BULLETIN DE LA S. M. F.

TOSHIO NISHINO

Prolongements analytiques au sens de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 97-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__97_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 97-112.

PROLONGEMENTS ANALYTIQUES AU SENS DE RIEMANN

PAR

TOSHIO NISHINO (*)

[Univ. Kyushu, Fukuoka]

RÉSUMÉ. — Soient R_0 une sous-région bordée régulièrement sur une surface de Riemann R, et F un revêtement fini de R_0 au sens d'Ahlfors. Si R_0 est de genre plus grand que 1 et que F est plan, l'aire de F sera évaluée par la longueur de la frontière relative de F par rapport à R_0. Ce fait entraîne quelques théorèmes sur le prolongement analytique au sens de Riemann.

ABSTRACT. — Let R_0 be a regularly bordered subregion on a Riemann surface R, and let F be a finite covering surface of R_0 by the mean of Ahlfors. If R_0 is of genus grater than 1 and if F is planar, the area of F will be evaluated by the length of the relative boundary of F with respect to R_0. This fact involve some theorems on the analytique prolongation by the mean of Riemann.

Introduction

Soit R une surface de Riemann compacte ou non et de genre strictement supérieur à 1. Il existe sur R une métrique de Poincaré dont la courbure est constante négative. La longueur et l'aire sur R seront toujours mesurées par cette métrique. Considérons, dans l'intérieur complet de R, une partie connexe R_0 limitée par un nombre fini de courbes simples fermées suffisamment lisses. On suppose que R_0 est aussi de genre strictement supérieur à 1. Au-dessus de R_0, considérons un revêtement fini F_0 au sens d'AHLFORS [1]. Désignons par A l'aire de F_0, et par L la longueur de la frontière relative

(*) Texte reçu le 18 mars 1977.
Toshio NISHINO, Faculty of Technology, University of Kyushu, 6-10-1, Hakosaki, Higashi-ku, Fukuoka-Shi (Japon).

de F_0 par rapport à R_0. Alors, nous pouvons montrer, à l'aide de la théorie des revêtements d'Ahlfors, que si F_0 est de genre 0, on a l'inégalité

$$L \geqslant \alpha A,$$

où α est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0. Cet énoncé nous conduit aux deux théorèmes suivants concernant la possibilité de prolongement analytique au sens de Riemann.

Soit R une surface de Riemann quelconque, soit F une surface de Riemann parabolique et de genre fini, et soit f une application analytique non constante de F dans R. Alors, on peut dire que R est aussi parabolique et de genre fini. De plus, si R est de genre strictement supérieur à 1, f peut se prolonger analytiquement en une application du compactifié de F dans celui de R.

Soit M une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes au-dessus d'un disque quelconque D dans le plan d'une variable complexe z. On suppose que la fibre générale de M est de genre strictement supérieur à 1. Soit, ensuite, ψ une section analytique de M au-dessus de D privé d'un ensemble fermé e. Alors, on peut dire que ψ peut se prolonger analytiquement en une section analytique de M au-dessus de D tout entier, pourvu que e soit de capacité logarithmique nulle.

Tels sont les résultats de ce mémoire.

Dans la première section, on établira un certain mode de déformation d'un revêtement fini étalé au-dessus d'un disque dans un plan. Ceci jouera un rôle important dans la démonstration de l'inégalité fondamentale ci-dessus, faite dans la deuxième section. Dans la troisième section, on établira une proposition intermédiaire qui découle de cette inégalité. La dernière section sera consacrée aux deux théorèmes qu'on vient de dire. La proposition nous permettra de les établir comme d'habitude sans aucune difficulté.

1. Une déformation d'un revêtement fini

Soit R une surface de Riemann quelconque, et soit R_0 une partie connexe dans l'intérieur complet de R, limitée par un nombre fini de courbes simples fermées C_j ($j = 1, \ldots, n$) suffisamment lisses. En outre, considérons une surface de Riemann F qui s'étale au-dessus de R_0 et dont la frontière est formée d'un nombre fini de contours. π désigne la projection de F sur R_0. F s'appellera revêtement fini au-dessus de R_0 si F et R_0 admettent respectivement des décompositions triangulaires en un nombre fini de triangles $(\tilde{\Delta})$

et (Δ), telles qu'à tout triangle $\tilde{\Delta}$ de $(\tilde{\Delta})$ corresponde homéomorphiquement par π un triangle Δ de (Δ). Alors, $\tilde{\Delta}$ sera dit situé au-dessus de Δ. La partie de la frontière de F, dont la projection se trouve dans l'intérieur de R_0, s'appelle frontière relative de F par rapport à R_0.

Dans cette section, on se borne au cas où R_0 est un disque unité $D : |t| < 1$ dans le plan d'une variable complexe t. C désigne le contour de D. On désigne par $\tilde{\Gamma}^*$ la frontière relative de F par rapport à D, et on pose $\Gamma^* = \pi(\tilde{\Gamma}^*)$. On pose ici, pour simplifier l'explication, les hypothèses suivantes :

(*a*) pour tout côté α sur Γ^* de (Δ), il n'y a qu'un côté $\tilde{\alpha}$ sur $\tilde{\Gamma}^*$ de $(\tilde{\Delta})$ au-dessus de α;

(*b*) pour tout sommet P sur Γ^* de (Δ), il y a au plus deux sommets de $(\tilde{\Delta})$ qui se trouvent sur $\tilde{\Gamma}^*$ et au-dessus de P;

(*c*) il n'y a aucun triangle Δ de (Δ) dont deux côtés, ou bien un côté α et le sommet P opposé à α, se trouvent sur Γ^* en même temps, ni aucun triangle dont deux sommets appartiennent à Γ^* sans que le côté entre eux ne soit contenu dans Γ^*.

