BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL DUFLO

Représentations unitaires irréductibles des groupes simples complexes de rang deux

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 55-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__55_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 55-96.

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES SIMPLES COMPLEXES DE RANG DEUX

PAR

MICHEL DUFLO (*)

[Université Paris-VII]

RÉSUMÉ. — Cet article contient une description du dual des groupes de Lie simples complexes de rang deux. Dans ce but, il fallait faire une étude détaillée des représentations appartenant à certaines séries principales dégénérées. En particulier, je donne ici la liste de celles qui sont irréductibles.

ABSTRACT. — This paper contains a description of the unitary dual of the simple complex Lie groups of rank two. For this purpose, it was necessary to make a detailed study of some degenerate principal series of these groups. I give, in particular, conditions for the irreducibility of such representations.

Table des Matières

Introduction 56

Principales notations 57

Chapitre 1 : **Généralités.**

1. Notations 57
2. $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules hermitiens et unitaires 59
3. Classification des $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules hermitiens 60
4. Quelques lemmes 61
5. Opérateurs d'entrelacement 65

Chapitre 2 : **Séries supplémentaires dépendant d'un paramètre réel.**

1. Représentations unitaires associées à une symétrie 68
2. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique 70
3. Classification des représentations unitaires irréductibles de SL (3, C) 70
4. Opérateurs d'entrelacement pour les $L_\alpha(\tau)$ 71

(*) Texte reçu le 21 juin 1976, complété en mai 1978.

Michel DUFLO, Mathématiques, Tour 55, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05.

5. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de SL (3, **C**) ... 77
6. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de Sp (2, **C**) ... 78
7. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de G_2 ... 82

Chapitre 3 : **Représentations de** Sp (2, **C**).
1. Les résultats ... 86
2. La représentation de Shale-Weil pour Sp (n, **C**) ... 88
3. Démonstration du théorème 2 ... 90

Chapitre 4 : **Représentations de** G_2.
1. Les résultats ... 91
2. Démonstration du théorème 3 ... 93

Bibliographie ... 96

Introduction

Cet article contient la liste des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie simples complexes de rang 2. Les groupes de Lie simples (réels ou complexes) pour lesquels cette liste a été dressée sont, à ma connaissance, SL (3, **R**) [11], SL (3, **C**) [10], et des groupes de rang réel $\leqslant 1$. Pour tous ces groupes, les séries supplémentaires dépendent au plus d'un paramètre réel. Par contre, Sp (2, **C**) et le groupe complexe de type G_2 ont chacun une série supplémentaire paramétrée par un sous-ensemble assez compliqué d'un plan réel (*fig.* 1 et 2). Ceci rend l'étude du dual de ces groupes intéressante à titre d'exemple. La liste des représentations unitaires irréductibles de Sp (2, **C**) et du groupe complexe de type G_2 est donnée dans les théorèmes 2 et 3. Pour être complet, et comme cela n'est pas long, j'ai aussi traité le cas de SL (3, **C**) (théorème 1).

On sait [14] que les représentations irréductibles quasi simples d'un groupe semi-simple complexe dans un espace de Banach sont classées, à équivalence infinitésimale près, par les orbites du groupe de Weyl dans le groupe des caractères (non nécessairement unitaires) d'un sous-groupe de Cartan. Soit $V(\xi)$ la représentation correspondant au caractère ξ. On sait pour quelles valeurs de ξ la représentation $V(\xi)$ porte une forme hermitienne invariante. Le seul problème — mais cet article montre qu'il n'est déjà pas trivial pour le groupe Sp (2, **C**) par exemple — est de déterminer quand cette forme est définie positive. Pour les deux groupes que j'étudie ici, le cas le plus important est celui où $V(\xi)$ peut être induite à partir d'un caractère réel d'un sous-groupe parabolique maximal (séries principales dégénérées). Le calcul de la forme hermitienne invariante se ramène à celui de certains opérateurs d'entrelacement.

Le résultat principal de cet article est donc le calcul assez explicite des opérateurs d'entrelacement entre séries principales dégénérées pour les groupes simples complexes de rang 2 (proposition 1). Ce résultat permet non seulement la détermination du dual de ces groupes, mais aussi celle des séries principales dégénérées irréductibles (propositions 2, 3, 4, 5 et 6).

Terminons cette introduction par un résultat qui ne demande pas de notations. Le groupe SL (3, **C**) et le groupe complexe de type G_2 ont une, et une seule, classe de représentations unitaires irréductibles isolée : celle de la représentation triviale. Le groupe Sp (2, **C**) en a deux : celle de la représentation triviale, et celle de la composante irréductible de la représentation de Shale-Weil qui n'a pas de vecteur invariant non nul sous l'action d'un sous-groupe compact maximal.

Je remercie Michèle VERGNE pour ses informations sur la représentation de Shale-Weil.

Principales notations

Chapitre 1 :

– Paragraphe 1 : $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, W, Δ, Δ^+, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$, U, $\mathscr{P}$, K, A, N, M, H, $m \mapsto m^{\mu}$, $a \mapsto a^{\lambda}$, $h \mapsto h^{\xi}$, Ξ, σ, ρ, $\mu \oplus \lambda = (p, q) = \xi$, E^{δ}, $E^{\delta}(\mu)$, $\bar{\xi}$, ρ, $u \mapsto u^*$.

– Paragraphe 2 : V, $V^{\sim}$, V^{δ}.

– Paragraphe 3 : $L(\xi)$, $V(\xi)$.

– Paragraphe 5 : δ^*, $L(\mu)$, $r(\mu, \lambda)$, $c_{e, f}$, B, B^{δ}, b^{δ}, $B(w, \mu, \lambda)$.

Chapitre 2 :

– Paragraphe 1 : α_1, α_2, δ_1, δ_2.

– Paragraphe 2 : $\mathfrak{p}_{\alpha}$, P_{α}, ρ_{α}, $L_{\alpha}(\tau)$.

– Paragraphe 4 : α, ε, $L(z)$, L, $r(z)$, $L_{\alpha}(z)$, t, s, $B(z)$, $C(z)$, $C^{\delta}(z)$, $c^{\delta}(z)$.

Chapitre 1. Généralités

1. Notations

Si V est un espace vectoriel, on note V^* l'espace dual. Si V est réel, on note $V_{\mathbf{C}}$ le complexifié. Si V est complexe, on note $V_{\mathbf{R}}$ l'espace réel sousacent. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, on note $U(\mathfrak{a})$ son algèbre enveloppante. On note G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, W le groupe de Weyl, $\mathscr{P}$ le réseau des poids. On fixe un système Δ^+ de racines positives, on note σ la demi-somme des racines positives, $\mathscr{P}^+$ l'ensemble des poids dominants. On fixe une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$, on note X_α l'élément de cette base de poids $\alpha \in \Delta$, on pose $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ (de sorte que $\alpha(H_\alpha) = 2$). On note $X \mapsto \overline{X}$ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme réelle engendrée par les X_α. On note $X \mapsto {}^t X$ l'antiautomorphisme d'ordre 2 tel que ${}^t X_\alpha = X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ et ${}^t H = H$ pour $H \in \mathfrak{h}$.

On note $\mathfrak{a}$ le sous-espace réel de $\mathfrak{h}$ engendré par les H_α $(\alpha \in \Delta)$, et $\mathfrak{m}$ celui engendré par les $i H_\alpha$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. On note $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie réelle formée des $X \in \mathfrak{g}$ tels que ${}^t X = -\overline{X}$. On note $\mathfrak{n}$ l'algèbre complexe engendrée par les X_α $(\alpha \in \Delta^+)$. On note K, M, A, N, H les sous-groupes analytiques de G d'algèbres $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}$. La décomposition d'Iwasawa de G est $G = KAN$, le groupe MAN est un sous-groupe parabolique minimal, le groupe $H = MA$ est un sous-groupe de Cartan.

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ l'algèbre réelle sous-jacente à $\mathfrak{g}$ et $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ sa complexifiée. L'application $X \mapsto (X, \overline{X})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ se prolonge en un isomorphisme de $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ au moyen duquel nous identifierons ces deux algèbres. Nous poserons $U = U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$. On identifie U et $U((\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}})$. L'injection de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ sur $\mathfrak{g}$. L'injection de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{h}$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ sur $\mathfrak{h}$. Grâce à cet isomorphisme, nous identifierons $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}^*$ et $\mathfrak{h}^*$. Si $\mu \in \mathfrak{h}^*$, l'élément correspondant de $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}^*$ est la différentielle d'un caractère de M si, et seulement si, $\mu \in \mathscr{P}$. Nous noterons $m \mapsto m^\mu$ ce caractère. L'injection de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$ permet de même d'identifier $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ et $\mathfrak{h}^*$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, nous noterons $a \mapsto a^\lambda$ le caractère de A dont la différentielle est l'élément correspondant de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$.

L'application $H \mapsto (H, \overline{H})$ de $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ dans $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ se prolonge en un isomorphisme de $(\mathfrak{h}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. Soit $\xi \in (\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*)_{\mathbf{C}}$. Il existe des éléments p, q, μ, λ de $\mathfrak{h}^*$ uniquement déterminés tels que l'on ait

$$\xi(H) = p(H) + q(\overline{H}) \quad \text{pour tout } H \in \mathfrak{h}$$

$$\mu(H) = \xi(H) \quad \text{pour tout } H \in \mathfrak{m},$$

et

$$\lambda(H) = \xi(H) \quad \text{pour tout } H \in \mathfrak{a}.$$

Nous écrirons $\xi = (p, q) = \mu \oplus \lambda$. On a $\mu = p-q$ et $\lambda = p+q$. Nous noterons Ξ l'ensemble des ξ qui sont différentielles d'un caractère (analytique réel à valeurs dans $\mathbf{C}-\{0\}$) de H. Ce sont les ξ tels que $\mu = p-q$ appartienne à $\mathscr{P}$. On note $h \mapsto h^{\xi}$ le caractère de H correspondant.

Nous poserons $\rho = (\sigma, \sigma) = 0 \oplus 2\sigma$. C'est un élément de Ξ.

Si $p \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$\bar{p}(H) = \overline{p(\bar{H})} \quad \text{pour tout } H \in \mathfrak{h}.$$

De même, si $\xi \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{RC}}$, $\xi = (p, q) = \mu \oplus \lambda$, on pose

$$\bar{\xi} = (\bar{q}, \bar{p}) = -\bar{\mu} \oplus \bar{\lambda}.$$

Soit $\delta \in \mathscr{P}$. On note E^{δ} le module de la représentation holomorphe (de dimension finie) de $\mathfrak{g}$ qui admet δ comme poids extrémal. Soit $\mu \in \mathscr{P}$. On note $E^{\delta}(\mu)$ le sous-espace de poids μ de E^{δ}. On considérera en général E^{δ} comme une représentation de $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ ou de K.

On note $u \mapsto u^*$ l'involution antilinéaire de U telle que $X^* = -X$ si $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$.

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et si $\alpha \in \Delta$, on pose $\lambda_{\alpha} = \lambda(H_{\alpha})$.

2. $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules hermitiens et unitaires

Soit π une représentation unitaire irréductible (fortement continue) de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Le sous-espace $\mathscr{H}_f$ de $\mathscr{H}$ des vecteurs K-finis est formé de vecteurs analytiques. Par différentiation, on obtient une représentation $d\pi$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, et donc de U, dans $\mathscr{H}_f$. La représentation $d\pi$ est algébriquement irréductible. Soit π' une autre représentation unitaire irréductible dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}'$. On introduit de même $\mathscr{H}'_f$ et $d\pi'$. Alors π et π' sont unitairement équivalentes si, et seulement si, $d\pi$ et $d\pi'$ sont algébriquement équivalentes. Réciproquement, soit T une représentation algébriquement irréductible $\mathfrak{k}$-finie de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans un espace préhilbertien (complexe) V laissant invariant le produit scalaire. Alors il existe une représentation unitaire irréductible π unique de G dans le complété $\mathscr{H}$ de V telle que $\mathscr{H}_f = V$ et $d\pi = T$. Pour tout ceci, qui est dû à HARISH-CHANDRA (*cf.* [12]).

Pour classer, à équivalence unitaire près, les représentations unitaires irréductibles de G, il suffit donc de classer, à équivalence algébrique près, les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ qui sont $\mathfrak{k}$-finies et dont l'espace sous-jacent peut être muni d'une structure préhilbertienne invariante.

Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module (complexe). Une application $x, y \mapsto (x, y)$ de $V \times V$ dans $\mathbf{C}$ est dite une forme sesquilinéaire si elle est linéaire par rapport à x, et antilinéaire par rapport à y. Cette forme est invariante si

$$(X x, y)+(x, X y) = 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g},\ x,\ y \in V.$$

Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module $\mathfrak{k}$-fini. On note $V^{\sim}$ le sous-module de l'espace vectoriel des formes antilinéaires muni de la représentation contragrédiente formé des vecteurs $\mathfrak{k}$-finis, et $x, v \longrightarrow \langle x, v \rangle$ la dualité entre V et $V^{\sim}$. La formule $(x, y) = \langle x, A y \rangle$ définit une bijection de l'ensemble des formes sesquilinéaires invariantes sur V sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules de V dans $V^{\sim}$.

Soit $\delta \in \mathscr{P}$. On note V^{δ} le sous-espace de V formé des vecteurs qui se transforment, comme ceux de E^{δ} sous l'action de $\mathfrak{k}$, de sorte que $V = \Sigma_{\delta} V^{\delta}$ si V est $\mathfrak{k}$-fini (δ parcourt $\mathscr{P}^{+}$).

Soit V un $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module $\mathfrak{k}$-fini et irréductible. On sait ([4], chap. 8) que, pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, l'espace V^{δ} est de dimension finie, ce qui entraîne que $V^{\sim}$ est irréductible. Des homomorphismes A et A' de V dans $V^{\sim}$ sont proportionnels ([4], 2.6.8). On voit donc qu'il existe une forme sesquilinéaire non nulle invariante sur V si, et seulement si, V et $V^{\sim}$ sont équivalentes, et que deux telles formes sont proportionnelles. Il est facile d'en déduire que, parmi celles-ci, il en existe qui sont hermitiennes (i. e. qui vérifient $(x, y) = \overline{(y, x)}$ pour tout $x,\ y \in V$).

DÉFINITIONS. — *Nous dirons qu'un $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module $\mathfrak{k}$-fini irréductible V est hermitien s'il existe sur V une forme hermitienne invariante non nulle.* Deux telles formes sont alors proportionnelles, et V est hermitien si, et seulement si, V et $V^{\sim}$ sont isomorphes.

Nous dirons qu'un $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module $\mathfrak{k}$-fini irréductible V est unitaire s'il admet une structure préhilbertienne invariante, c'est-à-dire s'il est hermitien, et si, parmi les formes hermitiennes $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-invariantes sur V, il y en a une qui est positive.

3. Classification des $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules hermitiens

Soit $\xi \in \Xi$. On note $L(\xi)$ le $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module $\mathfrak{k}$-fini obtenu en faisant agir à gauche $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans l'espace des fonctions φ différentiables K-finies à gauche sur G, qui vérifient

$$\varphi(ghn) = h^{-\xi-\rho}\varphi(g) \quad \text{pour tout } g \in G,\ h \in H,\ n \in N.$$

Posons $\xi = \mu \oplus \lambda$. Soit $\delta \in \mathscr{P}$. Le sous-$\mathfrak{k}$-module $L^{\delta}(\xi)$ est somme de $\dim E^{\delta}(\mu)$ $\mathfrak{k}$-modules isomorphes à E^{δ}. En particulier, $L^{\mu}(\xi)$ est un $\mathfrak{k}$-module irréductible. On note $V(\xi)$ l'unique sous-quotient simple de $L(\xi)$ contenant $L^{\mu}(\xi)$. On a donc $V^{\nu}(\xi) = 0$ pour tout $\nu \in \mathscr{P}$ tel que $\|\nu\| < \|\mu\|$, et $V^{\mu}(\xi)$ est isomorphe comme $\mathfrak{k}$-module à E^{μ}.

Si $\xi = \mu \oplus \lambda = (p, q)$, nous noterons $L(\xi) = L(\mu, \lambda) = L(p; q)$ et $V(\xi) = V(\mu, \lambda) = V(p; q)$. Le lemme suivant rassemble les propriétés de ces modules dont nous nous servirons souvent.

LEMME 1.

1° *Soient* $\xi, \xi' \in \Xi$. *Les modules* $V(\xi)$ *et* $V(\xi')$ *sont isomorphes si, et seulement si,* $W\xi = W\xi'$. *Les modules* $L(\xi)$ *et* $L(\xi')$ *sont de longueur finie, et ont des suites de Jordan-Hölder isomorphes.*

2° *Soit* $\xi \in \Xi$. *Les modules* $V(\xi)^{\sim}$ *et* $V(-\bar{\xi})$ *sont isomorphes.*

3° *Soit* V *un* $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$*-module simple* $\mathfrak{k}$*-fini. Soit* $\delta \in \mathscr{P}$ *tel que* $V^{\delta} \neq 0$ *et tel que* $V^{\nu} = 0$ *pour tout* $\nu \in \mathscr{P}$ *tel que* $\|\nu\| < \|\delta\|$. *Il existe* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^{*}$ *tel que* V *soit isomorphe à* $V(\delta, \lambda)$.

