GEORGES HANSEL
JEAN-PIERRE TROALLIC

Suites uniformément distribuées et fonctions faiblement presque-périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 207-212
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__207_0>

Bull. Soc. math. France.
108, 1980, p. 207-212.

SUITES UNIFORMÉMENT DISTRIBUÉES ET FONCTIONS FAIBLEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES

PAR

G. HANSEL et J.-P. TROALLIC (*)

RÉSUMÉ. — Dans un groupe topologique localement compact séparable, il existe des suites uniformément distribuées relativement aux fonctions faiblement presque-périodiques. Ce résultat est obtenu par des méthodes géométriques qui ont d'autres applications.

ABSTRACT. — In a separable topological locally compact group, there exist uniformly distributed sequences relatively to the weakly almost-periodic functions. This result is obtained by geometric methods which have other applications.

1. Introduction

Soient G un groupe topologique localement compact séparable, $W(G)$ l'espace des fonctions faiblement presque-périodiques sur G. Veech [13] a soulevé la question de l'existence de suites uniformément distribuées relativement à $W(G)$. Dans le présent travail, nous démontrons l'existence de telles suites en utilisant des techniques de géométrie dans les espaces localement convexes. Rappelons que Veech [12] a établi, par d'autres méthodes, l'existence de suites uniformément distribuées relativement à l'espace des fonctions presque-périodiques (*cf.* également [1], [2], [5], [10], [11]).

L'un des outils de notre démonstration (théorème 1) constitue une généralisation d'un résultat antérieur de Niederreiter [9].

(*) Texte reçu le 16 mars 1979.

Georges HANSEL et Jean-Pierre TROALLIC, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et des Techniques, Université de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/207/$ 5.00

2. Combinaisons convexes et suites uniformément distribuées

NOTATIONS. — (*a*) Soient E un ensemble et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies de points de E. Soient $s \in \mathcal{S}$ et $k \in \mathbb{N}$; on note s^k la suite (finie) obtenue par concaténation de k suites égales à s. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{S}$; on note $\prod_{n\in\mathbb{N}} s_n$ la suite (infinie) obtenue par concaténation des suites s_n.

(*b*) Soient E et F des espaces vectoriels topologiques séparés. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F; on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
Soit A une partie de E; $\mathrm{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A, $\overline{\mathrm{co}}_s(A)$ l'ensemble des limites de suites de points de $\mathrm{co}(A)$ et $\overline{\mathrm{co}}(A)$ l'adhérence de $\mathrm{co}(A)$. On note $\hat{A}$ l'ensemble des limites de Césaro de suites de points de A. On a évidemment les inclusions $\hat{A} \subset \overline{\mathrm{co}}_s(A)$ et $\overline{\mathrm{co}}_s(A) \subset \overline{\mathrm{co}}(A)$. Il est également facile de voir que $\mathrm{co}(A) \subset \hat{A}$.

THÉORÈME 1. — *Soit E un espace vectoriel réel muni d'une topologie localement convexe séparée T moins fine qu'une topologie localement convexe métrisable. Soit A une partie de E. On a $\hat{A} = \overline{\mathrm{co}}_s(A)$.*

Démonstration. — Soit $x \in \overline{\mathrm{co}}_s(A)$; montrons que $x \in \hat{A}$. Soit $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes sur E définissant une topologie plus fine que T. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{co}(A)$ qui converge vers x pour T.

(*a*) Supposons que chaque c_n soit une combinaison convexe de points de A tous affectés d'une même masse

$$c_n = \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n \, (a_i^n \in A,\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{1, \ldots, m_n\}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $M_n = \sup_{i\in\{1,\ldots,m_n\}} \|a_i^n\|_n$. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n k_n \geqslant n m_{n+1} M_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $s_n = (a_1^n, \ldots, a_{m_n}^n)$. On pose

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} s_n^{k_n}.$$

Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers x pour T.

Soit $n \in \mathbb{N}$; il existe des entiers j_n, p_n et t_n uniquement déterminés tels que

$$n = \sum_{i=1}^{j_n} m_i k_i + m_{j_n+1} p_n + t_n,$$

$$0 \leqslant p_n < k_{j_n+1} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant t_n < m_{j_n+1}.$$

Par construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = u_n + v_n$$

avec

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{j_n} m_i k_i c_i + (m_{j_n+1}\, p_n + t_n)\, c_{j_n+1}\right)$$

et

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{t_n} a_i^{j_n+1} - t_n c_{j_n+1}\right).$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour T; la topologie T étant localement convexe, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers x pour T. Soit $p\in\mathbb{N}$ et soit $n\geqslant p$; on a

$$\|v_n\|_p \leqslant \frac{2}{n} m_{j_n+1}\, M_{j_n+1} \leqslant \frac{2\, m_{j_n} k_{j_n}}{n j_n} \leqslant \frac{2}{j_n}.$$

Par conséquent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $(\|\,.\,\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc pour tout T. On en déduit que $(1/n\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour T.