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité puisque les deux premières sont remplies en variant un peu la frontière de F, et la dernière est aussi remplie en considérant une décomposition triangulaire plus fine.

Maintenant, considérons une composante connexe $\tilde{\Gamma}$ de la frontière relative de F par rapport à D. Nous nous proposons d'établir un mode de déformation de F afin d'obtenir un revêtement n'ayant pas $\tilde{\Gamma}$ comme frontière. On pose $\Gamma = \pi(\tilde{\Gamma})$. Γ est une courbe fermée dans D ou une courbe dans D qui lie deux points q' et q'' sur C suivant que $\tilde{\Gamma}$ est fermée ou non. D'abord, on décompose Γ en un nombre fini de courbes simples fermées de la façon suivante :

Pour point de départ q_0, on prend un point régulier quelconque de Γ si Γ est fermée. Lorsque Γ est ouverte, on prend pour q_0 l'une des extrémités q' et q'' de Γ conformément à l'orientation de Γ qu'on va dire. Le point variable p qui décrit Γ avance à partir de q_0 de manière que le point $\tilde{p}$, correspondant à p par π sur $\tilde{\Gamma}$ varie continûment en voyant l'intérieur de F du côté gauche. Si, avant que p n'arrive au terminus, p passe encore par un point par lequel p a passé déjà une fois, on désigne par q_1 le premier de ces points, et par γ_1 la courbe tracée par p après que p a passé par q_1 pour la première fois et avant que p passe par q_1 pour la deuxième fois. γ_1 est certainement simple. La courbe γ_1 correspond à une partie $\tilde{\gamma}_1$ de $\tilde{\Gamma}$ avec deux extrémités $\tilde{q}_1'$ et $\tilde{q}_1''$ situés au-dessus de q_1. Ici, on enlève γ_1 à Γ. Et, on fait varier p encore à partir de q_0 dans le même sens. Alors, $\tilde{p}$ varie sur $\tilde{\Gamma}$ à l'exception de $\tilde{\gamma}_1$, d'ailleurs continûment. S'il existe encore des points doubles de Γ, on aura, d'après le même procédé, un autre point q_2 et une autre courbe simple γ_2, et ainsi de suite. On aura alors un nombre fini de points q_i $(i = 1, \ldots, m)$, le même nombre de courbes simples γ_i $(i = 1, \ldots, m)$, et la dernière courbe simple γ_0 qui part de q_0 et revient à q_0 ou qui lie q' et q'', suivant que Γ est fermée ou non. On appellera q_i les sommets de Γ et γ_i les cycles partiels de Γ. Chaque sommet q_i correspond exactement à deux points $\tilde{q}_i'$ et $\tilde{q}_i''$ de $\tilde{\Gamma}$, mais chaque cycle partiel γ_i correspond à une ou plusieurs parties connexes $\tilde{\gamma}_i^\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \nu_i)$ de $\tilde{\Gamma}$. On pose $\tilde{\gamma}_i = \bigcup \tilde{\gamma}_i^\nu$. On désigne par δ_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ la partie de D limitée par γ_i. Lorsque γ_0 est ouverte, on prend pour δ_0 l'une quelconque de deux parties de D séparées par γ_0. Ici, on classifie les cycles partiels γ_i en deux classes. On dira que γ_i est de première classe ou de deuxième classe suivant que l'intérieur de δ_i se trouve du côté droit ou du côté gauche pour le sens de parcours de p. On voit facilement que ceci est bien défini puisque, sur chaque cycle partiel γ_i, p varie continûment dans un sens déterminé. Ensuite, on dira qu'un sommet q_i est de première, de deuxième ou de troisième espèce suivant que les cycles partiels passant par q_i sont respectivement de première classe tous les deux, l'un de première et l'autre de deuxième classe, ou de deuxième classe tous les deux.

Cela posé, nous allons déformer F de la manière suivante :

(A) D'abord, on identifie, pour chaque sommet q_i, les deux points $\tilde{q}_i'$ et $\tilde{q}_i''$ au-dessus de q_i. On désigne par $\tilde{q}_i$ le point obtenu ainsi par identification, sa projection étant q_i.

(B) Ensuite, on considère un cycle partiel de Γ de première classe. On le désigne, à nouveau, par γ. Soit δ la partie de D limitée par γ, et soit $\tilde{\gamma}$ la partie de $\tilde{\Gamma}$ au-dessus de γ. Dans ce cas, il n'y a aucune partie de F ayant $\tilde{\gamma}$ comme frontière et située au-dessus de l'intérieur de δ. On prépare ici un exemplaire $\tilde{\delta}$ de δ, et on met $\tilde{\delta}$ au-dessus de δ et en contiguïté avec F le long de $\tilde{\gamma}$. Alors, en considérant la projection naturelle de $\tilde{\delta}$ sur δ, la projection π se prolonge continûment sur toute la surface ainsi déformée.