4° *Soit* $(p, q) \in \Xi$. *Tout sous-quotient simple de* $L(p, q)$ *est isomorphe à un module* $V(wp; q)$, *ou* w *est un élément de* W *tel que* $wp\text{-}q \in \mathbf{Z}\,\Delta$.

Démonstration. — Les trois premiers résultats sont dus à ZELOBENKO (*cf.* [14] ou [5]) et le dernier à HIRAI (*cf.* [8] ou [6]).

Le lemme 1.1 paramètre les classes d'équivalence de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules simples $\mathfrak{k}$-finis par les orbites de W dans Ξ. Le lemme 1.2 dit que le module $V(\xi)$ est hermitien si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $w\xi = -\bar{\xi}$.

Nous noterons Ξ^{h} l'ensemble des $\xi \in \Xi$ tels qu'il existe $w \in W$ tel que $w\xi = -\bar{\xi}$. Les classes d'équivalence de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-modules simples $\mathfrak{k}$-finis hermitiens sont paramétrées par les orbites de W dans Ξ^{h}. L'objet de cet article est de déterminer pour quelles valeurs de $\xi \in \Xi^{h}$ la forme hermitienne non nulle invariante sur $V(\xi)$ (qui est unique à un facteur réel près) est proportionnelle à une forme positive, lorsque G est simple de rang 2.

Exemple. — Si $w = 1$, i. e. si $\xi = -\bar{\xi}$, le module $V(\xi)$ est unitaire, et on a $L(\xi) = V(\xi)$. En effet, $L(\xi)$ est irréductible (*cf.* [5] 1.4.4) et unitaire, car induit à partir d'un caractère unitaire.

4. Quelques lemmes

Les lemmes qui suivent sont plus ou moins connus.

LEMME 2. — *Soient* $\mathscr{H}$ *un espace de Hilbert,* S *un espace topologique, et pour tout* $s \in S$, *soit* π_s *une représentation fortement continue de* G *dans* $\mathscr{H}$.

On suppose que la restriction de π_s à K est unitaire, et ne dépend pas de s. On note V le sous-espace des vecteurs K-finis de $\mathcal{H}$, et T_s la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans V déduite de π_s. On suppose que, pour tout $x \in V$ et tout $y \in V$, la fonction $(s, g) \mapsto (\pi_s(g) x, g)$ est continue sur $S \times G$.

1° *Soit S' un sous-ensemble connexe de S tel que T_s soit irréductible et hermitien pour tout $s' \in S$. On suppose qu'il existe $s_0 \in S'$ tel que T_{s_0} soit unitaire. Alors T_s est unitaire pour tout $s \in S'$.*

2° *Soit $\delta \in \mathcal{P}$ tel que V^δ soit irréductible sous l'action de $\mathfrak{k}$. On note R_s l'unique sous-quotient irréductible de T_s qui contient V^δ. Soit s_n $(n \geqslant 1)$ une suite de points de S tels que R_{s_n} soit unitaire pour tout $n \geqslant 1$, et qui converge vers un point s_0. Alors R_{s_0} est unitaire, et (identifiant R_{s_n} à une représentation unitaire irréductible de G) la suite R_{s_n} tend vers R_{s_0} pour la topologie de Fell.*

Démonstration

1° Comme T_{s_0} est irréductible, il est isomorphe à un $V(\xi)$ (lemme 1), et il existe $\mu \in \mathcal{P}$ tel que V^μ soit irréductible sous l'action de $\mathfrak{k}$. Pour tout $s \in S'$, nous noterons $(.,.)_s$ l'unique forme hermitienne T_s-invariante qui coïncide sur V^μ avec le produit scalaire. On note B_s l'isomorphisme de V sur V tel que $(x, y)_s = (x, B_s y)$ pour tout x et tout $y \in V$. On note T_s^* la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans V. Comme B_s entrelace T_s et T_s^*, il induit, pour tout $\delta \in \mathcal{P}$ un endomorphisme hermitien B_s^δ inversible de l'espace de Hilbert de dimension finie V^δ.

Montrons que, pour $u \in U$, x, $y \in V$, le nombre $(T_s(u) x, y)$ dépend continûment de $s \in S$. Pour toute fonction α continue à support compact, l'opérateur $\pi_s(\alpha)$ est défini (on a choisi une mesure de Haar sur G), et $(\pi_s(\alpha) x, y)$ dépend continûment de s. Soit $t \in S$, et soit $\delta \in \mathcal{P}$. Les éléments de la forme $\pi_t(\alpha) v$, ou α est K-invariante (i. e. $\alpha(kgk^{-1}) = \alpha(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$) et C^∞ à support compact, et où $v \in V^\delta$, engendrent V^δ. Comme les $\pi_s(\alpha)$ laissent stable V^δ, et y induisent un opérateur dépendant continûment de s, il en résulte qu'étant donné $x \in V$, il existe des éléments $v_i \in V^\delta$, des fonctions α_i C^∞ à support compact sur G, et des fonctions continues c_i, définies dans un voisinage de t, telles que

$$x = \sum_i c_i(s) \pi_s(\alpha_i) v_i,$$

pour tout s dans un voisinage de t. On a

$$T_s(u) x = \sum_i c_i(s) \pi_s(u \star \alpha_i) v_i,$$

de sorte que $(T_s(u)\, x, y)$ dépend continûment de s dans un voisinage de t, ce qui prouve notre assertion.

Montrons que, pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, l'opérateur B_s^δ dépend continûment de $s \in S'$. On fixe $v \in V^\mu$. On a $B_s\, v = v$ pour tout $s \in S'$. Soit $t \in S'$. Soient $u_i \in U$ des éléments tels que les $T_t(u_i)\, v$ forment une base de V^δ. Notons P^δ la projection $\mathfrak{k}$-invariante de V sur V^δ. Il résulte de l'alinéa ci-dessus qu'étant donné $x \in V^\delta$ il existe des fonctions continues c_i, définies dans un voisinage de t, telles que l'on ait

$$x = \sum_i c_i(s)\, P^\delta\, T_s(u_i)\, v,$$

pour tout s dans un voisinage de t. Soit $s \in S'$ et soit $y \in V$. On a

$$(B_s x,\, y) = \sum_i c_i(s)(B_s\, P^\delta\, T_s(u_i)\, v,\, y) = \sum_i c_i(s)(v,\; T_s(u_i^*)\, y).$$

Pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, $x, y \in V$ la fonction $s \mapsto (B_s\, x, y)$ est continue dans S', ce qui prouve notre assertion.

Pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, $B_{s_0}^\delta$ est un opérateur défini positif. Comme S' est connexe, B_s^δ est défini positif pour tout $s \in S'$, ce qui prouve que T_s est unitaire.

2° L'espace $T_s(U)\, V^\delta$ a un unique sous-espace T_s invariant maximal. Notons le quotient W_s : c'est l'espace de la représentation R_s, et V^δ et W_s^δ sont canoniquement isomorphes. Nous les identifierons. Soit $n \geqslant 1$. Notons $(.,\, .)_n$ l'unique produit scalaire sur W_{s_n} qui est R_{s_n}-invariant, et qui induit sur V^δ le produit scalaire d'origine. Fixons $v \neq 0$ dans V^δ.

Soient $u, u' \in U$. On pose $B(u, u') = (T_{s_0}(u'^*)\, T_{s_0}(u)\, v, v)$. La forme B est hermitienne positive, car on a

$$B(u, u') = \lim\,(R_{s_n}(u)\, v,\; R_{s_n}(u')\, v)_n.$$

Elle s'annule lorsque $T_{s_0}(u)\, v = 0$, et donc, par symétrie, lorsque $T_{s_0}(u')\, v = 0$. Par passage au quotient, on en déduit une forme hermitienne positive T_{s_0} invariante sur $T_{s_0}(U)\, v$. Son noyau est le plus grand sous-espace T_{s_0}-invariant de $T_{s_0}(U)\, v$. Par passage au quotient, on obtient une forme hermitienne $(.,\, .)_0$ R_{s_0}-invariante positive sur W_{s_0} dont la restriction à V^δ est le produit scalaire d'origine. En particulier, R_{s_0} est unitaire.

Soit $n \geqslant 0$. On note $\mathscr{H}_n$ l'espace de Hilbert complété de W_{s_n}, et σ_n la représentation unitaire de G dans $\mathscr{H}_n$ telle que la restriction de $d\sigma_n$ à W_{s_n} soit égale à R_{s_n}. Soit v un élément non nul de V^δ. Pour tout $u \in U$, on a $(R_{s_n}(u)\, v, v)_n = (T_{s_n}(u)\, v, v)$, car les projections de $R_{s_n}(u)\, v$ et $T_{s_n}(u)\, v$ sur

V^{δ} sont égales. Les fonctions $(\sigma_n(g)\,v,\,v)_n$ et $(\pi_{s_n}(g)\,v,\,v)$ sont analytiques sur G. Elles ont mêmes dérivées à l'origine, elles sont donc égales.

Par hypothèse, $(\pi_{s_n}(g)\,v,\,v)$ converge uniformément vers $(\pi_{s_0}(g)\,v,\,v)$ sur les compacts de G. La fonction $(\sigma_0(g)\,v,\,v)^0$ est donc limite uniforme sur les compacts des fonctions $(\sigma_n(g)\,v,\,v)_n$ et σ_0 est limite des σ_n ([3], 18.1.5).

Remarque. — La conclusion du lemme 2.1 subsiste si, au lieu de supposer T_s irréductible, on suppose qu'il existe un isomorphisme B_s de V sur V qui entrelace T_s et T_s^* tel que la restriction de B_s à V^{δ} soit hermitienne, dépende continûment de $s \in S'$, et soit définie positive pour $s = s_0$, pour tout $\delta \in \mathscr{P}$.

LEMME 3. — *Soit $\mu \in \mathscr{P}$. Soit W_μ le stabilisateur de μ dans W. L'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, tels que $V(\mu,\lambda)$ soit unitaire, est un fermé F_μ de $\mathfrak{h}^*$, et l'application qui à $\lambda \in F_\mu$ associe la classe de représentation unitaires irréductibles de G associée à $V(\mu,\lambda)$ est un homéomorphisme de F_μ/W_μ sur son image.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert formé des fonctions φ de carré intégrable sur K qui vérifient $\varphi(km) = m^{-\mu}\,\varphi(k)$ $(m \in M,\ k \in K)$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et π_λ la représentation de G dans $\mathscr{H}$ telle que $\pi_\lambda(g)\,\varphi(k) = a^{-\lambda-\rho}\,\varphi(k')$ si $g^{-1}\,k = k'\,an$ avec $k' \in K$, $a \in A$, $n \in N$. Avec les notations du lemme 2.2 et $\mu = \delta$ la représentation R_λ est isomorphe à $V(\mu,\lambda)$, de sorte qu'il résulte du lemme 2.2 que l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $V(\mu,\lambda)$ soit unitaire est fermé, et que l'application qui a λ associe la classe de représentations unitaires associée à $V(\mu,\lambda)$ est continue. D'après le lemme 1.1, elle induit une injection continue de F_μ/W_μ dans le dual de G. Montrons que c'est un homéomorphisme de F_μ/W_μ sur son image. Soit λ_n $(n \geqslant 0)$ une suite de points de F_μ telle que $V(\mu,\lambda_n)$ tende vers $V(\mu,\lambda^0)$ dans le dual de G.

Nous employons les notations de la démonstration du lemme 2.2. Soit v un vecteur unitaire de V^{δ}. Il existe une suite $\{v_n\}$ de vecteurs de $\mathscr{H}_n$ tels que la suite de fonctions $(\sigma_n(g)\,v_n,\,v_n)_n$ tende uniformément sur tout compact de G vers $(\sigma_0(g)\,v,\,v)_0$ ([3], 18.1.5). Convolant à droite et à gauche par la fonction $(\sigma_n(k)\,v,\,v)_n$ $(n \geqslant 0,\ k \in K)$ (cette fonction ne dépend pas de n), on voit que l'on peut supposer que $v_n = v$ pour tout n. On a

$$(\sigma_n(g)\,v,\,v)_n = (\pi_{\lambda_n}(g)\,v,\,v)$$

pour tout n et tout $g \in G$ (démonstration du lemme 2.2).

Soit α une fonction C^∞ à support compact sur G qui soit K-invariante. On a $\pi_\lambda(\alpha)\,v = \hat{\alpha}(\lambda)\,v$, oû $\hat{\alpha}$ est une fonction continue de λ. On a $\hat{\alpha}(\lambda) = (\pi_\lambda(\alpha)\,v,\,v)$, ce qui prouve que $\hat{\alpha}(\lambda_n)$ tend vers $\hat{\alpha}(\lambda_0)$. Soit $U^{\mathfrak{k}}$ le commutant de $\mathfrak{k}$ dans U. Soit $u \in U^{\mathfrak{k}}$. On a $T_\lambda(u)\,v = \hat{u}(\lambda)\,v$, où $\hat{u}$ est une fonction polynomiale W_μ-invariante sur $\mathfrak{h}^*$. On a

$$\hat{u}(\lambda)\,\hat{\alpha}(\lambda) = (u \star \alpha)^\wedge(\lambda).$$

On peut choisir α de telle sorte que $\hat{\alpha}(\lambda_0) \neq 0$. Il en résulte que $\hat{u}(\lambda_n)$ tend vers $\hat{u}(\lambda_0)$ pour tout $u \in U^{\mathfrak{k}}$. D'après [14], l'ensemble des fonctions $\hat{u}$ ($u \in U^{\mathfrak{k}}$) est égal à l'ensemble des fonctions polynomiales W_μ-invariantes sur $\mathfrak{h}^*$. Il en résulte que $W\lambda_n$ tend vers $W\lambda_0$.

Le dual de G est réunion disjointe des images des F_μ/W_μ, où μ parcourt l'ensemble des poids dominants. En général, ces sous-ensembles du dual de G ne sont ni ouverts ni fermés.

LEMME 4. — *Soit $\delta \in \mathscr{P}$. La réunion des images des F_μ/W_μ,* où μ *parcourt l'ensemble des poids de E^δ, est ouverte dans le dual de G. En particulier, si tous les poids de E^μ sont conjugués de μ, l'image de F_μ/W_μ dans le dual de G est ouverte.*

Démonstration. — Si π est dans l'ensemble indiqué du dual de G, il existe un poids μ de E^δ tel que la représentation E^μ de K intervienne dans π. Il en est de même pour toutes les représentations d'un voisinage de π. Il en résulte que ces représentations sont de la forme $V(\nu, \lambda)$, où ν est un poids de E^μ. Dans ce cas ν est aussi un poids de E^δ, ce qui prouve le lemme.

LEMME 5. — *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $V(0, \lambda)$ soit unitaire. Alors* $\mathrm{Re}(\lambda)$ *appartient à l'enveloppe convexe dans $\mathfrak{a}^*$ de l'ensemble $W\rho$.*

Démonstration. — Soit φ l'élément de $L(0, \lambda)$ qui est égal à 1 sur K. On voit, comme dans la démonstration du lemme 2.2, que la fonction $g \to \int_K \varphi(g^{-1}k)\,dk$ est un des coefficients de la représentation unitaire de G correspondant à $V(0, \lambda)$. Elle est donc bornée. Le lemme résulte alors d'un théorème de Johnson et Helgason (*cf.* [13], chap. 9).

5. Opérateurs d'entrelacement

Pour chaque couple $\delta \in \mathscr{P}$, $\mu \in \mathscr{P}$, on choisit un produit scalaire K-invariant sur E^δ, et une base orthonormée de $E^\delta(\mu)$. On note δ^* le poids dominant de la représentation duale de E^δ. On note $L(\mu)$ l'espace des fonctions φ continues K-finies sur K qui vérifient

$$\varphi(km) = m^{-\mu}\,\varphi(k)\ (k \in K, m \in M).$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. L'opération de restriction est un isomorphisme de $\mathfrak{k}$-modules de $L(\mu, \lambda)$ sur $L(\mu)$. On note $r(\mu, \lambda)$ la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans $L(\mu)$ obtenue en transportant la structure de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module de $L(\mu, \lambda)$. Soit B une application linéaire de $L(\mu)$ dans $L(\mu')$ entrelaçant $r(\mu, \lambda)$ et $r(\mu', \lambda')$. On note B^δ l'application de $L^\delta(\mu)$ dans $L^\delta(\mu')$ induite par B. On note b^δ l'application de $E^{\delta *}(-\mu)$ dans $E^{\delta *}(-\mu')$ telle que $B^\delta c_{e,f} = c_{e, b^\delta f}$ pour tout $f \in E^{\delta *}(-\mu)$, $e \in E^\delta$, où l'on a posé $c_{e,f}(k) = \langle e, kf \rangle$. On note par la même lettre la matrice qui représente b^δ.

