

BULLETIN DE LA S. M. F.

HEDI DABOUSSI

**Sur les fonctions multiplicatives ayant une
valeur moyenne non nulle**

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 183-205

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__183_0

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES AYANT UNE VALEUR MOYENNE NON NULLE

PAR

HÉDI DABOUSSI (*)

RÉSUMÉ. — Nous déterminons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction multiplicative f vérifiant $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^\lambda < \infty$ pour un $\lambda > 1$, ait une valeur moyenne non nulle. Nous généralisons ainsi des résultats antérieurs de H. DELANGE et de P.D.T.A. ELLIOTT.

ABSTRACT. — We give necessary and sufficient condition for a multiplicative function f , satisfying the condition $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^\lambda < \infty$ for some $\lambda > 1$ to have a non zero mean value. This generalizes earlier results of H. DELANGE and P.D.T.A. ELLIOTT.

1. Introduction

1.1. Une fonction $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1)=1$ et $f(m.n)=f(m).f(n)$ toutes les fois que $(m, n)=1$.

1.2. Une fonction $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la quantité $1/x \sum_{n \leq x} f(n)$ tend, quand $x \rightarrow +\infty$, vers une limite non nulle. On notera $M(f)$ cette limite.

1.3. Un théorème de DELANGE [4] affirme que si f est multiplicative, $|f(n)| \leq 1$, alors f a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la série $\sum_p (f(p)-1)/p$ converge et $1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(2^k)/2^k \neq 0$.

1.4. ELLIOTT [6] a montré que, si f est multiplicative, et satisfait aux conditions suivantes :

- (i) $\overline{\lim}_x 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^2 < +\infty$;
- (ii) f a une valeur moyenne non nulle;

(*) Texte reçu le 7 janvier 1980, révisé le 24 octobre 1980.

H. DABOUSSI, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

alors les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_p \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_p \left(\sum_{k \geq 2} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k} \right),$$

et, pour tout nombre premier p , $1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)/p^k \neq 0$.

Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, alors f et $|f|^2$ ont une valeur moyenne non nulle.

DELANGE et l'auteur [2] ont donné une nouvelle démonstration de ce résultat, et ont, indépendamment, montré que ces conditions impliquaient que f est limite périodique B^2 ([5], [1]).

1.5. Nous allons établir dans cet article le résultat suivant, qui généralise celui d'Elliott.

THÉORÈME 1. — Soit $\lambda > 1$, et soit f une fonction multiplicative vérifiant :

$$(1) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n)|^\lambda < +\infty;$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) \text{ existe et est non nulle.}$$

Alors :

(3) la série $\sum (f(p)-1)/p$ est convergente et on a :

$$\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < +\infty, \quad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty,$$

$$\sum_p \left(\sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \right) < +\infty;$$

(4) pour tout nombre premier p , la série $1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)/p^k$ est non nulle.

Réciproquement, si la condition (3) est vérifiée alors f est limite périodique B^λ , et en particulier $M(f)$ et $M(|f|^\lambda)$ existent. De plus, $M(f)$ est non nul si, et seulement si, la condition (4) est vérifiée.

Remarques. — Le nombre $3/2$ du théorème peut être remplacé par tout nombre supérieur à un.

Notre méthode est essentiellement différente de celle d'ELLIOTT.

Elle consiste à étudier la série de Dirichlet de la fonction multiplicative et, en ce sens, est plus proche de la méthode analytique de DELANGE [4].

Ce travail a été exposé au *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* en octobre 1976. Il constitue une part de la thèse de l'auteur (Orsay, 1979).

Nous avons démontré la réciproque du théorème 1 dans [1].

Nous allons en fait, démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — Soit $\lambda > 1$ et f une fonction multiplicative vérifiant :

$$(5) \quad \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty \quad \text{pour tout } s > 1;$$

$$(6) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty;$$

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow 1, s > 1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{f(n)}{n^s} \text{ existe et est non nulle.}$$

Alors les conditions (3) et (4) sont vérifiées.

Il est facile de voir que les hypothèses (1) et (2) du théorème 1 entraînent (5), (6) et (7).

2.

2.1. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Soit f une fonction multiplicative réelle ou complexe. Soit $\lambda > 1$. Supposons que :

$$(8) \quad \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty \quad \text{pour tout } s > 1,$$

$$(9) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty,$$

$$(10) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{f(n)}{n^s} \right| = B > 0.$$

Alors :

$$(11) \quad \sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

$$(12) \quad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty$$

et pour tout p premier, la série :

$$(13) \quad 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}$$

est convergente et est non nulle.