(C) On considère maintenant un cycle partiel de Γ de deuxième classe. On le désigne, à nouveau, par γ'. Soit δ' la partie de D limitée par γ', et soit $\tilde{\gamma}'$ la partie de $\tilde{\Gamma}$ au-dessus de γ'. Dans le cas actuel, il y a une partie de F

située au-dessus d'une certaine partie de l'intérieur de δ' et ayant $\tilde{\gamma}'$ comme sa frontière. Ici, à l'aide de la décomposition triangulaire, on enlève à F certains triangles de $(\tilde{\Delta})$ situés au-dessus de δ' de la façon suivante : d'abord, on enlève tous les triangles ayant un côté ou un sommet sur γ'. Ensuite, on enlève de proche en proche les triangles qui ont été contigus aux triangles déjà enlevés, dans la mesure du possible, à condition que, pour tout triangle Δ de (Δ) dans δ', on enlève au plus un triangle au-dessus de Δ.

(D) Après un procédé d'enlèvement (C), on va mettre en contiguïté certaines paires de triangles de la nouvelle surface. Pour tout côté α de (Δ) dans δ', il y a au plus deux côtés de $(\tilde{\Delta})$ qui se trouvent sur la nouvelle frontière et au-dessus de α. Au cas où il y a exactement deux tels côtés $\tilde{\alpha}'$ et $\tilde{\alpha}''$ de $(\tilde{\Delta})$, le triangle $\tilde{\Delta}$ de $(\tilde{\Delta})$, qui a $\tilde{\alpha}'$ comme son côté et qui n'a pas été enlevé, se trouve au-dessus du triangle à l'opposé par rapport à α du triangle au-dessus duquel se trouve le triangle $\tilde{\Delta}''$ qui a $\tilde{\alpha}''$ comme son côté et qui n'a pas été enlevé. Alors, on met en contiguïté ces deux triangles $\tilde{\Delta}'$ et $\tilde{\Delta}''$ en identifiant $\tilde{\alpha}'$ avec $\tilde{\alpha}''$. On procède ainsi pour tous les α. La projection π reste continue sur toute la surface ainsi déformée.

D'après les hypothèses que l'on a imposées à la décomposition triangulaire, les procédés de la déformation sont réalisés sans aucune ambiguïté. On voit facilement que les points $\tilde{q}_i$ correspondant aux sommets de première et de deuxième espèce de Γ deviennent respectivement points critiques d'ordre 1 et points réguliers de la surface ainsi obtenue. Pour les points $\tilde{q}_i$ correspondant aux sommets de troisième espèce, il n'y a aucun problème puisqu'ils se dissipent.

On remarque ici que le moyen d'enlever dans la déformation (C) n'est pas unique. Et, on peut toujours supposer que la nouvelle surface au-dessus de D n'admet sur sa frontière relative par rapport à D aucune partie qui se produit à nouveau par les quatre déformations. En effet, supposons que quelques parties se produisent sur la nouvelle frontière relative par rapport à D, et soit $\tilde{\Delta}$ un triangle de $(\tilde{\Delta})$ dont un côté $\tilde{\alpha}$ est né sur la nouvelle frontière. Soit α la projection de $\tilde{\alpha}$. Alors, il y a un triangle $\tilde{\Delta}'$ de $(\tilde{\Delta})$ qui a été enlevé à F et qui a eu la même projection que $\tilde{\Delta}$. D'après la façon même de déformation, il n'y a aucun triangle de $(\tilde{\Delta})$ contigu à $\tilde{\Delta}'$ au-dessus de α. Par suite, il suffit, pour notre but, d'enlever le triangle $\tilde{\Delta}'$ à la place de $\tilde{\Delta}$. D'après l'hypothèse, ceci est certainement possible.

Désignons par F' la surface ainsi obtenue, et par π' la projection ainsi définie de F' sur D. F' n'est pas nécessairement connexe. Mais il est évident que, par la projection π', F' peut être regardée aussi comme un revêtement fini au-dessus de D. Car F' se compose d'un nombre fini de triangles et, pour chaque côté $\tilde{\alpha}$ d'un triangle $\tilde{\Delta}$ de F', il y a au plus un triangle contigu à $\tilde{\Delta}$ en $\tilde{\alpha}$. Il suit de là que F' admet une structure de surface de Riemann telle que la projection π' devienne analytique. Evidemment, F' n'a plus le contour $\tilde{\Gamma}$ et la frontière relative de F' par rapport à D ne consiste qu'en certaines parties de la frontière de F. Il peut arriver que plusieurs parties de contours de F forment ensemble un seul contour de F', parce que certains contours perdent certaines parties, et que certaines parties laissées se rattachent l'une après l'autre cycliquement. Maintenant, je dis que :

Si F est de genre zéro, F' l'est aussi.