Soient $\mu \in \mathscr{P}$ et $w \in W$. Il existe une unique application rationnelle $\lambda \mapsto B(w, \mu, \lambda)$ de $\mathfrak{h}^*$ dans l'espace des applications linéaires de $L(\mu)$ dans $L(w\mu)$, qui a les propriétés suivantes :

$B(w, \mu, \lambda)$ est défini si $\lambda_\alpha \neq -|\mu_\alpha| - 2j$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\alpha \in \Delta^+$ tel que $w\alpha \in -\Delta^+$. Il entrelace alors $r(\mu, \lambda)$ et $r(w\mu, w\lambda)$. On a $b_\mu(w, \mu, \lambda) = 1$.

LEMME 6. — *On a* $\det b^\delta(w, \mu, \lambda) = c\,P(\lambda)/P(-\lambda)$, *où* c *est une constante non nulle dépendant du choix des bases, et où*

$$P(\lambda) = \prod (|\mu_\alpha| + 2j - \lambda_\alpha)^{m(j\alpha)}.$$

Le produit est pris sur l'ensemble des $\alpha \in \Delta^+$ *tels que* $w\alpha \in -\Delta^+$ *et* $j \in \mathbf{N}^*$. *On a posé* $m(j\alpha) = \dim E^\delta(\mu \pm j\alpha)$; *le signe est* $+$ *si* $\mu_\alpha \geqslant 0$, *et* $-$ *si* $\mu_\alpha < 0$.

Lorsque $w\mu = \mu$, *on a* $c = 1$.

Démonstration. — (*cf.* [5], IV.4.7 par exemple). Lorsque $w\mu = \mu$, on obtient $c = 1$ en faisant $\lambda = 0$.

LEMME 7. — *Soient* $\mu \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, *et* $w \in W$ *tels que* $w\mu = \mu$ *et* $w\lambda = -\bar{\lambda}$.

1° *Soit* $\delta \in \mathscr{P}$ *tel que la matrice* $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ *soit définie. Alors* $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ *est hermitienne.*

2° *On suppose de plus que, pour tout* $\alpha \in \Delta^+$ *et tout* $j \in \mathbf{N}^*$, *on a* $\lambda_\alpha \neq -|\mu_\alpha| - 2j$. *Pour tout* $\delta \in \mathscr{P}$, *la matrice* $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ *est définie, et* $V(\mu, \lambda)$ *est unitaire si, et seulement si, pour tout* $\delta \in \mathscr{P}$, *cette matrice est à valeurs propres positives.*

Démonstration.

1° Soit $\mu \in \mathscr{P}$. On identifie $L(\mu)$ et $L(\mu)^\sim$ en posant

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_K \varphi\bar{\psi}\,dk \qquad \text{pour} \quad \varphi, \psi \in L(\mu).$$

Ici dk est la mesure de Haar normalisée sur K. On a alors

$$r(\mu, \lambda)^* = r(\mu, -\bar{\lambda}).$$

Soit $\delta \in \mathscr{P}$.

Notons e_i les éléments d'une base orthogonale de E^δ, tels que $\| e_i \|^2 = \dim E^\delta$.

Notons f_j les éléments de la base orthonormale choisie dans $E^{\delta *}(-\mu)$.

Les c_{e_i, f_j} sont les éléments d'une base orthonormée de $L^\delta(\mu)$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $r(\mu, \lambda)$ soit irréductible, et soit B un endomorphisme de $L(\mu)$ qui entrelace $r(\mu, \lambda)$ et $r(\mu, -\bar{\lambda})$, et tel que $b^\mu = 1$. La forme $\langle \varphi, B\psi \rangle$ sur $L(\mu)$ est sesquilinéaire invariante sous l'action de la représentation irréductible $r(\mu, \lambda)$, et donc proportionnelle à une forme hermitienne. Comme $b^\mu = 1$, elle est en fait hermitienne. Il en résulte que, pour tout δ, la matrice qui représente B^δ dans la base des c_{e_i, f_j} est hermitienne, et donc que b^δ est hermitienne.

Soit $w \in W$ tel que $w\mu = \mu$. Pour presque tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $w\lambda = -\bar{\lambda}$, $r(\mu, \lambda)$ est irréductible ([5], I.4.4). D'après ce qui précède, appliqué à $B = B(w, \mu, \lambda)$, l'opérateur $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ est hermitien pour tout $\delta \in \mathscr{P}$. Par prolongement algébrique, ceci reste vrai pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $w\lambda = -\bar{\lambda}$ et tel que $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ soit définie.

2° Soit λ comme dans le lemme 7.2. L'opérateur $B(w, \mu, \lambda)$ est défini ([5], III.4.7). D'autre part, $V(\mu, \lambda)$ est l'unique quotient simple de $L(\mu, \lambda)$ et $V(\mu, -\bar{\lambda})$ l'unique sous-module simple de $L(\mu, -\bar{\lambda})$ ([5], IV.3.11). La forme hermitienne $\langle \varphi, B(w, \mu, \lambda)\psi \rangle$ fournit par passage au quotient une forme hermitienne invariante sur $V(\mu, \lambda)$, qui est positive sur $V^\delta(\mu, \lambda)$. Il en résulte que $V(\mu, \lambda)$ est unitaire si, et seulement si, la forme hermitienne $\langle \varphi, B(w, \mu, \lambda)\varphi \rangle$ sur $L(\mu)$ est positive. On voit, comme dans la démonstration de la première partie du lemme, que cela signifie que, pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, la matrice $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ est positive.

Comme les modules $V(\mu, \lambda)$ et $V(s\mu, s\lambda)$ sont isomorphes, on peut se ramener au cas où $\operatorname{Re}(\lambda)$ appartient à la chambre de Weyl positive fermée. Ceci complique parfois inutilement w. Le lemme ci-dessous est parfois plus facile à utiliser.

LEMME 8. — *Soient* $\mu, \delta \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *et* $w \in W$ *tels que* $w\mu = \mu$ *et* $w\lambda = -\bar{\lambda}$. *On suppose que, pour tout* $\alpha \in \Delta^+$, *on a*

$$\lambda_\alpha \neq \pm(|\mu_\alpha| + 2j) \quad \textit{pour tout } j \in \mathbf{N}^*$$

tel que $m(j\alpha) \neq 0$ (notation du lemme 6). *La matrice* $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ *est hermitienne et inversible. Si* $V(\mu, \lambda)$ *est unitaire, alors* $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ *est positive* (*et en particulier on a* $\det b^\delta(w, \mu, \lambda) > 0$).

Démonstration. — Soit $s \in W$ tel que $s\,\mathrm{Re}(\lambda)$ soit dans la chambre de Weyl positive. D'après [5] (III.4.7), pour tout $t, t' \in W$, les opérateurs $b^\delta(t, t'\mu, t'\lambda')$ (où $\lambda' \in \{-\lambda, \lambda, -\bar{\lambda}, \bar{\lambda}\}$) sont tous définis et inversibles. On a $b^\delta(w, \mu, \lambda) = b^\delta(s^{-1}, s\mu, -s\bar{\lambda})\, b^\delta(sws^{-1}, s\mu, s\lambda)\, b^\delta(s, \mu, \lambda)$ ([5], III.4.3). On vérifie que les matrices $b^\delta(s, \mu, \lambda)$ et $b^\delta(s^{-1}, s\mu, -s\bar{\lambda})$ sont adjointes. Si la représentation $V(\mu, \lambda)$ est unitaire, il en est de même de $V(s\mu, s\lambda)$. Ceci implique que $b^\delta(sws^{-1}, s\mu, s\lambda)$ est positive (lemme 7), et il en est de même de $b^\delta(w, \mu, \lambda)$.

Chapitre 2. Séries supplémentaires dépendant d'un paramètre réel

Dans ce chapitre, G est simple de rang 2. Les racines simples sont notées α_1 et α_2 avec $\|\alpha_2\| \geqslant \|\alpha_1\|$, les poids fondamentaux δ_1 et δ_2. On note G_2 le groupe simple complexe de type G_2.

1. Représentations unitaires associées à une symétrie

Soit w la symétrie par rapport à une racine α. Soit $\xi \in \Xi$ tel que $w\xi = -\bar{\xi}$. Le module $V(\xi)$ est hermitien. A quatre exceptions près qui seront résolues plus loin, nous déterminons ici quand $V(\xi)$ est unitaire. Il suffit de le faire lorsque α est simple, ce que nous supposons désormais.

On écrit $\xi = \mu \oplus \lambda$, on note ψ la partie imaginaire de λ, et on pose $t = \lambda_\alpha/2$. On a $\mu_\alpha = 0$, $\psi_\alpha = 0$, et $\lambda = t\alpha + i\psi$.

LEMME 9. — *Si* $V(\xi)$ *est unitaire, on a, soit :*

1° $|t| \leqslant 1$.

2° $\mu = \psi = 0$, $|t| = 2$, $G = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ *ou* $G = G_2$.

3° $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$, $\alpha = \alpha_2$, $\mu = \pm\delta_1$, $\psi = 0$, $t = \pm 3/2$.

4° $G = G_2$, $\alpha = \alpha_2$, $\mu = \pm 2\delta_1$, $\psi = 0$, $t = \pm 4/3$.

Démonstration. — Nous supposons $|t| > 1$. On pose $\delta = \mu + \alpha$. Notre but est d'appliquer le lemme 8. Nous cherchons donc quand il existe $\beta \in \Delta^+$ et $j \in \mathbf{N}^*$ tels que $\mu \pm j\beta$ ($+$ si $\mu_\beta \geqslant 0$, $-$ si $\mu_\beta < 0$) soit un poids de E^δ, et $t\alpha_\beta + i\psi_\beta = \pm(|\mu_\beta| + 2j)$. Soit $\|.\|$ une norme W-invariante sur

$\mathfrak{h}^*$. La première condition implique $\| \mu + j\beta \|^2 \leqslant \| \delta \|^2$. On a

$$\| \mu + j\beta \|^2 = \| \mu \|^2 + j(j + |\mu_\beta|) \| \beta \|^2 \quad \text{et} \quad \| \delta \|^2 = \| \mu \|^2 + \| \alpha \|^2.$$

On a donc

$$(\star) \qquad j(j + |\mu_\beta|) \leqslant \| \alpha \|^2 / \| \beta \|^2.$$

Comme le second membre de $(\star)$ est $\leqslant 3$, on a $j = 1$. Montrons que $\alpha \neq \beta$. En effet, si $\alpha = \beta$, on a $\mu_\beta = 0$ (à cause de $(\star)$) et $t\,\alpha_\alpha = \pm 2$, dont $|t| = 1$, ce que nous avons exclus. Donc $\alpha \neq \beta$. Comme on a $\psi_\alpha = \psi_\beta = 0$, on voit que $\psi = 0$. On a

$$(\star\star) \qquad t\,\alpha_\beta = \pm(|\mu_\beta| + 2).$$

La condition $(\star\star)$ implique $\alpha_\beta \neq 0$. Il y a trois cas à considérer :

(i) $\| \alpha \|^2 / \| \beta \|^2 = 1$, $|\alpha_\beta| = 1$. Alors $\mu_\beta = 0$, d'où $\mu = 0$, et $|t| = 2$. Ceci peut arriver pour G de type A_2 ou G_2.

(ii) $\| \alpha \|^2 / \| \beta \|^2 = 2$, $|\alpha_\beta| = 2$, donc $|\mu_\beta| = 1$. Il en résulte que $\alpha = \alpha_2$, $\mu = \pm\delta_1$, $|t| = 3/2$, $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$.

(iii) $\| \alpha \|^2 / \| \beta \|^2 = 3$, $|\alpha_\beta| = 3$, donc $|\mu_\beta| = 2$. Il en résulte que $\mu = \pm 2\,\delta_1$, $\alpha = \alpha_2$, $|t| = 4/3$, $G = G_2$.

Supposons qu'aucune des conditions 1°, 2°, 3° ou 4° du lemme 9 ne soit vérifiée. On est dans les conditions d'application du lemme 8. Il résulte du lemme 6 que l'on a

$$\det b^\delta(w, a, \lambda) = (2 - \lambda_\alpha)/(2 + \lambda_\alpha) = (1 - t)/(1 + t).$$

Comme ce nombre est < 0, $V(\xi)$ n'est pas unitaire.

LEMME 10. — *Les notations sont celles du lemme 9. Si* $|t| \leqslant 1$, *alors* $V(\xi)$ *est unitaire.*

Démonstration. — Comme les représentations correspondant à t et $-t$ sont équivalentes, comme on le voit en conjuguant par w, on peut supposer $t \geqslant 0$. D'après le lemme 7, il suffit de démontrer que, pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, la matrice $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ est positive. Ceci résulte de [5] (III.3.7) : on peut choisir une base orthonormée de $E^{\delta^*}(-\mu)$ telle que $b^\delta(w, \mu, \lambda)$ soit diagonale, et ses valeurs propres de la forme

$$\prod_{j=1}^{n} (2j + |\mu_\alpha| - \lambda_\alpha)/(2j + |\mu_\alpha| + \lambda_\alpha) = \prod_{j=r}^{n} (j - t)/(j + t).$$

Ce sont des nombres $\geqslant 0$ si $t \in [0, 1]$.

2. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique

Soit α une racine simple. On pose $\mathfrak{p}_\alpha = \mathbf{C}\,X_{-\alpha}+\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$, et on note P_α le sous-groupe analytique de G correspondant. Soit $\tau = \mu \oplus \lambda \in \Xi$ un élément tel que $\mu_\alpha = \lambda_\alpha = 0$. Il existe un unique caractère de P_α dont la différentielle, restreinte à $\mathfrak{h}$, soit égale à τ. Nous noterons $p \mapsto p^\tau$ ce caractère. On pose $\rho_\alpha = \rho-(0 \oplus \alpha)$. On note $L_\alpha(\tau)$ le $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module formé des fonctions C^∞ sur G telles que $\varphi(gp) = p^{-\tau-\rho_\alpha}\varphi(g)$ et qui sont $\mathfrak{k}$-finies.

Le module $L_\alpha(\tau)$ est isomorphe à un sous-module de $L(\tau-(0 \oplus \alpha))$ et à un quotient de $L(\tau+(0 \oplus \alpha))$. Les modules $V(\tau \pm (0 \oplus \alpha))$ sont isomorphes, et isomorphes à un sous-quotient de $L_\alpha(\tau)$ ([2], 2.6 et 2.7). Lorsque λ est imaginaire pur, la représentation $L_\alpha(\tau)$ est unitaire. Ceci redémontre, avec les notations du lemme 10, que $V(\xi)$ est unitaire pour $|t| = 1$.

3. Classification des représentations unitaires irréductibles de SL (3, C).

Le théorème 1 ci-dessous est énoncé (sans démonstration) dans [9].

THÉORÈME 1. — *Soit* $G = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. *Soit* $\xi \in \Xi$. *On pose* $\xi = \mu \oplus \lambda$, *et on note* ψ *la partie imaginaire de* λ. *La représentation* $V(\xi)$ *est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée.*

1° $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. *Dans ce cas, on a* $V(\xi) = L(\xi)$ (*série principale unitaire*).

2° *Il existe* $\alpha \in \Delta^+$, $t \in \,]-1, 1[$ *tels que* $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ *et* $\lambda = t\alpha+i\psi$. *Dans ce cas, on a* $V(\xi) = L(\xi)$ (*série complémentaire*).

3° *Il existe* $\alpha \in \Delta^+$ *tel que* $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ *et* $\lambda = \pm\alpha+i\psi$. *Dans ce cas, soit* β *une racine simple. Il existe* $\mu' \in \mathscr{P}$, $\psi' \in \mathfrak{a}^*$ *tels que* $\mu'_\beta = \psi'_\beta = 0$ *et tels que* $V(\xi)$ *soit isomorphe à* $L_\beta(\mu'+i\psi')$ (*série principale dégénérée*).

4° $\xi \in W\rho$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est le module trivial.*

Démonstration. — Si $V(\xi)$ est unitaire, il existe $w \in W$ tel que $w\,\xi = -\bar{\xi}$. Dans ce cas, on peut choisir, soit $w = 1$ (auquel cas $V(\xi)$ est unitaire, c'est le cas 1°, soit w la symétrie par rapport à une racine $\alpha \in \Delta^+$. Il résulte des lemmes 9 et 10 que ξ est comme dans 2°, 3° ou 4°. Si $\xi \in W\rho$, il est clair que $V(\xi)$ est le module trivial, et donc unitaire. Dans le cas 2°, le fait que $V(\xi) = L(\xi)$ résulte de [5] (I.4.4) (car $L(\xi)$ est irréductible). Dans le cas 3°, quitte à conjuguer par un élément convenable de W, on peut supposer $\alpha = \beta$. Comme $L_\beta (\mu + i \psi)$ est irréductible ([2], 2.13) il résulte des remarques qui suivent le lemme 10 que $V(\xi)$ est isomorphe à $L_\beta (\mu + i \psi)$.

