $\mathscr{E} \cap B_P^c \subset O_P \subset B_P^c$. Puisque B_P^c est ouvert, il suffit, d'après le théorème de Urysohn, de construire un ensemble H_P qui soit K_σ et tel que $\mathscr{E} \cap B_P^c \subset H_P \subset B_P^c$.

Soit $x \in \mathscr{E} \cap B_P^c$. Puisque $x \notin A_P$, on a $f(x) \notin \bigcup_{n \in P} \overline{V_n}$. On a donc $f^{-1}(f(x)) \cap A_P = \emptyset$ puisque, f étant continue, on a

$$A_P \cap \mathscr{E} = f^{-1}(\bigcup_{n \in P} \overline{V_n}).$$

Soit alors W un voisinage fermé de B_P ne rencontrant pas $f^{-1}(f(x))$. Alors $f(W)$ est un fermé ne contenant pas x. Il existe donc n tel que $f(x) \in V_n$ et $\overline{V_n} \cap f(W) = \emptyset$, c'est-à-dire que $x \in A_n$ et $A_n \cap B_P = \emptyset$. Il suffit de choisir, pour H_P, la réunion des A_n ainsi obtenus.

Les théorèmes 2 et 3 ne résolvent hélas pas le problème de CHOQUET, cité dans l'introduction, qui est à l'origine de ce travail. Le théorème 2 amène la question suivante :

PROBLÈME 4. — *Soient K un espace compact, et X un sous-ensemble $\mathcal{K}$-analytique de K qui peut s'écrire $\bigcap_n F_n \cup O_n$, où, pour chaque n, F_n est fermé et O_n ouvert. Alors X est-il un $K_{\sigma\delta}$?*

Nous n'avons pu résoudre ce problème, même en supposant X réunion d'un ouvert et d'un fermé (il est par contre facile de voir qu'un ensemble analytique propre, qui est réunion d'un compact et d'un ouvert, est un K_σ). La difficulté du problème 4 provient du fait que, si un sous-ensemble $\mathcal{K}$-analytique X de K est contenu dans la réunion $F \cup O$ d'un ouvert et d'un fermé, il n'existe pas nécessairement d'ensemble H qui soit K_σ et tel que $X \subset H \subset F \cup O$. Voici un exemple instructif de cette situation : considérons un point ∞ n'appartenant pas à $\Sigma = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, et plaçons, sur $X = \{ \infty \} \cup \Sigma$, la topologie qui rend Σ discret, et admet, pour base de voisinages du point ∞, les complémentaires des parties de Σ qui sont discrètes et fermées pour la topologie usuelle. Cette topologie est complètement régulière. Dans chacun de ses compactifiés, X est réunion de l'ouvert Σ et du point ∞, et il est $\mathcal{K}$-analytique puisqu'il s'écrit

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{s \prec \sigma} \overline{A_s}, \qquad \text{où} \quad A_s = \{ \infty \} \cup \{ \sigma \in \Sigma ;\ s < \sigma \}.$$

Un sous-ensemble compact de X possède une trace sur Σ qui ne contient aucune partie infinie discrète et fermée pour la topologie usuelle, donc est relativement compacte pour cette même topologie. Puisque Σ n'est pas un K_σ pour la topologie usuelle, X n'est pas un K_σ. Il est aisé de voir que X est un $K_{\sigma\delta}$ de son compactifié de Stone-Čech. Nous n'avons pu décider si c'est un $K_{\sigma\delta}$ dans chacun de ses compactifiés. Ce résultat clarifierait la situation, mais ne serait pas d'une aide directe puisqu'on peut montrer que X n'est pas homéomorphe à l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact. On peut montrer par une modification de l'exemple précédent que même si X est analytique propre, et contenu dans la réunion $F \cup O$ d'un ouvert et d'un fermé, on ne peut pas toujours trouver d'ensemble H qui soit K_σ et tel que $X \subset H \subset F \cup O$.

Pour terminer, nous allons construire un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ qui n'est pas un G_δ de son adhérence, ce qui résoud un problème de H. FAKHOURY [2].

Considérons l'espace $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{ \infty \}$, compactifié d'Aleksandrov de $\mathbf{N}$. Soit I un ensemble non dénombrable. Soit T le compactifié d'Aleksandrov de $I \times \mathbf{N}$, muni de la topologie produit (I étant muni de la topologie discrète). On désigne par ω le point à l'infini. L'ensemble $X = \{ \omega \} \cup I \times \mathbf{N}$ est dense dans T. Il est réunion du fermé $\{ \omega \}$ et de l'ouvert $I \times \mathbf{N}$. C'est un K_σ puisque chaque ensemble $\{ \omega \} \cup I \times \{ n \}$ est compact. Ce n'est pas un G_δ de T puisque tout fermé de $T \diagdown X$ est fini et que $T \diagdown X$ n'est pas dénombrable.

Considérons le sous-espace vectoriel F de $\varphi(T)$ formé des fonctions continues qui vérifient

$$\forall i \in I, \quad f((i, \infty)) = \frac{1}{2}[f((i, 1)) + f((i, 2))].$$

L'ensemble des formes linéaires positives φ sur F qui vérifient $\varphi(1) = 1$, est un convexes compact lorsqu'il est muni de la topologie vague. On vérifie sans peine que c'est un simplexe, et que l'application, qui envoie un point de T sur la mesure de Dirac associée, est un homéomorphisme de T sur son image, qui envoie X sur l'ensemble des points extrémaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, Vol. 2. — New York, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[2] FAKHOURY (H.). — Stabilité des simplexes de Lion, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A, 1970, p. 110-112.

[3] HAYDON (R.). — A new proof that every polish space is the extreme boundary of a simplex, *Bull. London math. Soc.*, t. 7, 1975, p. 97-100.

[4] HAYDON (R.). — An extreme point criterion for separability of a dual Banach space, and a new proof of a theorem of Corson, *Quaterly J. Math.*, 2nd Series, t. 27, 1976, p. 379-385.

[5] JAYNE (J. E.). — Characterisation and metrization of proper analytic spaces, *Invent. Math.*, Berlin, t. 22, 1973, p. 51-62.

[6] JAYNE (J. E.). — *Metrization of compact convex sets* (à paraître).

[7] MACGIBBON (B.). — A criterion for the metrizability of a compact convex set in terms of the set of extreme points, *J. Funct. Anal.*, t. 11, 1972, p. 385-392.

[8] PHELPS (R. R.). — *Lectures on Choquet's theorem*. — Princeton, D. van Nostrand Company, 1966 (*Van Nostrand mathematical Studies*, 7).

[9] TALAGRAND (M.). — Sur la structure, borélienne des espaces analytiques, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 101, 1977, p. 415-422.

[10] TALAGRAND (M.). — Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques, *Annals of Math.* (à paraître).

[11] VAŠAK (L.). — On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces, *Studia Math.*, Warszawa (à paraître).