En effet, par hypothèse, il y a, dans un plan E d'une variable complexe, un domaine G qui est homéomorphe à F avec ses contours. On considère G comme un modèle de F, et on va déformer G de la même façon qu'on déforme F. On peut supposer que, K étant le contour de G qui correspond à $\tilde{\Gamma}$ ou bien contient la partie correspondant à $\tilde{\Gamma}$, G se trouve en dehors de la partie limitée par K. Alors, d'après la définition des cycles partiels de Γ, les identifications de points dans la déformation (A) peuvent être réalisées dans le plan E. K devient alors un nombre fini de courbes simples fermées, l'une attachée à certaines autres mais située à l'extérieur des autres. Cela posé, la déformation (B) est aussi réalisée facilement dans E. Maintenant, nous allons faire les déformations (C) et (D) à la fois pour chaque cycle partiel γ' de Γ de deuxième classe, successivement dans l'ordre original. Désignons, à nouveau, par q_ν $(\nu = 1, \ldots, l)$ les sommets de Γ situés sur γ'. A ce moment, les suffixes sont numérotés cycliquement dans un sens quelconque ou à tour de rôle à partir d'une extrémité q' de γ', suivant que γ' est fermée ou non. Soient γ'_ν $(\nu = 1, \ldots, l)$ les parties de γ' limitées par q_ν et $q_{\nu+1}$, où l'on convient de poser $q_{l+1} = q_1$ ou $q_{l+1} = q''$. Lorsque γ' est ouvert, il y a encore une partie γ'_0 de γ' limitée par q' et q_1. Soit $\tilde{\gamma}'_\nu$ la partie de γ' au-dessus de γ'_ν; $\tilde{\gamma}'_\nu$ est évidemment connexe. Et, pour chaque $\tilde{\gamma}'_\nu$, il y a exactement une partie connexe $\tilde{\delta}'_\nu$ de F qui a $\tilde{\gamma}'_\nu$ sur sa frontière et qui a été enlevée à F par la déformation (C). On pose $\delta'_\nu = \pi(\tilde{\delta}'_\nu)$. Par hypothèse, ils ne se superposent pas, mais il peut arriver qu'il y ait dans δ' quelques aires qui ne sont pas recouvertes par la réunion des δ'_ν. Elles s'appelleront trous. Ici, pour diminuer la complication de la configuration, nous allons réduire le cas général au cas où il n'y a aucun trou. Soient σ_μ les composantes connexes des trous, et soient τ_μ les contours de σ_μ. De plus, on désigne par τ_μ^ν la partie de τ_μ qui se trouve sur la frontière de δ'_ν

si elle existe. Alors, il y a une partie connexe $\tilde{\tau}_\mu^\nu$ de la frontière de F correspondant à τ_μ^ν. On prépare quelques exemplaires $\tilde{\sigma}_\mu^\nu$ de σ_μ, et on met en contiguïté $\tilde{\sigma}_\mu^\nu$ à F le long de $\tilde{\tau}_\mu^\nu$. Soit F^0 le revêtement formé de F par cette modification. Il est aussi de genre zéro et la déformation (C) pour F^0 n'admet plus de trou dans δ'. De plus, si l'on a un revêtement F^* de genre zéro par la déformation (D) à partir de F^0, il en est de même pour F puisque F' est évidemment une partie de F^*, et qu'une partie quelconque d'une surface de Riemann de genre zéro est aussi de genre zéro. Donc on peut supposer, sans restreindre la généralité, que l'on a $\delta' = \bigcup \delta'_\nu$. Alors, la frontière de $\tilde{\delta}'_\nu$ sauf sa partie $\tilde{\gamma}'_\nu$ ne se trouve pas sur la frontière de F. Dans cette situation ainsi réduite, on verra facilement que les déformations (C) et (D) pour γ' sont réalisées dans le plan E. Donc, l'énoncé a été démontré.

On dira désormais que les quatre déformations que l'on a définies dans cette section, *servent à enlever le contour* $\tilde{\Gamma}$.

2. Aire d'un revêtement fini

Soit R une surface de Riemann de genre g. On suppose g égal ou supérieur à 2. Il peut être infini. Alors, on peut considérer le disque unité $\mathfrak{C}$: $|w| < 1$ dans le plan d'une variable complexe $w\,(w = u+\sqrt{-1}\,v)$ comme son revêtement universel. On désigne par λ l'application canonique de $\mathfrak{C}$ sur R. Munissons le disque $\mathfrak{C}$ de la métrique non euclidienne dont l'élément d'arc ds et l'élément d'aire $d\sigma$ sont donnés respectivement par

$$ds = \frac{2\,|dw|}{1-|w|^2} \qquad \text{et} \qquad d\sigma = \frac{4\,du\,dv}{(1-|w|^2)^2}.$$

Cette métrique induit naturellement une métrique de Poincaré sur R. Dans la suite, la longueur et l'aire dans R seront mesurées toujours par cette métrique-ci.

Considérons sur R une partie R_0 telle que l'on en a considéré au début de la section précédente. On suppose que le genre g_0 de R_0 est aussi égal ou supérieur à 2. Soit $\{C\}$ l'ensemble de toutes les courbes régulières qui sont fermées et ne sont pas homologues à zéro dans R_0 ou bien qui lient deux points sur la frontière de R_0 et ne sont pas relativement homologues à zéro dans R_0 par rapport à la frontière de R_0. Alors, il y a un nombre réel positif b tel que, pour toute courbe C de $\{C\}$, la longueur de C soit plus grande que b. On pose $b_0 = b/2$. Pour un point quelconque p sur R_0, D_p

désigne l'ensemble de tous les points q de R tels que la distance entre p et q soit plus petite que b. Il est évident que $D_p \cap R_0$ est toujours simplement connexe.

Maintenant, on considère un revêtement fini F au-dessus de R_0. Désignons par A l'aire de F, et par L la longueur totale de la frontière relative de F par rapport à R_0. Alors, on aura le lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL. — *Si F est de genre zéro, on a l'inégalité*

$$L \geqslant \alpha A,$$

où α est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0.

Avant de procéder à la démonstration du lemme, on considère une partie simplement connexe G sur R limitée par une seule courbe simple fermée K suffisamment lisse. Soit a l'aire de G, et soit l la longueur de K. Alors, on a l'inégalité $a < l$.