De la même manière, les lemmes 9 et 10 permettent de déterminer, pour $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ ou $G = G_2$ quels sont les $V(\xi)$ unitaires, lorsqu'on suppose $\psi \neq 0$, ou $\mu \neq 0$, à l'exception des cas 3° et 4° du lemme 9. Nous allons voir que les cas $\mu = \psi = 0$, ou les cas 3° et 4° du lemme 9 ne se règlent pas aussi facilement.

4. Opérateurs d'entrelacement pour les $L_\alpha(\tau)$

Soient α une racine simple, ε le poids fondamental tel que $\varepsilon_\alpha = 0$.

Avec les notations du paragraphe 2, supposons $V(\tau + (0 \oplus \alpha))$ hermitien et $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. On a alors $\mu = 0$. C'est pourquoi, compte tenu du sujet de cet article, nous nous limitons dans l'étude des modules $L_\alpha(\tau)$ faite ci-dessous au cas où $\mu = 0$, bien qu'un certain nombre de résultats soient valables lorsque $\mu \neq 0$ (et même pour des représentations induites à partir d'une représentation de dimension finie > 1 de P_α).

Soit $z \in \mathbf{C}$. Nous poserons

$$L(z) = L(0, z\varepsilon - \alpha), \qquad L = L(0), \qquad r(z) = r(0, z\varepsilon - \alpha).$$

Nous poserons $L_\alpha(z) = L_\alpha(0, z\varepsilon)$, et nous noterons L_α le sous-espace de L formé des fonctions invariantes à droite par le sous-groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \cap (\mathbf{C} X_{-\alpha} + \mathbf{C} H_\alpha + \mathbf{C} X_\alpha)$. L'opération de restriction est un isomorphisme de $\mathfrak{k}$-modules de $L_\alpha(z)$ sur L_α. Nous notons $r_\alpha(z)$ la représentation de $\mathfrak{g}_\mathbf{R}$ dans L_α que l'on en déduit.

On note w_0 l'élément de plus grande longueur de W, on pose $\alpha' = -w_0 \alpha$ et $\varepsilon' = -w_0 \varepsilon$. On définit comme ci-dessus $L'(z)$, $r'(z)$, $L'_\alpha(z)$, L'_α, $r'_\alpha(z)$ en remplaçant α par α' et ε par ε'. Soit w_α la symétrie définie par α et soit $s = w_0 w_\alpha$.

Dans ce paragraphe, nous allons construire des opérateurs d'entrelacement entre $L_\alpha(z)$ et $L'_\alpha(-z)$, et démontrer pour ceux-ci l'analogue des lemmes 6,7 et 8. On pose $B(z) = B(s, 0, z\varepsilon - \alpha)$. La fonction $z \mapsto B(z)$ est une application rationnelle de $\mathbf{C}$ dans l'ensemble des endomorphismes de L qui entrelacent $r(z)$ et $r'(-z)$.

Remarquons qu'il peut arriver que $B(z)$ soit défini en z sans que $B(s, 0, \lambda)$ (comme fonction rationnelle de 2 variables) soit défini pour $\lambda = z\varepsilon - \alpha$.

Remarquons que L_α (resp. L'_α) est un sous-espace de L invariant par $r(z)$ (resp $r'(-z)$), et que cette représentation y induit $r_\alpha(z)$ (resp. $r'_\alpha(-z)$). D'autre part, on a $L^0 = L^0_\alpha = L'^0_\alpha$: c'est l'espace des fonctions constantes sur K.

LEMME 11. — *Il existe une application rationnelle unique $z \mapsto C(z)$ de* $\mathbf{C}$ *dans l'espace des applications linéaires de L_α dans L'_α, telle que $C(z)$, lorsqu'il est défini, entrelace $r_\alpha(z)$ et $r'_\alpha(-z)$, et induise l'identité dans L^0. Lorsque $B(z)$ est défini, on a $B(z) L_\alpha \subset L'_\alpha$, et $B(z)$ induit $C(z)$ dans L_α.*

Démonstration. — Pour presque tout $z \in \mathbf{C}$, L_α (resp. L'_α) est l'unique sous-espace de L qui soit invariant et irréductible sous l'action de $r(z)$ (resp. $r'(-z)$), et $B(z)$ est défini. C'est par exemple vrai si $(z\varepsilon-\alpha)_\beta \neq \pm 2j$ pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ et tout $j \in \mathbf{N}^*$, comme il résulte de [5] (III.4.7) et de [2] (2.13). L'image par $B(z)$ de L_α est donc L'_α. Par prolongement algébrique, on a $B(z) L_\alpha \subset L'_\alpha$ dès que $B(z)$ est défini, et si l'on note $C(z)$ la restriction de $B(z)$ à L_α, l'application $z \mapsto C(z)$ a bien les propriétés requises.

Pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, on choisit une base orthonormée de l'espace $E^\delta(0, \alpha)$ formé des vecteurs de $E^\delta(0)$ annulés par X_α. On fait de même pour $E^\delta(0, \alpha')$. On note $C^\delta(z)$ l'application de L^δ_α dans L'^δ_α déduite de $C(z)$. On note $c^\delta(z)$ l'application de $E^{\delta^*}(0, \alpha)$ dans $E^{\delta^*}(0, \alpha')$ telle que $C^\delta(z)\, c_{e, f} = c_{e, c^\delta(z) f}$ pour tout $e \in E^\delta$, $f \in E^{\delta^*}(0, \alpha)$. C'est la restriction de $b^\delta(z)$ à $E^{\delta^*}(0, \alpha)$. On note encore $c^\delta(z)$ la matrice qui représente $c^\delta(z)$.

LEMME 12. — *On suppose $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ ou $G = G_2$. On a $w_0 = -1$, $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \varepsilon'$, $L_\alpha = L'_\alpha$, $r_\alpha(z) = r'_\alpha(z)$. Si $z = \bar{z}$, la matrice $c^\delta(z)$ est hermitienne pour tout $\delta \in \mathscr{P}$ tel que $c^\delta(z)$ soit définie.*

On suppose que $z = \bar{z}$ et que $(z\varepsilon-\alpha)_\beta \neq -2j$ pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ et tout $j \in \mathbf{N}^*$. Alors $c^\delta(z)$ est définie pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, et $V(0, z\varepsilon-\alpha)$ est unitaire si, et seulement si, $c^\delta(z)$ est positive pour tout $\delta \in \mathscr{P}$.

Démonstration. — Les premières assertions sont évidentes. On identifie L_α et $L^{\sim}_\alpha$ au moyen du produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_K \varphi\bar{\psi}\, dk$. On a alors $r_\alpha(z)^* = r_\alpha(-z)$. Ceci provient de l'existence d'une forme linéaire positive G-invariante sur l'espace des fonctions continues θ sur G qui vérifient $\theta(gp) = p^{-2\rho_\alpha}\theta(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $p \in P_\alpha$, unique à un facteur constant près. On peut choisir cette forme égale a $\theta \mapsto \int_K \theta\, dk$. La forme bilinéaire $\int_K \varphi\bar{\psi}\, dk$ sur $L_\alpha(z)\times L_\alpha(-\bar{z})$ est donc invariante, ce qui prouve notre assertion. On en déduit que $c^\delta(z)$ est hermitien si $z = \bar{z}$ comme dans la démonstration du lemme 7.1.

Supposons $(z\,\varepsilon-\alpha)_\beta \neq -2\,j$ pour tout $j\in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+ - \{\,\alpha\,\}$. Dans ce cas, $B(z)$ (et donc $C(z)$) est défini ([5], III.4.7), $V(0, z\,\varepsilon-\alpha)$ est l'unique quotient simple de $L_\alpha(z)$ ([2], 2.12) et $V(0, -z\,\varepsilon'-\alpha')$ est l'unique sous-module simple de $L'_\alpha(-z)$. La dernière assertion du lemme se démontre comme le lemme 7.2.

Lemme 13. — *On suppose que* $(z\,\varepsilon-\alpha)_\beta \neq -2j$ *pour tout* $\beta\in\Delta^+ - \{\,\alpha\,\}$ *et tout* $j\in\mathbf{N}^*$. *Alors* $c^\delta(z)$ *est défini pour tout* $\delta\in\mathscr{P}$. *On suppose que, pour tout* $\delta\in\mathscr{P}$, *on a* $\det c^\delta(z)\neq 0$. *Alors* $L_\alpha(z)$ *est irréductible.*

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement des résultats rappelés à la fin de la démonstration du lemme 12.

Les lemmes 12 et 13 montrent l'utilité de calculer $\det c^\delta(z)$. Pour ce faire, nous allons utiliser un opérateur d'entrelacement entre $L(0, z\,\varepsilon-\alpha)$ et $L(\alpha, z\,\varepsilon)$ dont le noyau est $L_\alpha(0, z\,\varepsilon)$. Cet opérateur est dù à D. P. Zelobenko (*cf.* [14] ou [5], V.1).

Nous poserons $r(\alpha, z) = r(\alpha, z\,\varepsilon)$. C'est une représentation dans $L(\alpha)$. On définit de même $r(\alpha', z)$ dans $L(\alpha')$. Rappelsons qu'on a identifié $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ et $\mathfrak{g}$. Ceci permet de considérer tout élément de $\mathfrak{g}$ comme une distribution de support l'élément neutre sur K. On pose

$$A\varphi = \varphi\star X_{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad A'\varphi = \varphi\star X_{-\alpha'} (\varphi\in L).$$

L'opérateur A est surjectif de L sur $L(\alpha)$. Son noyau est L_α. Il entrelace les représentations $r(z)$ et $r(\alpha, z)$. L'opérateur A' a des propriétés analogues. Nous poserons $D(z) = B(s, \alpha, z\,\varepsilon)$. C'est, lorsqu'il est défini, un opérateur de $L(\alpha)$ dans $L(\alpha')$ qui entrelace $r(\alpha, z)$ et $r(\alpha', -z)$.

Lemme 14. — *Il existe une fonction rationnelle* a *sur* $\mathbf{C}$ *telle que l'on ait* $a(z)\,D(z)\,A = A'\,B(z)$.

Démonstration. — Par passage au quotient, $B(z)$ fournit un opérateur $F(z)$ de $L(\alpha)$ dans $L(\alpha')$ qui entrelace $r(\alpha, z)$ et $r(\alpha', -z)$. Posons $a(z) = f^\alpha(z)$ où f^α est défini comme au chap. I, paragraphe 5. L'unicité de la fonction $D(z)$ montre que l'on a $F(z) = a(z)\,D(z)$.

La démonstration du lemme 14 fournit en principe un moyen pour calculer a. Nous procéderons toutefois différemment, en nous servant de la construction des opérateurs $B(z)$ et $D(z)$ par des intégrales à la Kunze et Stein.

LEMME 15. — *Il existe une constante $c \neq 0$ qui ne dépend que du choix des bases telle que*

$$a(z) = c \prod (z\,\varepsilon_\beta - \alpha_\beta)/(z\,\varepsilon_\beta + \alpha_\beta),$$

où le produit est pris sur l'ensemble des $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ tels que $\alpha_\beta > 0$. Pour $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ ou $G = G_2$ (cas où $\alpha = \alpha'$), on a $c = -1$ si $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ et $\alpha = \alpha_1$, et $c = 1$ dans les autres cas.

Démonstration. — Nous allons choisir un représentant m de s dans le normalisateur de M dans K. Lorsque $G = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$, on choisit m de telle sorte que $\mathrm{Ad}(m) X_{-\alpha'} = X_{-\alpha'}$. Lorsque $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ ou $G = G_2$, on note γ la racine positive orthogonale à α, et on choisit m dans le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\mathbf{C}\,X_{-\gamma} + \mathbf{C}\,H_\gamma + \mathbf{C}\,X_\gamma$. On vérifie que $\mathrm{Ad}(m) X_{-\alpha} = \zeta X_{-\alpha}$, où $\zeta = -1$ si $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ et $\alpha = \alpha_1$, et $\zeta = 1$ dans les autres cas. Pour $G = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$ on posera aussi $\zeta = 1$. Rappelons que des bases ont été choisies dans les espaces $E^\delta(\mu)$. Soit $\mu \in \mathscr{P}$. On note $d(\mu)$ le scalaire qui représente l'application de $E^{\mu^*}(-\mu)$ dans $E^{\mu^*}(-s\,\mu)$ obtenue en représentant m. Par exemple, $d(0) = 1$, et si $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ ou $G = G_2$, $d(\alpha) = 1$.

On pose $\mathfrak{n}' = \sum \mathbf{C}\,X_\beta$, où β parcourt $\Delta^+ - \{\alpha'\}$, et on note N' le sous-groupe de N correspondant. On munit N' de la mesure de Haar décrite en [5] (III.2.3). Soient $\mu \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\mathrm{Re}\,\lambda_\beta > 0$ pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$. Soit $\gamma \in L(\mu, \lambda)$. On pose

$$A(m, \mu, \lambda)\,\varphi(g) = \int_{N'} \varphi(gnm)\,dn \qquad (g \in G).$$

Cette intégrale est convergente, et définit un opérateur d'entrelacement $A(m, \mu, \lambda)$ de $L(\mu, \lambda)$ dans $L(w\,\mu, w\,\lambda)$. On note par la même lettre l'opérateur de $L(\mu)$ dans $L(w\,\mu)$ qui s'en déduit. Il entrelace $r(\mu, \lambda)$ et $r(w\,\mu, w\,\lambda)$ (c'est l'intégrale de Kunze et Stein, *cf.* [5], III.3 par exemple). Rappelons qu'on a choisi des bases dans $E^{\mu^*}(-\mu)$ et $E^{\mu^*}(-m\,\mu)$; on note $c(\mu)$ le nombre qui représente l'application de $E^{\mu^*}(-\mu)$ dans $E^{\mu^*}(-m\,\mu)$ déduite de m. Par exemple $c(0) = 1$ et $c(\alpha) = c$. Il résulte de [5] (III.3.10) que l'on a

$$B(s, \mu, \lambda) = d(\mu) \prod (\lambda_\beta + |\mu_\beta|)\,A(m, \mu, \lambda),$$

où β parcourt $\Delta^+ - \{\alpha\}$.

Soit $z \in \mathbf{C}$. Il suffit de démontrer le lemme 15 lorsque Re (z) est grand. On suppose que l'on a $\operatorname{Re}(z\,\varepsilon-\alpha)_\beta < 0$ pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$. On a aussi $\operatorname{Re}(z\,\varepsilon)_\beta < 0$. Pour démontrer le lemme 15, il suffit d'établir la relation

$$(\star) \qquad \zeta A(m, \alpha, z\,\varepsilon) A = A' A(m, 0, z\,\varepsilon-\alpha).$$

Rappelons que l'on a identifié $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ et $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{s} = \mathbf{C}\,X_{-\alpha}$. On note Y l'élément $-(X_{-\alpha}, 0)$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{RC}}$. On a $Y \in \mathfrak{s}_{\mathbf{RC}}$.

L'opérateur $\varphi \mapsto \varphi \star Y$ envoie $L(0, z\,\varepsilon-\alpha)$ dans $L(\alpha, z\,\varepsilon)$, et, considéré comme opérateur de L dans $L(\alpha)$, il est égal à A ([5], V.I.8). On définit de même $Y' \in \mathfrak{g}_{\mathbf{RC}}$. On a $Y' = \zeta \operatorname{Ad}(m)\, Y$. Pour démontrer $(\star)$, il suffit de prouver l'assertion suivante. Soit $X \in \mathfrak{s}_{\mathbf{R}}$. Soit $\varphi \in L(0 \oplus z\,\varepsilon-\alpha)$. On a

$$(\star\star) \qquad (d/dt)\int_{N'} \varphi(g\exp(tX'')\,nm)\,dn = \int_{N'} (d/dt)\,\varphi(gnm\exp(tX))\,dn,$$

où l'on a posé $X'' = \operatorname{Ad}(m)\, X$.

Nous allons voir ci-dessous que, si Re (z) est assez grand, on peut intervertir la dérivée et l'intégrale dans le côté droit de $(\star\star)$. La relation $(\star\star)$ résulte alors de ce que l'application $n \mapsto \exp(t\,X'')\, n \exp(-t\,X'')$ est un automorphisme unimodulaire de N'.