(*b*) Cas général.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit d_n une combinaison convexe de points de A tous affectés de la même masse telle que $\|d_n - c_n\|_n < 1/n$. La suite $(d_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $(\|\,.\,\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc pour T; par conséquent la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour T. Le raisonnement du (*a*) appliqué à la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de conclure.

COROLLAIRE 1. — *Soit A une partie d'un espace localement convexe métrisable. On a $\hat{A} = \overline{\mathrm{co}}(A)$.*

COROLLAIRE 2. — *Soient X et Y deux espaces normés, T la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{L}(X, Y)$ et A une partie de $\mathscr{L}(X, Y)$. Pour la topologie T, on a $\hat{A} = \overline{\mathrm{co}}_s(A)$.*

Démonstration. — La topologie de la convergence simple sur $\mathscr{L}(X, Y)$ est localement convexe séparée et moins fine que la topologie de la norme usuelle (norme de la convergence uniforme sur la boule unité fermée).

NOTATION. — Soit X un espace compact. $\mathscr{C}(X)$ est l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des applications continues de X dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}(X)^*$ le dual topologique de $\mathscr{C}(X)$.

DÉFINITION [6]. — Soient X un espace compact et μ une probabilité régulière sur la tribu borélienne de X. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X est μ-uniformément distribuée si pour tout $f\in\mathscr{C}(X)$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=\int_X f d\mu.$$

COROLLAIRE 3 (Niederreiter [9]). — *Soit μ une probabilité régulière sur un espace compact X. Il existe une suite de points de X μ-uniformément distribuée si et seulement si μ est limite faible d'une suite de combinaisons convexes de mesures de Dirac sur X.*

Démonstration. — Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X est μ-uniformément distribuée si et seulement si la suite des mesures de Dirac $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement en moyenne de Césaro vers μ dans $\mathscr{C}(X)^*$. Le corollaire 2 permet de conclure.

COROLLAIRE 4. — *Soit X un espace métrique compact, μ une probabilité sur la tribu borélienne de X. Il existe dans X des suites μ-uniformément distribuées.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des probabilités sur la tribu borélienne de X. $\mathscr{M}$ est une partie convexe compacte métrisable de $\mathscr{C}(X)^*$ muni de la topologie faible. Soit A l'ensemble des mesures de Dirac sur X. On a $\overline{\mathrm{co}}_s(A)=\overline{\mathrm{co}}(A)=\mathscr{M}$. Le corollaire 3 permet de conclure.

3. Suites uniformément distribuées dans les groupes topologiques localement compacts

NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS. — Soit G un groupe topologique localement compact. On note $\mathscr{C}(G)$ l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des applications continues et bornées de G dans $\mathbb{R}$. Soient $f\in\mathscr{C}(G)$ et $g\in G$; on note f_g l'élément de $\mathscr{C}(G)$ défini par $f_g(x)=f(gx)$. Un élément f de $\mathscr{C}(G)$ est faiblement presque-périodique si $\{f_g \mid g\in G\}$ est faiblement relativement compact dans $\mathscr{C}(G)$ [4]. L'ensemble $W(G)$ des éléments faiblement presque-périodiques est une sous-algèbre de Banach unitaire de $\mathscr{C}(G)$. Pour tout $g\in G$, on définit la translation $T_g : W(G)\to W(G)$ par $T_g(f)=f_g$. $\{T_g \mid g\in G\}$ est un groupe d'isométries linéaires de $W(G)$ sur lui-même. Soit $f\in W(G)$; on pose $K_f=\overline{\mathrm{co}}\{f_g \mid g\in G\}$. K_f est une partie convexe faiblement compacte de l'espace de Banach $W(G)$.

Il existe sur $W(G)$ une moyenne unique m invariante par translations. (Rappelons qu'une moyenne sur $W(G)$ est une forme linéaire m vérifiant

$m(1)=1$ et $m(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$.) Soit $\tilde{m}$ l'élément de $\mathscr{L}(W(G))$ qui à tout f associe la fonction constante $g \to m(f)$; pour tout $f \in W(G)$, $\tilde{m}(f)$ est l'unique fonction constante appartenant à K_f.