En effet, il suffit de démontrer cet énoncé pour un domaine G dans le disque $\mathfrak{C}$ avec la métrique non euclidienne. Or, comme on le sait bien, toute solution du problème isopérimétrique dans un plan muni d'une métrique dont la courbure est une constante négative est aussi un disque [4]. Un calcul facile montre que la longueur de la circonférence $|w| = r$ $(r < 1)$ et l'aire du disque $|w| < r$, mesurées par la métrique non euclidienne, sont données respectivement par

$$\frac{4\pi r}{1-r^2} \quad \text{et} \quad \frac{4\pi r^2}{1-r^2},$$

ce qui entraîne l'inégalité $a < l$.

Cela posé, on se propose de démontrer le lemme. Désignons par $\tilde{\Gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ les composantes connexes de la frontière relative de F par rapport à R_0, et par L_i $(i = 1, \ldots, m)$ la longueur de $\tilde{\Gamma}_i$. En outre, on dénote N le nombre des composantes connexes de la frontière de F. D'abord, on suppose que, pour tout $\tilde{\Gamma}_i$, on a l'inégalité $L_i \geqslant b_0$. Alors, on a évidemment l'inégalité $m \leqslant L/b_0$. D'autre part, d'après AHLFORS ([1], p. 169), on a, pour chaque contour C_j de R_0 $(j = 1, \ldots, n)$, l'inégalité

$$|S(C_j) - S| \leqslant h_1 L,$$

où $S(C_j)$ est le nombre moyen de feuillets de F au-dessus de C_j, S est celui de F au-dessus de R_0, et h_1 est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0. Au cas actuel, on a $S = A/A_0$, A_0 étant l'aire de R_0. De plus, le nombre des composantes connexes de la frontière de F qui se trouvent au-dessus de C_j en surpasse pas le nombre $S(C_j)$. Il vient donc l'inégalité

$$N \leqslant L/b_0 + n\,S + nh_1 L.$$

Or, le théorème fondamental dans la théorie des revêtements d'Ahlfors ([1], p. 168) est l'inégalité

$$\max(\rho, 0) \geqslant \rho_0\, S - h_2 L,$$

où ρ et ρ_0 sont respectivement les nombres caractéristiques d'Euler de F et de R_0, et h_2 est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0. Au cas actuel, on a $\rho = N-2$ et $\rho_0 = 2\,g_0 - 2 + n$. De là suit l'inégalité

$$L/b_0 + n\,S + nh_1 L \geqslant (2g_0 - 2 + n)S - h_2 L,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$L \geqslant \alpha_1 A, \qquad \text{où} \quad \alpha_1 = (2g_0 - 2)(1/b_0 + nh_1 + h_2)^{-1} A^{-1}.$$

Le lemme a donc été démontré à condition que l'on ait $L_i \geqslant b_0$ pour tout $\tilde{\Gamma}_i$ (1).

Pour démontrer le lemme dans le cas général, nous allons déformer F afin que la frontière relative du revêtement fini déformé F^* sur R_0 n'ait plus de composante connexe de longueur plus petite que b_0. Supposons qu'il y ait une telle composante que l'on désigne, à nouveau, par $\tilde{\Gamma}$. Par hypothèse, lorsqu'on prend un point p convenable sur R_0, la projection Γ de $\tilde{\Gamma}$ dans R_0 se trouve dans l'intérieur de $D_p \cap R_0$. Soit F^0 la composante connexe, ayant $\tilde{\Gamma}$ sur sa frontière, de la partie de F qui est située justement au-dessus de $D_p \cap R_0$. Alors, la déformation servant à enlever le contour $\tilde{\Gamma}$ est applicable à F^0. Ici, remarquons que, les notations étant celles de la première section, lorsque Γ est ouvert, une certaine partie de la frontière de R_0 fait partie de la frontière de δ_0. Il peut arriver que, par la déformation, quelques parties de la frontière de F en dehors de $\tilde{\Gamma}$ soient changées. Lorsque la frontière relative du nouveau revêtement par rapport à R_0 admet encore une composante connexe $\tilde{\Gamma}'$ de longueur plus petite que b_0, on fait la défor-

(1) Je dois l'idée à M. Tsuji pour ce mode d'application du théorème d'Ahlfors. *Voir*, par exemple [6], p. 479-480.

mation servant à enlever le contour $\tilde{\Gamma}'$ pour ce revêtement, et ainsi de suite. On arrivera à un nouveau revêtement fini F^* dont la frontière relative par rapport à R_0 n'a aucune composante connexe de longueur plus petite que b_0. Désignons par A^* l'aire de F^* et par L^* la longueur totale de la frontière totale de la frontière relative de F^* par rapport à R_0. Alors, du résultat ci-dessus, on déduit l'inégalité

$$L^* > \alpha_1 A^*.$$

D'autre part, on a l'inégalité $L^* \leqslant L$ puisque la frontière relative de F^* par rapport à R_0 se compose seulement de certaines parties de la frontière de F. De plus, on aura l'inégalité $A^* \geqslant A - c\,L$, où c est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0. En effet, par définition, l'aire totale des parties enlevées de F par la déformation ne surpasse pas la somme de toutes les aires des parties δ' limitées les cycles partiels γ' de Γ de deuxième espèce. Lorsque le cycle partiel γ' est ouvert, δ' est limitée par γ' et par un arc C' sur l'un des contours de R_0. A ce moment, il y a un nombre réel positif c' tel que l'on ait $l' \leqslant c'\,l$, où l et l' sont respectivement la longueur de γ' et celle de C', puisque, par hypothèse, les contours de R_0 sont suffisamment lisses. c' ne dépend que de R_0. D'où, en posant $c = c'+l$, l'inégalité demandée $A^* \geqslant A - c\,L$. Elle entraîne l'inégalité

$$L \geqslant \alpha_1 (A - cL),$$

qui peut s'écrire :

$$L \geqslant \alpha A, \qquad \text{où} \quad \alpha = \alpha_1/l + \alpha_1 c.$$

Donc le lemme a été complètement démontré.