Montrons que l'on peut intervertir dérivée et intégrale. On peut supposer $|\varphi(k)| \leqslant 1$ pour $k \in K$. Comme on a

$$\varphi\star(X_{-\alpha}, 0) \in L(\alpha z\,\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \varphi\star(0, X_{-\alpha}) \in L(-\alpha z\,\varepsilon)([5]\ V.1)$$

il en résulte que l'on a

$$\varphi\star X \in L(\alpha, z\,\varepsilon) + L(-\alpha, z\,\varepsilon).$$

Si $g \in G$, on écrit $g = k(g)\,a(g)\,n(g)$ avec $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$. On a

$$|(\varphi\star X)(g)| \leqslant \mu(g)^{-\operatorname{Re}(z)\,\varepsilon-\rho}.$$

et donc

$$|(d/dt)\,\varphi(g\exp(t\,X))| \leqslant \mu(g)\exp(t\,X)^{-\operatorname{Re}(z)\,\varepsilon-\rho}.$$

On a $a(g\exp(t\,X)) = a(g)$. En effet, soit $e \in E^\delta(\varepsilon)$ un vecteur de norme 1. On a $\exp(t\,X)\,e = e$ et $a(g) = \|ge\|$. D'autre part, $m^{-1}nm\exp(t\,X)$ est un élément du groupe $N^- = t^{-1}\,N\,t$. On a donc

$$a(m^{-1}nm\exp(t\,X))^{-\rho} \leqslant 1.\ (cf.\ [5]\ \text{IV}.3.6,\ \text{par exemple}).$$

On a donc

$$|(d/dt)\,\varphi(m^{-1}\,nm\exp(t\,X))| \leqslant \mu(nm)^{-\mathrm{Re}(z)\,\varepsilon} \quad \text{pour tout } n \in N'.$$

Si Re (z) est assez grand, on a Re $(z\,\varepsilon-\rho)_\beta < 0$ pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$, car ε_β est > 0. L'intégrale sur N' de

$$a\,(nm)^{-\mathrm{Re}\,(z)\,\varepsilon} = a\,(nm)^{-(\mathrm{Re}\,(z)\,\varepsilon-\rho)-\rho}$$

est convergente ([5], III.2.2). Le théorème de convergence dominée permet d'intervertir dérivée et intégrale dans le côté droit de ($\star\star$) lorsque $g = m^{-1}$. On obtient le résultat pour une valeur arbitraire de g en remplaçant φ par une de ses translatées à gauche.

Nous pouvons maintenant calculer det $c^\delta(z)$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $\delta \in \mathscr{P}$. *Pour tout* $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ *et tout* $j \in \mathbf{N}^*$, *on pose*

$$n(j\,\beta) = \dim E^\delta(j\,\beta),\ m(j\,\beta) = \dim E^\delta(\alpha \pm j\,\beta)$$

avec le signe $+$ *si* $\alpha_\beta \geqslant 0$, *et le signe* $-$ *si* $\alpha_\beta < 0$. *On pose* $n(\alpha) = \dim E^\delta(\alpha)$. *On a*

$$\det(c^\delta(z)) = c'\,c^{-n(\alpha)}\prod{}'((z\,\varepsilon_\beta+\alpha_\beta)^{n(\alpha)}/(z\,\varepsilon_\beta-\alpha_\beta)^{n(\alpha)}) \times (p(z)/p(-z)).$$

Le produit $\prod'$ *est pris sur l'ensemble des* $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ *tels que* $\alpha_\beta > 0$. *La constante* c *est comme dans le lemme* 15. *La constante* c' *dépend du choix des bases, et vaut* 1 *si* $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$ *ou si* $G = G_2$. *Le polynôme* p *est défini par la formule :*

$$p(z) = \prod(2j+\alpha_\beta-z\,\varepsilon_\beta)^{n(j\,\beta)}(2j+|\alpha_\beta|+z\,\varepsilon_\beta)^{m(j\,\beta)},$$

où le produit est pris sur l'ensemble des $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ *et des* $j \in \mathbf{N}^*$.

Démonstration. — Il résulte des lemmes 11 et 14 que l'on a

$$\det(b^\delta(z)) = \det(a(z)\,d^\delta(z))\det(c^\delta(z)).$$

Comme $d^\delta(z)$ est une matrice d'ordre $n(\alpha)$, on a

$$\det(a(z)\,d^\delta(z)) = a(z)^{n(\alpha)}\det(d^\delta(z)).$$

La proposition résulte des lemmes 6 et 15, compte tenu de l'égalité

$$\prod(2j-\alpha_\beta+z\,\varepsilon_\beta)^{n(j\beta)} = \prod(2j+\alpha_\beta+z\,\varepsilon_\beta)^{n(j\beta)},$$

qui vient de ce que s_α permute $\Delta^+ - \{\alpha\}$.

LEMME 16. — *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$. *On suppose que, pour tout* $j \in \mathbf{N}^*$ *et tout* $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$, *on a* $(z\,\varepsilon - \alpha)_\beta \neq -2(j+n)$. *L'opérateur*

$$\left(\prod_\beta \prod_{j=1}^n (z\,\varepsilon_\beta - \alpha_\beta + 2j)\right) C(z) \qquad (\beta \textit{ parcourt } \Delta^+ - \{\beta\})$$

est défini.

Démonstration. — Il suffit de démontrer la même assertion en remplaçant $C(z)$ par $B(z)$. Il suffit de démontrer le résultat suivant. Soient $w \in W$, $\mu \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On suppose que, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+$ tel que $w\,\beta \in -\Delta^+$, on a $\lambda_\beta \neq -|\mu_\beta| - 2(j+n)$. L'opérateur

$$\left(\prod_\beta \prod_{j=1}^n (\lambda_\beta + |\mu_\beta| + 2j)\right) B(w, \mu, \lambda)$$

(β parcourt l'ensemble des $\beta \in \Delta^+$ tels que $w\,\beta \in -\Delta^+$) est défini. Un argument standard de récurrence sur la longueur de w (*cf.* [5], III) montre qu'il suffit de le faire lorsque w est la symétrie par rapport à une racine simple. Dans ce cas, ceci résulte du calcul explicite de $B(w, \mu, \lambda)$ fait en [5] (III.3.9).

5. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de SL (3, C)

Ce paragraphe est une application directe de la proposition 1 à un résultat annoncé dans [5] (4.14).

Dans ce paragraphe, $G = \mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. Les notations sont celles du paragraphe suivant.

PROPOSITION 2.

1° *Le sous-espace* $\mathfrak{k}$*-invariant* $L_\alpha^0(z)$ *est cyclique dans* $L_\alpha(z)$ *si et seulement si,* $z \neq -3, -5, -7, \ldots$

2° *Tout sous-module non nul de* $L_\alpha(z)$ *contient* $L_\alpha^0(z)$ *si, et seulement si,* $z \neq 3, 5, 7, \ldots$

3° $L_\alpha(z)$ *est irréductible si, et seulement si,* $z \neq \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots$

Démonstration. — L'autre racine simple est α'. On a $\sigma = \alpha + \alpha'$. Soient $\delta \in \mathscr{P}$ et $j \in \mathbf{N}^*$. Posons

$$n(j.\delta) = \dim E^\delta(j\,\sigma) + \dim E^\delta((j+1)\,\sigma) - \dim E^\delta(j\,\sigma + \alpha) - \dim E^\delta(j\,\sigma + \alpha')$$

On a

$$\det(c^\delta(z)) = c'\,p(z)/p(-z) \qquad \text{avec} \quad p(z) = \prod_{j=1}^\infty (2j+1-z)^{n(j,\delta)}.$$

C'est la proposition 1. Remarquons que les termes en $(z-1)/(z+1)$ ont disparu!

Démontrons 2°. D'après [2] (2.8), tout sous-module non nul de $L_\alpha(z)$ contient $L_\alpha^0(z)$ si $(z\,\varepsilon-\alpha)_\beta \neq 2j$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$, c'est-à-dire si $z \neq 1, 3, 5, \ldots$. Réciproquement, si $z = 2j+1$ avec $j \in \mathbf{N}^*$, $\ker C(z)$ est un sous-module de $L_\alpha(z)$ ne contenant pas $L_\alpha^0(z)$, et non trivial car $\det c_\alpha(z) = 0$ si $\delta = j\,\sigma$. Pour $z = 1$, il résulte du lemme 13 que $L_\alpha(z)$ est irréductible.

1° résulte de 2° par dualité entre $L_\alpha(z)$ et $L_\alpha(-z)$ (*cf.* [2], 2.10). 3° résulte de 1° et 2°.

Les mêmes méthodes permettent de déterminer pour quelles représentations irréductibles de dimension finie de P_α la représentation de G induite est irréductible, et donnent des résultats similaires à ceux de la proposition 2 : dans chaque série il y a deux modules exceptionnels, irréductibles bien que ne vérifiant pas les conditions suffisantes de [2] (2.13), analogues aux modules $L_\alpha(1)$ et $L_\alpha(-1)$ de la proposition 2. Nous nous en tiendrons là pour éviter l'introduction de notations supplémentaires.

6. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de Sp (2, C)

Dans ce paragraphe, on pose $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$. La racine simple courte est α_1, la racine simple longue est α_2 (voir *fig.* 1). Nous poserons $L_{\alpha_1}(z) = L_1(z)$ et $L_{\alpha_2}(z) = L_2(z)$. On a $\varepsilon_1 = \delta_2$ et $\varepsilon_2 = \delta_1$. Les racines positives sont $\gamma = 2\,\delta_1$, δ_2, α_1, α_2. Nous déterminons ici quand $L_i(z)$ est irréductible, et quand $V(0, z\,\varepsilon_i - \alpha_i)$ (qui est le sous-quotient irréductible de $L_i(z)$ contenant un vecteur non nul $\mathfrak{k}$-invariant) est unitaire. Notez que $V(0, \lambda)$ est hermitien dès que λ est réel, car $-1 \in W$. Les résultats diffèrent pour $i = 1$ ou 2. Nous examinons ces deux cas séparément.

Étude de $L_1(z)$.

PROPOSITION 3.

1° *Le sous-espace $L_1^0(z)$ est cyclique dans $L_1(z)$ si, et seulement si,* $z \neq -2, -3, -4, \ldots$

2° *Tout sous-module non nul de $L_1(z)$ contient $L_1^0(z)$ si, et seulement si,* $z \neq 2, 3, 4, \ldots$

3° *$L_1(z)$ est irréductible si, et seulement si,* $\pm z \neq 2, 3, 4, \ldots$

4° $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ *est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :*

(*a*) *z est imaginaire pur. Dans ce cas, on a* $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1) = L_1(z)$.

(*b*) $z \in \,]-2, 2[$. *Dans ce cas, on a* $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1) = L_1(z)$.

(*c*) $z = \pm 2$. *Dans ce cas,* $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ *est le morceau de la représentation de Shale-Weil qui contient un vecteur $\mathfrak{k}$-invariant.*

(*d*) $z = \pm 3$. *Dans ce cas,* $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ *est représentation triviale.*

Démonstration. — Rappelons que l'on a posé $\gamma = 2\,\delta_1$. Soit $\delta \in \mathscr{P}$ et soit $j \in \mathbf{N}^*$. Nous poserons

$$n(j, \delta) = \dim E^\delta(j\gamma)+\dim E^\delta((j+1)\gamma)-2\dim E^\delta(j\gamma+\delta_2),$$

$$m(j, \delta) = \dim E^\delta(j\,\delta_2)-\dim E^\delta(j\,\delta_2+\alpha_1).$$

En appliquant la proposition 1, on trouve $\det(c^\delta(z)) = p(z)/p(-z)$ avec

$$p(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(2j+1-z)^{n(j,\delta)} \times \prod_{j=2}^{\infty}(j-z)^{m(j,\delta)}.$$

Démontrons 2°. D'après [2] (2.8), tout sous-module non nul de $L_1(z)$ contient $L_1^0(z)$ si $(z\,\delta_2-\alpha_1)_\beta \neq 2j$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha_1\}$, c'est-à-dire si $z \neq 1, 2, 3, \ldots$ Pour $z = 1$, il résulte du lemme 13 que $L_1(z)$ est irréductible. Pour $z = 2, 3, 4, \ldots$, l'opérateur $C(z)$ est défini. Son noyau est un sous-module de $L_1(z)$ qui ne contient pas $L_1^0(z)$. Ce sous-module est non trivial car $\det c^\delta(z) = 0$ pour $\delta = z\,\delta_2$.

Du 2°, on déduit 1° et 3° comme dans la démonstration de la proposition 2.

Démontrons 4°. Le module $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est hermitien si, et seulement si, z est réel ou imaginaire (lemme 1). Dans le second cas, $L_1(z)$ est irréductible d'après ce qui précède, et unitaire puisqu'il est induit à partir d'un caractère unitaire de P_{α_1}. Supposons maintenant z réel. Pour $z \in \,]-2, 2[$, le module $L_1(z)$ est irréductible, hermitien, et unitaire si de plus $z = 0$. Il résulte du lemme 2 que $L_1(z)$ est unitaire pour $z \in \,]-2, 2[$. D'après le lemme 3, le module $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est unitaire pour $z = \pm 2$. Comme $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est le module trivial pour $z = \pm 3$, il est alors unitaire. Pour $z \in \mathbf{R}$, $|z| > 3$, le lemme 5 montre que $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ n'est pas unitaire. Soit $z \in \mathbf{R}$ tel que $2 < |z| < 3$. Posons $\delta = 2\,\delta_2$. La formule établie ci-dessus montre que l'on a $\det(c^\delta(z)) < 0$. Il résulte du lemme 12 que $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ n'est pas unitaire.

La relation de $V(0, \pm 2\,\delta_2 - \alpha_1)$ avec la représentation de Shale-Weil sera établie plus bas (chap. 3, § 2). Ceci achève la démonstration de la proposition.

Étude de $L_2(z)$. — Ces représentations ont été étudiées par K. GROSS [7], qui a en particulier démontré les assertions 4° et 5° (*a*) de la proposition ci-dessous. Les opérateurs $C(z)$ sont étudiés par lui pour z imaginaire pur par une toute autre méthode.

PROPOSITION 4.

1° *$L^0(z)$ est cyclique dans $L_2(z)$ si, et seulement si,*

$$z \neq 0, -4, -6, -8, \ldots$$

2° *Tout sous-module non nul de $L_2(z)$ contient $L_2^{\cup}(z)$ si, et seulement si,*

$$z \neq 0, 4, 6, 8, \ldots$$

3° *$L_2(z)$ est irréductible si, et seulement si, $\pm z \neq 0, 4, 6, 8, \ldots$*

4° *Pour $z = 0$, $L_2(z)$ est somme directe de deux sous-modules (isomorphes à $V(0, -\alpha_2)$ et $V(\delta_2, \alpha_1)$). L'opérateur $C(z)$ est défini et vaut respectivement 1 et -1 dans chacun des deux sous-modules.*

5° *$V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ est unitaire si, et seulement si, z vérifie l'une des conditions suivantes :*

(*a*) *z est imaginaire et non nul. Dans ce cas, on a $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2) = L(z)$;*

(*b*) *$z = 0$, et dans ce cas, $V(0, -\alpha_2) = L_1(1)$;*

(*c*) *$\pm z = 4$ et dans ce cas, $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ est la représentation triviale.*

Démonstration. — Soit $\delta \in \mathscr{P}$, et soit $j \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$n(j, \delta) = \dim E^{\delta}(j\,\delta_2) + \dim E^{\delta}((j+2)\,\delta_2) - 2\dim E^{\delta}(j\,\delta_2 + \gamma) + \dim E^{\delta}((j+1)\,\gamma) - \dim E^{\delta}((j+1)\,\gamma + \alpha_2).$$

On pose

$$\varepsilon(\delta) = (-1)^{\dim E^{\delta}(\gamma) - \dim E^{\delta}(\alpha_2)}.$$

Il résulte de la proposition 1 que l'on a

$$\det(c^{\delta}(z)) = \varepsilon(\delta)\, p(z)/p(-z) \qquad \text{avec} \quad p(z) = \textstyle\prod_{j=1}^{\infty} (2j+2-z)^{n(j,\delta)}.$$

Démontrons 2°. Si $(z\,\delta_1 - \alpha_2)_{\beta} \neq -2j$, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha_2\}$, c'est-à-dire si $z \neq -0, -2, -4, \ldots$, l'opérateur $C(z)$

est défini. Il résulte du lemme 13 que $L_2(2)$ est irréductible. Pour $z = 4, 6, 8, \ldots$, $\ker C(z)$ est un sous-module non trivial de $L_2(z)$ qui ne contient pas $L_2(z)$, car $\det(c_\alpha(z)) = 0$ pour $\delta = z\,\delta_2$. D'autre part, si $z \neq 0, 2, 4, \ldots$, tout sous-module non trivial de $L_2(z)$ contient $L_2^0(z)$ ([2], 2.8). Il reste à examiner le cas $z = 0$, ce que nous faisons plus bas.

Démontrons 4°. Le module $L_2(0)$ est unitaire, car induit par un caractère unitaire de P_{α_2}. Il est donc semi-simple. Le sous-module engendré par $L_2^0(0)$ est simple, car $L_2^0(0)$ est irréductible sous l'action de $\mathfrak{k}$. C'est le module $V(0, -\alpha_2)$, qui est isomorphe à $L_1(1)$ d'après la proposition 3. Notons X un sous-module supplémentaire. Soit $\delta \in \mathscr{P}$. Comparant la multiplicité de E^δ dans L_2 et L_1, on voit que la multiplicité de E^δ dans X est $\dim E^\delta(\delta_2) - \dim E^\delta(\gamma)$. En particulier X^{δ_2} est $\mathfrak{k}$-irréductible et $X^\gamma = 0$. Les sous-quotients simples de $L(0, -\alpha_2)$ sont isomorphes à $V(0, -\alpha_2)$, $V(\delta_2, \alpha_1)$ et $V(\alpha_2, 0)$ (lemme 1). Les composants de X sont à choisir parmi eux. On a donc $X = V(\delta_2, \alpha_1)$.