Rappelons enfin le théorème ergodique en moyenne :

THÉORÈME DE VON NEUMANN [3]. — *Soient E un espace de Banach et T un élément de $\mathscr{L}(E)$ de norme inférieure ou égale à 1. Soit $x \in E$. Si $\{ T^n(x) \mid n \in \mathbb{N} \}$ est faiblement relativement compact dans E, la suite $(1/n \sum_{k=1}^{n} T^k(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers un point fixe pour T.*

DÉFINITION. — Soit G un groupe topologique localement compact. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de G est uniformément distribuée relativement à $W(G)$ si pour tout $f \in W(G)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = m(f).$$

THÉORÈME 2. — *Soit G un groupe topologique localement compact séparable. Il existe dans G des suites uniformément distribuées relativement à $W(G)$.*

Démonstration. — Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de G dense dans G et soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n T_{g_n}$ converge vers un point T de norme inférieure ou égale à 1 dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(W(G))$. Pour tout $f \in W(G)$, il résulte du théorème de von Neumann que la suite $(1/n \sum_{k=1}^{n} T^k(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $\tilde{f}$ de $W(G)$, fixe pour T.

(*a*) Montrons que $\tilde{f} = \tilde{m}(f)$.

La fonction $\tilde{f}$ étant dans K_f il suffit de montrer qu'elle est constante. Supposons qu'elle ne le soit pas. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans G donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T_{g_p}(\tilde{f}) \neq \tilde{f}$ (ce qui implique $1 - \alpha_p > 0$).

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}, n \neq p} (\alpha_n/(1-\alpha_p))\, T_{g_n}(\tilde{f})$ converge dans $W(G)$ vers un point h distinct de $\tilde{f}$. Soit $\varepsilon = \inf(\| T_{g_p}(\tilde{f}) - \tilde{f} \|, \| h - \tilde{f} \|)$. $K_{\tilde{f}}$ étant une partie dentable de $W(G)$ ([7], [8]), il existe une partie convexe fermée G de $W(G)$ strictement contenue dans $K_{\tilde{f}}$ telle que diam $(K_{\tilde{f}} - C) < \varepsilon$.

Soit $g \in G$ tel que $T_g(\tilde{f}) \in K_{\tilde{f}} - C$. On a

$$\inf(\| T_{g g_p}(\tilde{f}) - T_g(\tilde{f}) \|, \quad \| T_g(h) - T_g(\tilde{f}) \|) = \varepsilon,$$

par conséquent $T_{g g_p}(\tilde{f})$ et $T_g(h)$ sont dans le convexe C, ce qui est absurde puisque

$$T_g(\tilde{f}) = \alpha_p T_{g g_p}(\tilde{f}) + (1-\alpha_p) T_g(h) \qquad \text{et} \qquad T_g(\tilde{f}) \notin C.$$

(*b*) D'après le premier point, la suite $(1/n\sum_{k=1}^{n} T^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{m}$ dans $\mathscr{L}(W(G))$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $c_n \in \mathrm{co}\{T_g \mid g\in G\}$ tel que $\| c_n-(1/n)\sum_{k=1}^{n} T^k \| < 1/n$ ($\| . \|$ étant la norme usuelle sur $\mathscr{L}(W(G))$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de co $\{T_g \mid g\in G\}$ converge simplement vers $\tilde{m}$ dans $\mathscr{L}(W(G))$. Il existe donc, d'après le théorème 1, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de G telle que $(1/n\sum_{k=1}^{n} T_{x_k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{m}$. Pour cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $f\in W(G)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)=m(f).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZINGER (L.). — Uniformly distributed sequences in locally compact groups I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 188, 1974, p. 149-165.

[2] BERG (I. D.), RAJAGOPALAN (M.) and RUBEL (L. A.). — Uniform Distribution in locally compact abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 133, 1968, p. 435-446.

[3] EBERLEIN (W. F.). — Abstract Ergodic Theorems and weakly almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 67, 1949, p. 217-240.

[4] GREENLEAF (F. P.). — *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, New York, van Nostrand, Reinhold Company, 1969, (van Nostrand Mathematical Studies, 16).

[5] HARTMAN (S.). — Remarks on equidistribution on non-compact groups, *Compositio Math.*, t. 16, 1964, p. 66-71.

[6] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). — *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York, 1974.

[7] MAYNARD (H. B.). — A geometrical characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 185, 1973, p. 493-500.

[8] NAMIOKA (I.) et ASPLUND (E.). — A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 73, 1967, p. 443-445.

[9] NIEDERREITER (H.). — On the existence of uniformly distributed sequences in compact spaces, *Compositio Math.*, t. 25, 1972, p. 93-99.

[10] RINDLER (H.). — Uniform distribution on locally compact groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 57, 1976, p. 130-132.

[11] RUBEL (L. A.). — Uniform distribution in locally compact groups, *Comment. Math. Helv.*, t. 39, 1965, p. 253-258.

[12] VEECH (W. A.). — Some questions of uniform distribution, *Ann. of Math.*, 94 (2), 1971, p. 125-138.

[13] VEECH (W. A.). — Topological dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977.