On remarque ici que le lemme est évidemment vrai même dans le cas où R est compacte, et R_0 est identique à R.

3. Proposition intermédiaire

Dans le plan d'une variable complexe z, considérons un disque D de la forme $|z| < \rho$ $(\rho < 0)$. On dénote C_0 la circonférence de D. Soit e un ensemble fermé dans l'intérieur complet de D, de capacité logarithmique nulle, et posons $D_0 = D - e$. D'après un théorème de Selberg [5], on peut former une fonction harmonique $u(z)$ dans D qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $u(z)$ est continue sur $D_0 \cup C_0$ et prend la valeur zéro sur C_0;

2° pour toute suite de points z_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ tendant vers un point de e, on a $\lim u(z_\mu) = \infty$;

3° on a l'égalité $\int_{C_0} du^* = 2\pi$, où du^* est la différentielle conjuguée de du.

On désigne par D_0^r la partie de D_0 donnée par l'inégalité $e^u < r\,(r > 1)$ et par C_r la courbe dans D_0 donnée par l'égalité $e^u = r$. D_0^r est évidemment connexe et, lorsque r augmente indéfiniment, D_0^r tend vers D_0. D'autre part, C_r se compose, en général, de plusieurs courbes simples fermées. Soit $v(z)$ une fonction harmonique conjuguée à $u(z)$ dans D_0. $v(z)$ n'est pas uniforme. La variation totale de la valeur de $v(z)$ sur C_r est toujours 2π. De la façon habituelle, on coupe D_0 le long de certaines courbes de niveau convenables de la forme $v(z) = c_\nu\,(0 \leqslant c_\nu < 2\pi,\ \nu = 1, 2, \ldots)$, afin que le domaine découpé $\tilde{D}_0$ devienne simplement connexe. Alors, la fonction donnée par

$$w = \xi(z) = \exp\{u(z) + \sqrt{-1}\,v(z)\},$$

fait correspondre à $\tilde{D}_0$ biunivoquement un domaine $\tilde{V}$ obtenu à partir du domaine V donné par l'inégalité $|w| > 1$, à l'exception de plusieurs demi-droites de la forme

$$\arg(w) = c_\nu \quad \text{et} \quad |w| \geqslant r_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

où les $r_\nu\,(r_\nu \geqslant 1)$ sont certains nombres réels. On désigne par $\tilde{V}_r$ la partie de $\tilde{V}$ donnée par l'inégalité $|w| < r\,(r > 1)$ et par K_r la circonférence de la forme $|w| = r$. $\tilde{V}_r$ est l'image de $\tilde{D}_0^r = \tilde{D}_0 \cap D_0^r$ par $\xi(z)$.

En outre, soit Δ une région connexe ou non dans D_0, et soit φ une application analytique de Δ dans une partie R_0 d'une surface de Riemann R. Supposons qu'elles possèdent les mêmes propriétés que l'on a expliquées dans la section précédente. On désigne par C_0^* la partie de la frontière de Δ qui se trouve sur C_0, et par C^* celle qui se trouve dans l'intérieur de D_0. Supposons de plus que φ satisfait aux conditions suivantes :

1° φ est analytique même sur C_0^* et sur C^*;

2° l'image de C^* par φ se trouve sur la frontière de R_0.

Posons $\Delta_r = \Delta \cap D_0^r$ et $C_r^0 = \Delta \cap C_r$. Alors, par hypothèse, l'image F_r de Δ_r par φ peut être regardée comme un revêtement fini étalé au-dessus de R_0. La frontière relative $\tilde{\Gamma}_r$ de F_r par rapport à R_0 se divise en la partie $\tilde{\Gamma}_0$ qui se trouve sur l'image de C_0^* par φ et la partie $\tilde{\Gamma}'_r$ qui est l'image de C_r^0. Soit A_r l'aire de F_r, et soit L_r la longueur de $\tilde{\Gamma}_r$. On a $L_r = L_0 + L'_r$, où L_0

et L'_r désignent respectivement la longueur de $\tilde{\Gamma}_0$ et celle de $\tilde{\Gamma}'_r$. On aura alors le lemme suivant :

LEMME. — *A_r est borné supérieurement pour $r > 1$. Par suite, il y a une suite de nombres r_k ($r_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$) augmentant indéfiniment telle que l'on ait* $\lim L'_{r_k} = 0$.