Il résulte du lemme 16 que l'opérateur $z\,C(z)$ est défini (comme fonction rationnelle de z) pour $z = 0$. Notons J sa valeur en $z = 0$. C'est un élément du commutant de $L_2(0)$). Pour montrer que $C(z)$ est défini en $z = 0$, il suffit de démontrer que $J = 0$. Il résulte de la formule ci-dessus que l'on a $\det j^\delta = 0$ pour tout $\delta \in \mathscr{P}$. En particulier, puisque E^δ intervient exactement une fois dans $L_2(z)$ pour $\delta = 0$ et $\delta = \delta_2$, on voit que $\ker J$ contient $L_2^0(0)$ et $L_2^{\delta_2}(0)$. Ces sous-espaces engendrent respectivement les sous-modules isomorphes à $V(0, -\alpha)$ car et $V(\delta_2, \alpha_1)$, et leur somme engendre $L_2(0)$, ce qui prouve que $J = 0$. De manière générale, on a $C(-z)\,C(z) = 1$, et donc $C(0)\,C(0) = 1$, ce qui prouve que les valeurs propres de $C(0)$ sont ± 1. La formule pour $\det(c^\delta(z))$ montre que $L_2^{\delta_2}(0)$ est dans le sous-espace propre correspondant à la valeur propre -1. D'autre part $C^0(0) = 1$. Comme les sous-espaces propres sont invariants, ceci démontre 4°.

Ceci termine la démonstration de 2°. Par dualité entre $L_2(z)$ et $L_2(-z)$, 1° résulte de 2°, 3° résulte de 2° et 1°.

Démontrons 5°. $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ est hermitien si, et seulement si, z est réel ou imaginaire (lemme 1). Supposons z réel et $|z| > 4$. Il résulte du lemme 5 que $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ n'est pas unitaire. Supposons z réel et $0 < |z| < 4$. On a $\det(c^{\delta_2}(z)) < 0$, et il résulte du lemme 12 que $V(0, z\,\delta_1 - \delta_2)$ n'est pas unitaire. Le reste de 5° est facile.

7. Représentations induites à partir d'un sous-groupe parabolique maximal de G_2

Dans ce pargraphe, on pose $G = G_2$. Les racines simples sont α_1 et α_2, avec α_1 courte. Les poids fondamentaux sont δ_1 et δ_2. Les racines positives sont $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \alpha_1+\delta_1$, et $\delta_1-\alpha_1$ (voir *fig.* 2). Le groupe W contient -1, de sorte que $V(0, \lambda)$ est hermitien si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. On pose $L_{\alpha_i}(z) = L_i(z)$ ($i = 1, 2$). Nous étudions séparément ces deux séries de représentations.

Étude de $L_1(z)$.

PROPOSITION 5.

1° *Le sous-espace $L_1^0(z)$ est cyclique dans $L_1(z)$ si, et seulement si, $z \neq -5/3, -7/3, -9/3, \ldots$, et $z \neq -2, -3, -4, \ldots$*

2° *Tout sous-module non nul de $L_1(z)$ contient $L_1^0(z)$ si, et seulement si, $z \neq 5/3, 7/3, 9/3, \ldots$, et $z \neq 2, 3, 4, \ldots$*

3° *$L_1(z)$ est irréductible si, et seulement si, $\pm z \neq 5/3, 7/3, \ldots$, et $\pm z \neq 2, 3, \ldots$*

4° *Le module $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée.*

(*a*) *z est imaginaire pur, ou z est réel tel que $|z| < 5/3$. Dans ce cas, on a $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1) = L_1(z)$;*

(*b*) $z = \pm 5/3$;

(*c*) $z = \pm 3$. *Dans ce cas, $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est le module trivial.*

Démonstration. — Soit $\delta \in \mathscr{P}$. Soit $j \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$n(j, \delta) = \dim E^\delta(j\,\delta_2)+\dim E^\delta((j+1)\,\delta_2)-2\dim E^\delta(j\,\delta_2+\delta_1),$$

$$m(j, \delta) = \dim E^\delta(j\,\delta_1)+\dim E\ ((j+1)\,\delta_1)-2\dim E^\delta(j\,\delta_1+\delta_2-\delta_1),$$

$$p(j, \delta) = \dim E^\delta(j\,\delta_2)-\dim E^\delta(j\,\delta_2+\alpha_1).$$

Il résulte de la proposition 1 que l'on a $\det c^\delta(z) = Q(z)/Q(-z)$, où

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(2j+1-z)^{n(j,\delta)} \times \prod_{j=2}^{\infty}(2j+1-3z)^{m(j,\delta)} \times \prod_{j=2}^{\infty}(j-z)^{p(j,\delta)}.$$

Démontrons 2°. D'après [2] (2.8), tout sous-module non nul de $L_1(z)$ contient $L_1^0(z)$ si $(z\,\delta_2-\alpha_1)_\beta \neq 2j$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha_1\}$, c'est-à-dire si $z \neq (1/3)+(2j/3)$ et $z \neq 1+j$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$.

Pour ces valeurs exceptionnelles de z, l'opérateur $C(z)$ est défini. Il résulte du lemme 13 que $L_1(z)$ est irréductible pour $z = 1/3$ et $z = 1$. Si $z = (2j+1)/3$ ou si $z = j$ (avec $j \geqslant 2$) le noyau de l'opérateur $C(z)$ est un sous-module de $L_1(z)$ qui ne contient pas $L_1^0(z)$ et qui est non trivial car $\det c^\delta(z) = 0$ pour $\delta = j\,\delta_1$ ou $\delta = j\,\delta_2$. De 2° on déduit 1° et 3° comme dans la démonstration de la proposition 2.

Démontrons 4°. Le module $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est hermitien si, et seulement si, z est réel ou imaginaire (lemme 1). Si z est imaginaire, $L_1(z)$ est irréductible, et unitaire car induit à partir d'une représentation unitaire de P_{α_1}. Supposons z réel. Pour $|z| < 5/3$, $L_1(z)$ est irréductible et hermitien. Il est unitaire si de plus $z = 0$. Il résulte du lemme 2 que $L_1(z)$ est unitaire si $|z| < 5/3$. Pour $z = \pm 3$, $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ est le module trivial, et donc est unitaire. Pour $|z| > 3$, $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ n'est pas unitaire d'après le lemme 5. Supposons $5/3 < z < 3$. Soit $\delta = 2\,\delta_1$. On a $\det c^\delta(z) < 0$ et il résulte du lemme 12 que $V(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ n'est pas unitaire. Il en est de même de $V(0, -z\,\delta_2-\alpha_1)$ qui est isomorphe au précédent.

LEMME 17. — *La représentation* $V(2\,\delta_1, (4/3)\,\alpha_2)$ *est unitaire.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon = 2\,\delta_1$. On vérifie que l'on a $\dim E^\varepsilon(0) = 3$ et $\dim E^\varepsilon(\alpha_1) = 2$. D'après les remarques qui précèdent le lemme 14, $L_1(z)$ est isomoorphe au quotient de $L(0, z\,\delta_2-\alpha_1)$ par un sous-module isomorphe à $L(\alpha_1, z\,\delta_2)$. La multiplicité de E^ε dans $L_1(z)$ est donc égale à 1. Soit X le sous-module de $L_1(5/3)$ noyau de $C(5/3)$. Il résulte de la formule établie pour $\det c^\delta$ dans la démonstration de la proposition 5 que $X^\delta = 0$ si $\delta = 0$, δ_1 et δ_2, et que $L_1^\varepsilon(5/3) = X^\varepsilon$. Notons Y le sous-quotient irréductible de $L_1(5/3)$ qui contient $L_1^\varepsilon(5/3)$. On a $Y^\delta = 0$ si $\|\delta\| < \|\varepsilon\|$, de sorte que Y est isomorphe à un module $V(\varepsilon, \lambda)$ (lemme 1), où λ est un certain élément de $\mathfrak{h}^*$. D'autre part, $V(\varepsilon, \lambda)$ est un élément de la suite de Jordan-Hölder de $L(0, (5/3)\,\delta_2-\alpha_1)$. Écrivons $0 \oplus ((5/3)\,\delta_2-\alpha_1) = (p, q)$ et $\varepsilon \oplus \lambda = (p', q')$ (*cf.* paragraphe 1.1). D'après le lemme 1, il existe $w \in W$ tels que $wp = p'$ et $w'q = q'$. On en déduit que $\lambda = \pm(4/3)\,\alpha_2$. Considérons une suite z_n d'éléments de $]-(5/3), (5/3)[$ tendant vers 5/3. D'après la proposition 5, les modules $L_1(z_n)$ sont irréductibles et unitaires. Le lemme 2.2, appliqué avec $\delta = \varepsilon$, montre que Y est unitaire.

Étude de $L_2(z)$.

PROPOSITION 6.

1° $L_2^0(z)$ *est cyclique dans* $L_2(z)$ *si, et seulement si,*

$$z \neq 1, -1, -2, -3, \ldots$$

2° *Tout sous-module non nul de* $L_2(z)$ *contient* $L_2^0(z)$ *si, et seulement si,*

$$z \neq -1, 1, 2, 3, \ldots$$

3° $L_2(z)$ *est irréductible si, et seulement si,* $\pm z \neq 1, 2, 3, \ldots$

4° *Pour* $z = \pm 1$, *l'opérateur* $C(z)$ *est défini et inversible,* $L_2(z)$ *est somme directe de deux sous-modules, isomorphes respectivement à* $V(0, \delta_1 - \alpha_2)$ *et* $V(\alpha_1, \delta_2)$.

5° $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ *est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :*

(*a*) *z est imaginaire, ou z est réel avec* $|z| < 2$, $|z| \neq 1$. *Dans ce cas, on a* $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2) = L_2(z)$;

(*b*) $z = \pm 1$. *Dans ce cas,* $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ *est isomorphe à* $L_1(1)$ (*cf.* la proposition 5);

(*c*) $z = \pm 5$. *Dans ce cas,* $V(0, z\,\delta_1 - \alpha_2)$ *est le module trivial;*

(*d*) $z = \pm 2$.

Démonstration. – Soient $\delta \in \mathscr{P}$ et $j \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$\begin{aligned} n(j, \delta) = {} & \dim E^{\delta}(j\,\delta_1) + \dim E^{\delta}((j+3)\,\delta_1) - 2\dim E^{\delta}(j\,\delta_1 + \delta_2) \\ & + \dim E^{\delta}((j+1)\,\delta_2) + \dim E^{\delta}((j+2)\,\delta_2) \\ & - 2\dim E^{\delta}((j+1)\,\delta_2 + \alpha_1 + \delta_1), \end{aligned}$$

$$m(j, \delta) = \dim E^{\delta}(j\,\delta_1) - \dim E^{\delta}(j\,\delta_1 + \alpha_2),$$

$$p(\delta) = \dim E(2\,\delta_2).$$

On a

$$\det c^{\delta}(z) = Q(z)/Q(-z),$$

où l'on a posé

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (2j+3-z)^{n(j,\delta)} \times \prod_{j=2}^{\infty} (j-z)^{m(j,\delta)} \times (3-z)^{p(\delta)}$$

(ceci résulte de la proposition 1).

Démontrons 4°. D'après le lemme 1, les modules simples qui interviennent dans la suite de Jordan-Hölder de $L(0, \delta_1 - \alpha_2)$ sont isomorphes à l'un des modules $V(0, \delta_1 - \alpha_2)$, $V(\alpha_1, \delta_2)$, $V(\alpha_2, \delta_1)$ et $V(\delta_1 - \alpha_2, 0)$. Comme $L_2(1)$ est isomorphe au quotient de $L(0, \delta_1 - \alpha_2)$ par $L(\alpha_2, \delta_1)$, il en est de même pour la suite de Jordan-Hölder de $L_2(1)$. Le module $V(\delta_1-\alpha_2, 0)$ est isomorphe à $L(\delta_1-\alpha_2, 0)$ (*cf.* [5], I.4.4). Il n'intervient pas dans la suite de Jordan-Hölder de $L_2(1)$, car il intervient avec la multiplicité 1 dans $L(0, \delta_1-\alpha_2)$ et dans $L(\alpha_2, \delta_1)$ (ceci peut se démontrer de manière élémentaire, mais il est plus simple de faire appel à [9] (3.6 (ii)). Le module $V(0, \delta_1-\alpha_2)$ intervient une fois dans la suite de Jordan-Hölder de $L_2(1)$. Notons X la somme directe des sous-modules de la suite de Jordan-Hölder de $L_2(1)$ non isomorphes à $V(0, \delta_1-\alpha_2)$. Soit $\delta \in \mathscr{P}$. La représentation E^δ de $\mathfrak{k}$ intervient avec la multiplicité $\dim E^\delta(0)-\dim E^\delta(\alpha_1)$ dans $L_1(1)$ et $\dim E^\delta(0)-\dim E^\delta(\alpha_2)$ dans $L_2(1)$. D'après la proposition 5, le module $V(0, \delta_1-\alpha_2)$ est isomorphe à $L_1(1)$. Donc E^δ intervient avec la multiplicité $\dim E^\delta(\alpha_1)-\dim E^\delta(\alpha_2)$ dans X. Il en résulte que l'on a $X^{\delta_2}=0$ et que X^{δ_1} est irréductible sous l'action de $\mathfrak{k}$. Il en résulte que $V(\alpha_2, \delta_1)$ n'intervient pas dans X, et que $V(\alpha_1, \delta_2)$ intervient une fois. On voit donc que X est isomorphe à $V(\alpha_1, \delta_2)$. Le module $L_2(1)$ est de longueur 2 et $V(0, \delta_2-\alpha_1)$ et $V(\alpha_1, \delta_2)$ sont les éléments de sa suite de Jordan-Hölder.

Il résulte du lemme 16 que l'opérateur $(z-1)\,C(z)$ est défini pour $z=1$. Notons J sa valeur pour $z=1$: c'est un opérateur d'entrelacement entre $L_2(1)$ et $L_2(-1)$. Son noyau est un sous-module de $L_2(1)$. Pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, on définit j^δ comme au début du chapitre I, paragraphe 5. Il résulte de la formule pour $\det(c^\delta(z))$ que l'on a $\det j^\delta=0$ pour tout $\delta \in \mathscr{P}$ tel que E^δ intervienne dans $L_2(1)$. Comme $L_2^0(1)$ et $L_2^{\delta_1}(1)$ sont irréductibles sous l'action de $\mathfrak{k}$, ceci montre que le noyau de J contient $L_2^0(1)$ et $L_2^{\delta_1}(1)$. D'après ce qui précède, la somme de ces deux sous-espaces engendre $L_2(1)$ comme $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$-module. L'opérateur J est nul. Il en résulte que $C(z)$ est défini pour $z=1$. Comme $\det(c^\delta(1)) \neq 0$ pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, $C(1)$ est un isomorphisme de $L_2(1)$ sur $L_2(-1)$. Comme les modules $L_2(1)$ et $L_2(-1)$ sont en dualité non dégénérée, et comme $V(0, \delta_2-\alpha_1)$ et $V(\alpha_1, \delta_2)$ ne sont pas en dualité, il en résulte que $L_2(1)$ est somme directe de $V(0, \delta_2-\alpha_1)$ et $V(\alpha_1, \delta_2)$.

Démontrons 2°. Il résulte de [2] (2.8) que tout sous-module non nul de $L_2(z)$ contient $L_2^0(z)$ si $z \neq -1, 1, 2, 3, \ldots$ Si $z=\pm 1$, nous venons de voir que $L_2(z)$ contient un sous-module non nul ne contenant pas $L_2^0(z)$: il est engendré par $L_2^{\delta_1}(z)$. Si $z=2, 3, 4, \ldots, C(z)$ est défini, son noyau est un sous-module de $L_2(z)$ qui ne contient pas $L_2^0(z)$, et qui est non trivial, car $\det c^\delta(z)=0$ si $\delta=z\,\delta_1$.

De 2° on déduit 1° et 3° comme dans la démonstration de la proposition 2.

Démontrons 5°. $V(0, z\,\delta_1-\delta_2)$ est hermitien si, et seulement si, z est réel ou imaginaire (lemme 1). Si z est imaginaire, on a

$$V(0, z\,\delta_1-\alpha_2) = L_2(z),$$

et ce module est unitaire car induit par un caractère unitaire de P_{α_2}. Supposons z réel. Soit $z \in \,]-2, 2[$. L'opérateur $C(z)$ est un isomorphisme de $L_2(z)$ sur $L_2(-z)$. Pour $z = 0$, la matrice $C^{\delta}(0)$ est définie positive pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, car, comme nous venons de le voir, $L_2(0)$ est irréductible et unitaire. Il résulte de la remarque qui suit le lemme 2 que $L_2(z)$ est unitaire pour $z \in \,]-2, 2[$. Il résulte du lemme 2.2 que $V(0, z\,\delta_1-\alpha_2)$ est unitaire pour $z = \pm 2$. Pour $z = \pm 5$, $V(0, z\,\delta_1-\alpha_2)$ est le module trivial, et doncest unitaire. Si $|z| > 5$, $V(0, z\,\delta_1-\alpha_2)$ n'est pas unitaire d'après le lemme 5. Soit $z \in \,]2, 5[$. Soit $\delta = 2\,\delta_1$. On a $\det c^{\delta}(z) < 0$, et il résulte du lemme 12 que $V(0, z\,\delta_1-\alpha_2)$ n'est pas unitaire. Ceci est aussi vrai du module $V(0, -z\,\delta_1-\alpha_2)$ qui lui est isomorphe.

Remarque. — Les modules $V(0, z\,\delta_1-\alpha_2)$, avec $z \in [-2, 2]$, donnent l'exemple d'une « série supplémentaire » de représentations qui est plus grande que « l'intervalle critique », c'est-à-dire le plus grand intervalle I contenant 0 tel que $L_2(z)$ soit irréductible pour tout z dans l'intérieur de I. Ici $I = [-1, 1]$. Nous verrons (théorème 3) qu'il y a un phénomène analogue pour les représentations $L(0, \lambda)$ (où $\lambda \in \mathfrak{a}^*$) : l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que $V(0, \lambda)$ est unitaire contient beaucoup d'autres points que ceux du « convexe critique ».

Chapitre 3. Représentations de Sp (2, C)

1. Les résultats

Dans ce paragraphe, on pose $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$. Les racines simples sont α_1 et α_2, avec $\|\alpha_2\| \geqslant \|\alpha_1\|$.

THÉORÈME 2. — *Soit $\xi \in \Xi$. On pose $\xi = \mu \oplus \lambda$, et on note ψ la partie imaginaire de λ. La représentation $V(\xi)$ est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée.*

1° $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. *Dans ce cas, on a $V(\xi) = L(\xi)$.*

2° *Il existe $\alpha \in \Delta^+$ et $t \in \,]-1, 1[$ tels que $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ et $\lambda = t\,\alpha + i\,\psi$. Dans ce cas, on a $V(\xi) = L(\xi)$.*

3° *Il existe* $\alpha \in \Delta^+$ *tel que* $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ *et* $\lambda = \pm\alpha + i\,\psi$. *Dans ce cas, il existe une racine simple* β, $\mu' \in \mathscr{P}$, $\psi' \in \mathfrak{a}^*$ *tels que* $\mu'_\beta = \psi'_\beta = 0$ *et tels que* $V(\xi)$ *soit isomorphe à* $L_\beta(\mu', i\,\psi)$.

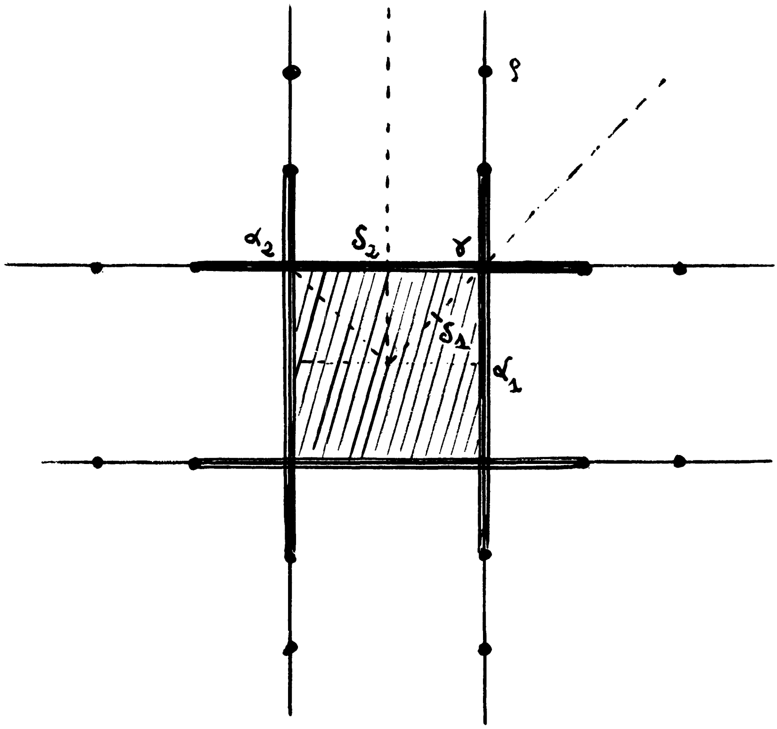

Fig. 1. — Elle représente l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que $V(0\ \lambda)$ soit unitaire pour $\mathfrak{g}$ de type C_2.

4° $\xi \in W(\delta_1 \oplus (3/2)\,\alpha_2)$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est isomorphe au morceau de la représentation de Shale-Weil qui ne contient pas de vecteur K-invariant non nul.*

5° $\mu = \psi = 0$, *et* $\lambda \in E$ (*fig.* 1). *L'ensemble E est la réunion disjointe de quatre ensembles de* $\mathfrak{a}^*$, *notés* E_1, E_2, E_3, E_4.

(*a*) E_1 *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tels que* $|\lambda_\alpha| < 2$ *pour tout* $\alpha \in \Delta^+$. *C'est l'intérieur d'un carré. Dans ce cas, on a* $V(\xi) = L(\xi)$;

(*b*) E_2 *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tels qu'il existe* $t \in)-2, 2($ *et* $w \in W$ *avec* $w\,\lambda = t\,\delta_2 + \alpha_1$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est isomorphe à* $L_{\alpha_1}(0 \oplus t\,\delta_2)$;

(*c*) E_3 *est égal à* $W(2\,\delta_2+\alpha_1)$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est isomorphe au morceau de la représentation de Shale-Weil qui contient un vecteur K-invariant;*

(*d*) E *est égal à* $W(2\,\sigma)$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est la représentation triviale.*

COROLLAIRE. — *Il y a deux éléments isolés dans le dual de G : la représentation triviale, et le morceau de la représentation de Shale-Weil qui ne contient pas de vecteur K-invariant non nul.*

2. La représentation de Shale-Weil pour Sp (n, C)

Ce paragraphe est essentiellement destiné à montrer que la représentation $V(\delta_1, (3/2)\,\alpha_2)$ est unitaire. La méthode consiste à l'identifier à un morceau de la représentation bien connue de Shale-Weil. Comme il n'est pas plus difficile de traiter le cas de $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ (avec $n \geqslant 1$) que celui de $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{C})$, c'est ce que je ferai ici. Le fait que la représentation de Shale-Weil de $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ est somme de deux morceaux irréductibles est établi dans [7], dont nous reproduisons les formules. La méthode pour identifier ces deux morceaux m'a été indiquée par M. VERGNE (voir une situation analogue, mais plus compliquée dans [12]).

On écrira les éléments de $\mathrm{GL}(2\,n, \mathbf{C})$ sous la forme de matrices carrées d'ordre 2 d'éléments de $M(n, \mathbf{C})$ (matrices carrées d'ordre n). On pose

$$p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$G = \mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2\,n, \mathbf{C})$ formé des éléments g tels que ${}^t gpg = p$. Il contient p, et il est engendré par les matrices

$$l(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}, \qquad m(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p,$$

où $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et où b est une matrice symétrique d'ordre n.

Les formules suivantes définissent une représentation unitaire T de G dans $L^2(\mathbf{C}^n)$ (la représentation de Shale-Weil, *cf.* [7]). On écrit un élément de $\mathbf{C}^n$ comme un vecteur ligne.

$$T(m(b))f(z) = \exp(-i\,\mathrm{Re}(zb\,{}^t z))\,f(z),$$

$$T(l(a))f(z) = |\det(a)|\,f(za),$$

$$T(p)f(z) = \hat{f}(z), \qquad \text{où} \qquad \hat{f}(z) = \pi^{-n}\int_{\mathbf{C}^n} f(t)\exp(2\,i\,\mathrm{Re}(z\,{}^t t))\,dt.$$

Les sous-espaces de $L^2(\mathbf{C}^n)$ formés des fonctions respectivement paires et impaires sont stables et irréductibles. Posons $K = U(2n) \cap G$. La fonction $\exp(-|z|^2)$ est K-invariante, et l'espace des fonctions K-finies est l'espace des fonctions de la forme $Q(z, \bar{z}) \exp(-|z|^2)$, où G est un polynôme en $2n$ variables. On notera H^+ (resp. H^-) l'espace des fonctions K-finies paires (resp. impaires), et T^+ (resp. T^-) la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans cet espace. C'est une repıésentation irréductible.

Soit P le sous-groupe parabolique de G engendré par les $l(a)$ ($a \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$) et les ${}^t m(b)$ (b matrice symétrique). Soit τ une représentation de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ dans un espace vectoriel F de dimension finie. On note encore τ la représentation de P triviale sur les matrices de la forme ${}^t m(b)$ et telle que $\tau(l(a)) = \tau(a)$. Notons M'_τ l'espace des fonctions φ continues K-finies à gauche sur G à valeurs dans F qui vérifient

$$\varphi(gp) = \tau(p)^{-1} \varphi(g), \qquad \text{pour} \quad g \in G \quad \text{et} \quad p \in P.$$

On note M_τ l'espace des fonctions sur l'espace des matrices symétriques qui sont de la forme $b \mapsto \varphi(m(b))$ avec $\varphi \in M'_\tau$. On note U_τ la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ dans cet espace, obtenue en transportant la représentation naturelle dansM'_τ.

Pour tout $f \in H^+$ et pour toute matrice symétrique b, on pose

$$\tilde{f}(b) = \int_{\mathbf{C}^n} \exp(i \operatorname{Re}(z b^t z)) f(z) \, dz.$$

On vérifie que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme de H^+ sur un sous-espace de M_{τ_1}, avec $\tau_1(a) = |\det(a)|^{-1}$, qui entrelace T^+ et U_{τ_1}.

Pour tout $f \in H^-$ et pour toute matrice symétrique b, on pose

$$\tilde{f}(b) = \int_{\mathbf{C}^n} \exp(i \operatorname{Re}(z b^t z)) f(z) \, z \, dz.$$

On vérifie que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme de H^- sur un sous-espace de M_{τ_2}, où τ_2 est la représentation de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\tau_2(a) z = |\det(a)|^{-1} z a^{-1}$, qui entrelace T^- et U_{τ_2}.

L'espace des matrices $\zeta(d) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -{}^t d \end{pmatrix}$, où d est une matrice diagonale d'ordre n, est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients de d, et posons

$$\alpha_1(\zeta(d)) = d_2 - d_1, \qquad \alpha_2(\zeta(d)) = d_3 - d_2, \qquad \ldots, \alpha_n(\zeta(d)) = -2 d_n.$$

Les α_i forment un système de racines simples dans $\mathfrak{h}^*$. Le groupe P contient le sous-groupe parabolique minimal HN (*cf.* le paragraphe 1.1). Nous notons δ_i les poids dominants fondamentaux.

La différentielle de τ_1, restreinte à $\mathfrak{h}$, est égale à $0 \oplus \theta$, où

$$\theta(\zeta(d)) = -\operatorname{tr}(d).$$

Il en résulte que M'_{τ_1} est contenu dans $L(0, \theta-\rho)$. On vérifie, en s'aidant par exemple des tables de [1] (p. 255, où il faut prendre $d_i = -\varepsilon_i$) que l'on a $\theta-\rho = -2(\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})-\delta_n$. Il résulte de [5] (I.4.3) que $L(0, \theta-\rho)$ a un seul sous-module irréductible, isomorphe à $V(0, \theta-\rho)$. Il en est de même pour le sous-module M'_{τ_1}, et donc pour le module M_{τ_1}. On voit donc que H^+ est isomorphe à $V(0, \theta-\rho)$.

Soit e le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Si $\varphi \in M'_{\tau_2}$, on considère la fonction $g \mapsto \varphi(g)\,{}^t e$. C'est un élément de

$$L(1/2\,\alpha_n, \theta-\rho+1/2\,\alpha_n),$$

et le même raisonnement que ci-dessus montre que H^- est isomorphe à $V(1/2\,\alpha_n, \theta-\rho+1/2\,\alpha_n)$.

En résumé, nous avons établi le lemme suivant.

LEMME 18. — *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ un système de racines simples pour $\mathfrak{g}$ de type C_n, avec α_n longue, et $\delta_1, \ldots, \delta_n$ les poids fondamentaux. Posons $\lambda = 2(\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})+\delta_n$. La représentation de Shale-Weil de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est somme de deux composantes irréductibles. L'une contient un vecteur $\mathfrak{k}$-invariant non nul, et est isomorphe à $V(0, \lambda)$. L'autre ne contient pas de vecteur $\mathfrak{k}$-invariant non nul, et est isomorphe à $V(-1/2\,\alpha_n, \lambda-1/2\,\alpha_n)$. Les deux composantes sont unitaires.*

3. Démonstration du théorème 2

Soit $\xi \in \Xi$ comme dans le théorème 2.

Supposons μ ou ψ non nul. Il résulte du lemme 9 que $V(\xi)$ ne peut être unitaire que si ξ vérifie l'une des conditions 1°, 2°, 3° ou 4° du théorème. Dans ce cas, $V(\xi)$ est unitaire et a la forme indiquée. Cela résulte, dans les cas 1°, 2°, 3°, du lemme 10 et du paragraphe 2.2. Dans le quatrième cas, cela résulte du paragraphe 3.2.

Il reste à démontrer l'assertion suivante : soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. La représentation $V(0, \lambda)$ est unitaire si, et seulement si, $\lambda \in E$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $V(0, \lambda)$ soit unitaire. D'après le lemme 5, λ est dans l'enveloppe convexe de $W\rho$. D'après le lemme 8 appliqué à la représentation de plus haut poids δ_2, on a $\prod_\beta (2+\lambda_\beta) \geqslant 0$, où le produit est pris sur l'ensemble des quatre racines courtes. On a en effet (lemme 6),

$$\det b^{\delta_2}(-1, 0, \lambda) = (2-\lambda_{\alpha_1})(2-\lambda_{\delta_2})/(2+\lambda_{\alpha_1})(2+\lambda_{\delta_2}).$$

D'après le lemme 8 appliqué à $\delta = \gamma$, on obtient de même $\prod_\beta (2+\lambda_\beta) \geqslant 0$, où β parcourt Δ. De tout ceci résulte que l'on a $\lambda \in E_1$, ou qu'il existe $w \in W$ tel que $w\lambda = t\,\delta_2 - \alpha_1$, avec $t \in \left(-3, 3\right)$. La proposition 3.4 montre que, dans le second cas, $V(0, \lambda)$ est unitaire si, et seulement si, $\lambda \in E_2 \cup E_3 \cup E_4$. Enfin, si $\lambda \in E_1$, $V(0, \lambda)$ est unitaire d'après le lemme 2.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.

Le corollaire en résulte, compte tenu des lemmes 3 et 4 (ce dernier appliqué à $\mu = 0$ et à $\psi = \delta_2$).

Chapitre 4. Représentations de G_2

1. Les résultats

Dans ce chapitre, on pose $G = G_2$. Les racines simples sont α_1 et α_2, avec α_2 longue. Les poids fondamentaux sont δ_1 et δ_2.

THÉORÈME 3. — *Soit* $\xi = \mu \oplus \lambda \in \Xi$. *On note* ψ *la partie imaginaire de* λ. *La représentation* $V(\xi)$ *est unitaire si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée.*

1° $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. *Dans ce cas, on a* $V(\xi) = L(\xi)$.

2° *Il existe* $\alpha \in \Delta^+$ *et* $t \in \,]-1, 1[$ *tels que* $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ *et* $\lambda = t\,\alpha + i\,\psi$. *Dans ce cas, on a* $V(\xi) = L(\xi)$.

3° *Il existe* $\alpha \in \Delta^+$ *tel que* $\mu_\alpha = \psi_\alpha = 0$ *et* $\lambda = \pm\alpha + i\,\psi$. *Dans ce cas, il existe une racine simple* β, $\mu' \in \mathscr{P}$, $\psi' \in \mathfrak{a}^*$ *tels que* $\mu'_\beta = \psi'_\beta = 0$ *et tels que* $V(\xi)$ *soit isomorphe à* $L_\beta(\mu' + i\,\psi')$.

4° $\xi \in W(2\,\delta_1 \oplus (4/3)\,\alpha_2)$.

5° $\mu = \psi = 0$ *et* $\lambda \in E$ (*fig.* 2). *L'ensemble* E *est la réunion disjointe de six ensembles* $E_1, \ldots, E_6$.