En effet, on va raisonner par l'absurde. Supposons d'abord que A_r augmente indéfiniment. Soit W l'image de $\Delta \cap \tilde{D}_0$ par ξ. On coupe W le long de certaines courbes régulières convenables afin que le domaine découpé $\tilde{W}$ devienne simplement connexe. On pose $\tilde{W}_r = \tilde{W} \cap \tilde{V}_r$ et $H_r = K_r \cap \tilde{W}$. Posons ici $\Phi = \lambda\varphi\xi^{-1}$. En choisissant une branche quelconque de λ, Φ est bien définie et uniforme dans $\tilde{W}_r$, puisque $\tilde{W}_r$ est aussi simplement connexe. A l'aide de Φ, A_r et L'_r sont données par

$$A_r = \iint_{\tilde{W}_r} \frac{4|\Phi'|^2}{(1-|\Phi|^2)^2} r.dr.d\theta \quad \text{et} \quad L'_r = \int_{H_r} \frac{2|\Phi'|}{1-|\Phi|^2} r.d\theta,$$

où $w = re^{i\theta}$, et Φ' désigne la dérivée de Φ par rapport à w. D'où, d'après le lemme de Schwarz, l'inégalité

$$(L'_r)^2 \leqslant 2\pi r \frac{dA}{dr}.$$

D'autre part, d'après le lemme fondamental de la section précédente, on a l'inégalité $L_r \geqslant \alpha A_r$, où α est un nombre réel positif qui ne dépend que de R_0. Par suite, on obtient, pour r tel qu'on ait $\alpha A > L_0$, l'inégalité

$$\frac{dr}{r} \leqslant 2\pi \frac{dA}{(\alpha A_r - L_0)^2}.$$

Ceci est évidemment impossible. Donc, A_r est bornée supérieurement.

Supposons ensuite qu'il y ait un nombre réel positif l_0 tel que l'on ait $L'_r \geqslant l_0$ dès que $r \geqslant r_0$, r_0 étant un certain nombre réel plus grand que 1. Alors, la première inégalité entraîne l'inégalité

$$\frac{de}{r} \leqslant 2\pi \frac{dA}{l_0^2}.$$

Ceci est une contradiction avec le fait ci-dessus. Il s'ensuit que l'on peut extraire une suite de nombres r_k ($r_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$) telle que $\lim r_k = \infty$ et $\lim L'_{r_k} = 0$. Le lemme est donc démontré.

Posons

$$e_\Delta = e \cap \Delta, \qquad e'_\Delta = e_\Delta \cap \bar{C}^* \qquad \text{et} \qquad e''_\Delta = e_\Delta - e'_\Delta,$$

où $\bar{\Delta}$ et $\bar{C}^*$ désignent respectivement la fermeture de Δ et celle de C^* dans D. Alors, d'après le lemme, on aura la proposition suivante :

PROPOSITION. — *φ admet une valeur frontière en tout point de e_Δ. Par suite, φ se prolonge analytiquement aux points de e''_Δ, et l'image de $\Delta \cup e''_\Delta$ par φ forme un revêtement fini étalé au-dessus de R_0 dont la frontière relative par rapport à R_0 consiste seulement en $\tilde{\Gamma}_0$.*

En effet, soit z_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) une suite de points dans Δ tendant vers un point z_0 de e_Δ, telle que la suite des images $\varphi(z_\mu)$ tende vers un point Q dans la fermeture $\bar{R}_0$ de R_0. Soit δ_ε la partie dans R_0 qui se compose de tous les points q tels que la distance entre q et Q soit plus petite que ε, ε étant un nombre réel positif, et soit Δ la composante connexe de $D - D_0^r$ qui contient z_0. Alors, l'image τ_r de $\sigma_r \cap \Delta$ par φ se trouve dans δ_ε, quelque petit que soit ε, pourvu que r surpasse un certain nombre réel r_0. Car, d'après le lemme, l'aire de τ_r tend vers zéro quand r augmente indéfiniment, et la suite L'_{r_k} tend aussi vers zéro. Ceci signifie que φ admet une valeur limite en z_0. La proposition est donc démontrée.

4. Prolongements analytiques au sens de Riemann

(*a*) Soit F une surface de Riemann parabolique et de genre fini. Alors, F peut être regardée comme une partie d'une surface de Riemann compacte $\tilde{F}$, $\tilde{F} - F$ étant un ensemble fermé $\tilde{e}$ de capacité logarithmique nulle. $\tilde{F}$ est déterminée de façon unique par F à l'équivalence analytique près; elle s'appellera la *compactifiée* de F. Considérons dans $\tilde{F}$ une partie simplement connexe G qui est limitée par une courbe simple fermée C suffisamment lisse et qui contient tous les points de $\tilde{e}$. Alors, on peut faire correspondre analytiquement et biunivoquement à G un disque unité D : $|z| < 1$ dans le plan de z. A l'ensemble fermé $\tilde{e}$ correspond un ensemble fermé e de capacité logarithmique nulle dans D. En outre, soit R une surface de Riemann quelconque et soit f une application analytique non constante de F sur R. Alors, comme on le sait bien, R doit être parabolique. On aura de plus le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *R est de genre fini. Si R est de genre au moins égal à 2, f peut se prolonger analytiquement en une application du compactifié $\tilde{F}$ de F sur celui $\tilde{R}$ de R.*

En effet, on suppose que R est de genre strictement supérieur à 1. Considérons une suite de parties connexes R_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) de R telles que l'on ait $R_\mu \subset\subset R_{\mu+1}$ et $R = \bigcup R_\mu$. On suppose que les R_μ sont limitées respectivement par un nombre fini de courbes simples fermées suffisamment lisses et que R_1 est de genre strictement supérieur à 1 et contient l'image de $F-G$ par f. Soit F_μ une partie de F, connexe ou non, qui se compose des points q tels que l'on ait $f(q) \in R_\mu$. Alors, d'après la proposition de la section précédente, lorsqu'on prolonge f analytiquement autant que possible aux points de e qui se trouvent sur la frontière de F_μ, l'image de F_μ par f peut être regardée comme un revêtement fini étalé au-dessus de R_μ sans frontière relative par rapport à R_μ. Par suite, le genre de R_μ ainsi que celui de R ne peuvent surpasser celui de F. Soit $\tilde{R}$ un compactifié de R. Alors, f se prolonge analytiquement en une application de $\tilde{F}$ sur $\tilde{R}$, et l'image de $\tilde{F}$ par f est un revêtement fini étalé au-dessus de $\tilde{R}$ sans frontière relative par rapport à $\tilde{R}$. Le théorème est donc démontré.