(*a*) E_1 *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tels que l'on ait* $|\lambda_\alpha| < 2$ *pour toute racine longue* α, *et* $\prod (2-\lambda_\beta) > 0$, *où* β *parcourt l'ensemble des racines courtes* (*c'est l'intérieur de la partie hachurée de la figure* 2). *Dans ce cas, on a* $L(\xi) = V(\xi)$;

(*b*) *E_2 est l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels qu'il existe $w \in W$ et $t \in \,]-(5/3), (5/3)[$ tels que $w\lambda = t\,\delta_2 + \alpha_1$. Dans ce cas, $V(\xi)$ est isomorphe à $L_{\alpha_1}(0, t\,\delta_2)$;*

(*c*) $E_3 = W((5/3)\,\delta_2 + \alpha_1)$;

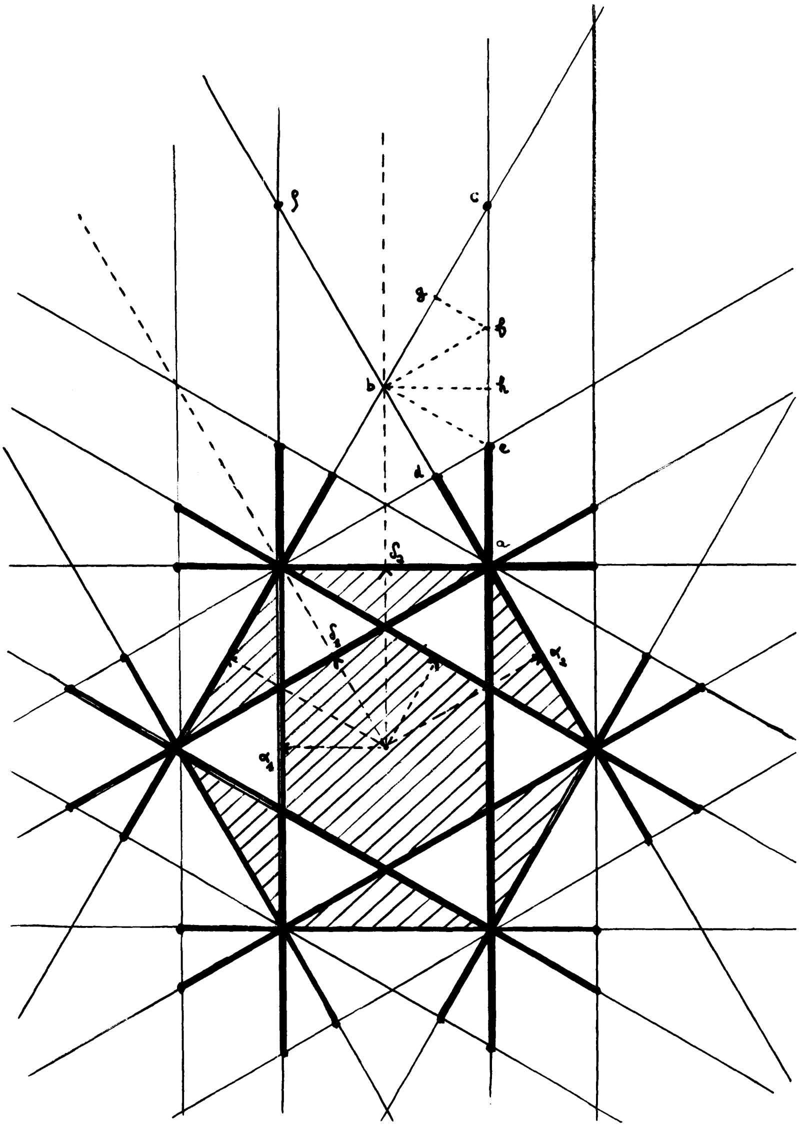

Fig. 2. — Elle représente l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que $V(0, \lambda)$ soit unitaire pour $\mathfrak{g}$ de type G_2.

(*d*) E_4 *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tels qu'il existe* $w \in W$ *et* $t \in]-2, 2[$, $t \neq \pm 1$, *tels que* $w = t\,\delta_1 + \alpha_2$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est isomorphe à* $L_{\alpha_2}(0, t\,\delta_1)$;

(*e*) $E_5 = W(2\,\delta_1 + \alpha_2)$;

(*f*) $E_6 = W(2\,\sigma)$. *Dans ce cas,* $V(\xi)$ *est le module trivial.*

Je ne connais pas de réalisation des représentations correspondant aux cas 4°, 5° (*c*) et 5° (*e*). Leur situation dans le dual de G_2 rappelle celle des morceaux de la représentation de Shale-Weil pour Sp (2, **C**). Il serait intéressant de savoir si l'analogie peut être poursuivie.

2. Démonstration du théorème 3

Soit $\xi \in \Xi$ comme dans le théorème 3.

Supposons μ ou ψ non nul. Il résulte du lemme 9 que $V(\xi)$ ne peut être unitaire que si l'une des conditions 1°, 2°, 3° ou 4° est vérifiée. Si ξ vérifie l'une des conditions 1°, 2° ou 3°, il résulte du lemme 10 que $V(\xi)$ est unitaire et a la forme indiquée. Il résulte du lemme 17 que $V(\xi)$ est unitaire dans le cas 4°. Il reste à démontrer l'assertion suivante :

($\star$) *Soit* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. *La représentation* $V(0, \lambda)$ *est unitaire si, et seulement si* $\lambda \in E$.

Commençons par deux lemmes. Les droites de $\mathfrak{a}^*$ de la forme $\lambda_\alpha = 2j$, où $\alpha \in \Delta^+$ et $j \in \mathbf{Z}^*$ forment un ensemble localement fini d'hyperplans. Le plan $\mathfrak{a}^*$ est réunion disjointe de facettes ([1], chap. 5, § 1).

LEMME 19. — *Soient F une facette, et* $\lambda_0 \in F$. *Si* $V(0, \lambda_0)$ *est unitaire, il en est de même de* $V(0, \lambda)$ *pour tous les points* λ *de l'adhérence de F dans* $\mathfrak{a}^*$.

Démonstration. — Les facettes sont de dimension 0, 1, ou 2. Les facettes de dimension 0 sont des points et le lemme est alors trivial. Soit F une facette de dimension 2. Pour tout $\lambda \in F$, on a $V(0, \lambda) = L(0, \lambda)$ (*cf.* [5], I.4.4). Comme dans la démonstration du lemme 3, on voit que l'on peut appliquer le lemme 2.1, avec $S' = F$, de sorte que $V(0, \lambda)$ est unitaire pour tout $\lambda \in F$. D'après le lemme 3, il en est de même si λ est dans l'adhérence de F.

Soit F une facette de dimension 1. Il existe alors $\alpha \in \Delta^+$, et $j \in \mathbf{Z}^*$ tels que F soit un intervalle ouvert de la droite $\lambda_\alpha = 2j$. En transformant par un élément convenable de W, on voit que l'on peut supposer α simple et $j < 0$. On note $\mathscr{H}$ le sous-espace de $L^2(K)$ formé des fonctions invariantes à droite par M, L le sous-espace de $\mathscr{H}$ formé des fonctions K-finies, L' le sous-espace de L formé des $\varphi \in L$ tels que $\varphi \star X_\alpha^{-j} = 0$ (on a identifié $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$), et $\mathscr{H}'$ l'adhérence de L' dans $\mathscr{H}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\lambda_\alpha = 2j$. Si $\varphi \in \mathscr{H}$, on pose $\pi_\lambda(g)\varphi(k) = a^{-\lambda-\delta}\varphi(k')$ si $g \in G$, $k \in k$, $g^{-1}k = k'an$ avec $k, k' \in K$, $a \in A$, $n \in N$. L'espace $\mathscr{H}'$ est invariant sous π_λ, et nous pouvons noter π'_λ la représentation de G dans $\mathscr{H}'$ qui s'en déduit : en effet, soit T_λ la restriction de $d\pi_\lambda$ à L. Alors L' est stable sous T_λ car, d'après [5] (V.1.6), c'est le noyau d'un opérateur d'entrelacement. Nous noterons T'_λ la restriction de T_λ à L'. Supposons de plus $\lambda \in F$. Par définition d'une facette, on a $\pm\lambda_\beta \notin 2\,\mathbf{N}^*$ pour tout $\beta \in \Delta^+$, $\beta \neq \alpha$. Il résulte de [5] (V.1.12) que T'_λ est irréductible, de sorte que T'_λ est isomorphe à $V(0, \lambda)$ si $\lambda \in F$. Comme T'_{λ_0} est unitaire, il résulte du lemme 2.1. appliqué à $S' = F$ et aux représentations T'_λ, que T'_λ est unitaire pour tout $\lambda \in F$. Il en est de même de $V(0, \lambda)$ si $\lambda \in F$, et d'après le lemme 3, si λ est dans l'adhérence de F.

LEMME 20. — *Soit $t \in]1, 4/3[$. La représentation $V(0, t\,\delta_2 - 2\,\alpha_1)$ n'est pas unitaire.*

Démonstration. — Posons $\lambda_t = t\,\delta_2 - 2\,\alpha_1$. Lorsque t parcourt l'intervalle $]1, (4/3)[$, le point λ_t parcourt une facette F contenue dans la droite $\lambda_{\alpha_1} = -4$.

Nous employons les notations $\mathscr{H}'$, L' de la démonstration du lemme 19.

Pour tout $\delta \in \mathscr{P}$, la multiplicité de la représentation E^δ de $\mathfrak{k}$ dans L' est égale à $\dim E^\delta(0) - \dim E^\delta(2\,\alpha_1)$. En particulier, E^{δ_1} intervient une seule fois dans L'. Supposons qu'il existe $t \in]1, (4/3)[$ tel que $V(0, \lambda_t)$ soit unitaire. Alors T'_{λ_t} est unitaire pour tout $t \in]1, (4/3)[$ (lemme 19).

Notons R l'unique sous-quotient irréductible de T'_{λ_t} (où $t = 4/3$) qui contient L'^{δ_1}. Il résulte du lemme 2.2 que R est unitaire. La représentation R n'est pas isomorphe à $V(0, (4/13)\,\delta_2 - 2\,\alpha_1)$. En effet, par conjugaison par le groupe de Weyl, cette représentation est isomorphe à $V(0, (5/3)\,\delta_2 - \alpha_1)$. C'est un sous-quotient de $L_1(5/3)$ (notations du paragraphe 2.7), et on a $L_1^{\delta_1} = 0$, de sorte que E^{δ_1} n'intervient pas dans $V(0, (4/3)\,\delta_2 - 2\,\alpha_1)$. Il en résulte que R est isomorphe à un module de la forme $V(\delta_1, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (lemme 1). De plus, R est un sous-quotient irréductible de $L(0, (4/3)\,\delta_2 - 2\,\alpha_1)$. Raisonnant comme dans la démonstration du lemme 17, on voit que R est isomorphe à $V(\delta_1, (5/3)\,\alpha_2)$. Mais ceci est absurde, car cette représentation n'est pas unitaire (lemme 9).

Démonstration de ($\star$). — Montrons que la condition est suffisante. Il résulte des propositions 5 et 6 que $V(0, \lambda)$ est unitaire lorsque $\lambda \in E_i$ lorsque $i = 2, 3, 4, 5$ et 6. L'ensemble E_1 est réunion des facettes F' et $w F''$, où F' est la facette qui contient 0, F'' la facette qui contient $(3/4)\,\alpha_2$, et où $w \in W$. Comme les représentations $L(0, 0)$ et $L(0, (3/4)\, w\, \alpha_2)$ sont unitaires (lemme 10), il en est de même de $L(0, \lambda)$ pour $\lambda \in E_1$ (lemme 19).

Démontrons que la condition est nécessaire. Si $\delta = \delta_1$, on a

$$\det b^{\delta}(-1, 0, \lambda) = \textstyle\prod_{\alpha}(2-\lambda_{\alpha})/(2+\lambda_{\alpha})$$

(où α parcourt l'ensemble des trois racines positives courtes) et si $\delta = \delta_2$, on a

$$\det b^{\delta}(-1, 0, \lambda) = \textstyle\prod_{\beta}(2-\lambda_{\beta})/(2+\lambda_{\beta})$$

où β parcourt Δ^+ (lemme 6). Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Il résulte du lemme 8 que, si $V(0, \lambda)$ est unitaire, on a $\prod_{\alpha}(2-\lambda_{\alpha}) \geqslant 0$ (où le produit est pris sur l'ensemble des racines courtes) et $\prod_{\beta}(2-\lambda_{\beta}) \geqslant 0$ (où β parcourt Δ). De plus, λ est dans l'enveloppe convexe de $W(2\,\sigma)$ (lemme 5). Il en résulte que λ est soit dans l'adhérence de E_1, soit dans WT, où T est le triangle de sommets

$$a = \delta_2-\alpha_1, \qquad b = 2\,\delta_2, \qquad c = 3\,\delta_2-\alpha_1 \quad (\text{voir } \textit{fig. } 2).$$

Il reste à déterminer quels sont les points λ de T tels que $V(0, \lambda)$ soit unitaire.

On pose

$$d = \alpha_2+2\,\delta_1, \qquad e = \frac{5}{3}\delta_2-\alpha_1,$$

$$f = \frac{7}{3}\delta_2-\alpha_1, \qquad g = d+\delta_2, \qquad h = 2\,\delta_2-\alpha_1$$

(voir *fig.* 2). Le triangle T est réunion des facettes a, b, c, d, e, f, g, h, (ad), (ae), (de), (bd), $\ldots$, (ade), $\ldots$, où (ad) est le segment ouvert joignant a et d, et où (ade) est l'intérieur du triangle de sommets a, d et e. Lorsque $\lambda = b$ ou $\lambda = g$, $V(0, \lambda)$ n'est pas unitaire (proposition 6). Il en est de même si $\lambda = f$ ou h (proposition 5), ou si $\lambda \in (de)$ (lemme 20). Il résulte du lemme 19 que $V(0, \lambda)$ n'est pas unitaire si λ appartient à une facette qui contient b, g, f ou (de) dans son adhérence. Il en résulte que si $\lambda \in T$ est tel que $V(0, \lambda)$ soit unitaire, λ appartient à l'une des facettes c, a, d, e, (ad) ou (ae), c'est-à-dire à $T \cap E$. Ceci termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4, 5 et 6. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1337; *Bourbaki*, 34).

[2] Conze-Berline (N.) et Duflo (M.) — Sur les représentations induites des groupes semi-simples complexes, *Compos. Math.*, Groningen, t. 34, 1977, p. 307-336.

[3] Dixmier (J.). — *Les C*-algèbres et leur représentations.* — Paris Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[4] Dixmier (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1974 (*Cahiers scientifiques*, 37).

[5] Duflo (M.). — Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes, « *Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Séminaire Nancy-Strasbourg* », 1973-1975, p. 26-88. — Berlin, Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 497).

[6] Duflo (M.). — Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, *Annals of Math.*, t. 105, 1977, p. 107-120.

[7] Gross (K. I.). — The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of Sp (n, C). *Amer J. of Math.*, t. 93, 1971, p. 399-428.

[8] Hiraï (T.). — Structure of induced representations and characters of irreducible representations of complex semi-simple Lie groups, "*Conference on harmonic analysis*", [1971. College Park], p. 167-188. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 266).

[9] Joseph (A.). — *On the annihilators of the principal series*, Orsay, 1977 (Preprint).

[10] Tsuchikawa (M.). — On the representations of SL (3, $\mathbf{C}$), III., *Proc. of. Japan Acad.*, t. 44, 1968, p. 130-132.

[11] Vakhutinskii (I. R.). — Représentations unitaires de GL (3, $\mathbf{R}$)... [en russe], *Math. Sb.*, t. 75 (117), 1968, p. 303-320; [en anglais] *Math. of U.S.S.R.-Sbornik*, t. 4, 1968, p. 273-291.

[12] Vergne (M.). — *Weil representations for the group* $U(n, n)$, 1976 (Preprint).

[13] Warner (G.). — *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, I. and II. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 188-189).

[14] Zelobenko (D. P.). — *Analyse harmonique sur les groupes semi-simples complexes* [en russe]. — Moskva, ed. Nauka, 1974.

Note ajoutée au moment de la révision du manuscrit [mai 1978]. — Les résultats de cet article ont été exposés à un Colloque à l'Université de Bielefeld en 1975. Signalons des travaux récents ayant des rapports avec celui-ci.

B. Speh (*Some results on principal series of* GL (n, R) (Thesis, M.I.T. 1977) a obtenu la classification des représentations unitaires irréductibles de GL (4, $\mathbf{R}$).

A. Knapp et G. Zuckerman (Classification theorems for representations of semi-simple Lie groups, « *Non-Commutative harmonic analysis* », p. 138-157. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Mathematics*, 587) donnent l'analogue du lemme 7 pour les groupes semi-simples réels.

N. Wallach (dans Borel (A.) and Wallach (N.)). — *Seminar notes on continuous cohomology*, Princetown, 1977) donne une version bien meilleure du lemme 5, et de surcroît valable pour les groupes semi-simples réels. Toutefois son utilisation ne simplifierait pas notablement les calculs du présent article.

D'autre part, des résultats plus généraux que ceux du lemme 2 se déduisent de l'article de D. Milicic (On C^*-algebras with bounded trace, *Glasnik Matematickis*, t. 8, 1973, p. 7-22).