(*b*) Soit M une variété analytique à deux dimensions et soit p une projection analytique propre de M sur un disque D : $|z| < \rho$, ρ étant un nombre réel positif quelconque, dans le plan de z. M sera appelée famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes au-dessus de D si, pour tout z de D, la fibre $S_z = p^{-1}(z)$ au-dessus de z est compacte et connexe. S'il en est ainsi, toutes les fibres sauf celles au-dessus d'un certain ensemble discret dans D sont irréductibles, non singulières, d'ordre 1 et de même genre g. Une fibre n'ayant pas toutes ces propriétés sera dite critique. Soit δ un domaine quelconque dans D, et soit ψ une application analytique de δ dans M. ψ s'appellera section analytique de M au-dessus de δ si l'on a $p.\psi = \mathrm{id}$.

Maintenant, on considère un ensemble fermé e dans D, et on pose $D_0 = D-e$. Comme on l'a vu dans mon mémoire précédent ([3], p. 538), si g est strictement supérieur à 1 et si e est discret dans D, toute section analytique de M au-dessus de D_0 peut se prolonger analytiquement en une section analytique de M au-dessus de tout D. De plus, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Lorsque g est au moins égal à 2, toute section analytique ψ de M au-dessus de D_0 peut se prolonger analytiquement en une section analytique de M au-dessus de tout D pourvu que e soit de capacité logarithmique nulle.*

En effet, d'après ce qu'on vient de dire, il suffit de le démontrer au voisinage d'un point z_0 de e tel que la fibre S_{z_0} au-dessus de z_0 ne soit pas critique.

On suppose que z_0 est l'origine, et on désigne par R la fibre au-dessus de l'origine. Comme on le sait, une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes sans fibre critique au-dessus d'un disque D^* peut être réalisée comme un domaine multivalent sans frontière relative étalé au-dessus de l'espace produit $D^* \times P^1$, P^1 étant une sphère de Riemann. Par suite, lorsqu'on prend la partie connexe R_0 de R obtenue en enlevant un nombre fini d'aires simplement connexes limitées respectivement par une courbe simple fermée suffisamment lisse, on peut trouver une partie W de M et une application analytique ζ de W sur R_0 telles que, pour tout z de D, ζ fasse correspondre à $S_z \cap W$ biunivoquement R_0 pourvu que $S_z \cap W$ ne soit pas vide. On pose $D' = P(W)$ et $M' = p^{-1}(D')$. On peut supposer sans restreindre la généralité que D' est un disque de la forme $|z| < \rho'$ $(0 < \rho' < \rho)$ et que la circonférence C' de D' ne contient aucun point de e. Dans toute la suite, on se placera seulement dans M'. Evidemment, M' ne contient aucune fibre critique. Soit Δ la région de $D'_0 = D_0 \cap D'$ qui se compose des points z tels que l'on ait $\psi(z) \in W$, et posons $\overline{\Psi} = \zeta . \psi$. Alors, d'après la proposition de la section précédente, lorsqu'on prolonge $\overline{\Psi}$ analytiquement autant que possible aux points de e qui se trouvent sur la frontière de Δ, l'image de Δ par $\overline{\Psi}$ peut être regardée comme un revêtement fini étalé au-dessus de R_0 n'ayant pas d'autre frontière relative par rapport à R_0 que l'image de C' par $\overline{\Psi}$. D'autre part, d'après le théorème de Bers et Ahlfors [2], il y a une application analytique η qui fait correspondre biunivoquement au revêtement universel de M' un domaine borné W dans l'espace de deux variables complexes. Considérons ici l'application analytique donnée par $\tilde{\psi} = \eta\psi$ de D' dans W. D'après ce qu'on a dit ci-dessus, $\tilde{\psi}$ est évidemment uniforme puisque, par hypothèse, chaque composante connexe de $M' - W$ est simplement connexe. Ceci signifie que ψ peut se prolonger analytiquement en une section analytique de M' au-dessus de tout D'. Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS (L.). — Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.*, Uppsala, t. 65, 1935, p. 157-194.

[2] AHLFORS (L.). — *Lectures on quasiconformal mappings.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (*Van Nostrand mathematical Studies*, 10).

[3] NISHINO (T). — Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes, V : Fonctions qui se réduisent aux polynômes, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 15, 1975, p. 527-553.

[4] SANTALÓ (L. A.). — La desigualdad isoperimetrica sobre las superficies de curvatura constante negativa, *Rev. Tucumán*, t. 3, 1942, p. 243-259.

[5] SELBERG (H.). — Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität Null, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo*, t. 10, 1937, p. 1-10.

[6] TSUJI (M.). — *Potential theory in modern function theory.* — Tokyo, Maruzen and Co, 1959.