On montrera ensuite qu'en remplaçant l'hypothèse (10) par (7) on pourra ajouter aux conclusions que la série $\sum (f(p) - 1)/p$ est convergente et que :

$$\sum_p \left(\sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^k}{p^r} \right) < +\infty.$$

Nous établirons à la fin une généralisation du théorème 2.

2.2. NOTATIONS

La lettre p désigne un nombre premier;

$p | n$ signifie « p divise n »;

$p \nmid n$ signifie « p ne divise pas n »;

$p^j || n$ signifie « $p^j | n$ et $p^{j+1} \nmid n$ ».

2.3. LEMME 1. — Soient $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ et $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ des fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble S .

Supposons que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in S$,

$$|u_m(s)| \leq U_m, \quad |v_m(s) - u_m(s)| \leq V_m,$$

où U_m et V_m sont des nombres positifs vérifiant :

$$\sum_m U_m^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum V_m < \infty.$$

Alors le produit infini :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_m(s)) e^{-v_m(s)}$$

est absolument convergent pour $s \in S$. De plus il existe une constante C telle que pour tout ensemble E d'entiers et tout $s \in S$:

$$\left| \prod_{m \in E} (1 + u_m(s)) e^{-v_m(s)} \right| < C.$$

Preuve. — Soit $T > 0$ tel que $U_m \leq T$ et $V_m \leq T$. Posons :

$$w_m(s) = (1 + u_m(s)) e^{-v_m(s)} - 1.$$

Les fonctions $((1+u)e^{-u}-1)/u^2$ et $(e^u-1)/u$ (prises égales à $-1/2$ et 1 respectivement pour $u=0$) étant continues, il existe M tel que :

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leq M|u|^2 \qquad |e^u-1| \leq M|u| \text{ pour } |u| \leq T.$$

Il en résulte, en remarquant que :

$$|w_m(s)| \leq |((1+u_m(s))e^{-u_m(s)} - 1| e^{u_m(s)-v_m(s)}| + |e^{u_m(s)-v_m(s)} - 1|,$$

l'inégalité,

$$|w_m(s)| \leq M|u_m(s)|^2 e^{|u_m(s)-v_m(s)|} + M|u_m(s)-v_m(s)| \leq MW_m,$$

ou :

$$W_m = U_m^2 e^{2T} + V_m.$$

On a :

$$\sum_{m=1}^{\infty} |W_m| \leq M e^{2T} \sum_m U_m^2 + M \sum_m V_m < +\infty,$$

et donc le produit infini $\prod (1+w_m(s))$ est absolument et uniformément convergent pour $s \in S$.

2.4. LEMME 2. — Soit $\alpha > 1$ et $z \in \mathbb{C}$.

La quantité $|z|^\alpha - 1 + \alpha(1 - \operatorname{Re} z)$ est positive pour tout z complexe.

De plus il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 et c_4 ne dépendant que de α telles que :

$$(14) \text{ si } |z| \leq 3/2, c_1 |z-1|^2 \leq |z|^\alpha - 1 + \alpha(1 - \operatorname{Re} z) \leq c_2 |z-1|^2,$$

$$(15) \text{ si } |z| > 3/2, c_3 |z|^\alpha \leq |z|^\alpha - 1 + \alpha(1 - \operatorname{Re} z) \leq c_4 |z|^\alpha.$$

Preuve. — Posons $z = xe^{i\theta}$ avec $x \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque $x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos \theta \geq x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x$, il suffit de remarquer que la fonction définie pour $x \geq 0$ par $x \rightarrow x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x$ est minimale au point $x=1$, où elle vaut 0 pour obtenir que $x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos \theta \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

L'inégalité (15) est immédiate.

De même l'inégalité (14) pour $x \in [0, 1/2]$ puisque chacune des fonctions $x \rightarrow |xe^{i\theta} - 1|^2$ et $x \rightarrow x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos \theta$ est majorée et minorée par des constantes positives indépendantes de θ pour $x \in [0, 1/2]$.

Soit alors $x \in]1/2, 3/2[$. La formule de Taylor montre qu'il existe $h \in]0, 1[$ tel que :

$$x^\alpha = 1 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 [1+h(x-1)]^{\alpha-2}.$$

Ainsi :

$$x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos \theta = \alpha x (1 - \cos \theta) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 [1+h(x-1)]^{\alpha-2}.$$

Puisque $1+h(x-1) \in]1/2, 3/2[$ et que $(x-1)^2 + 2x(1-\cos \theta) = |xe^{i\theta} - 1|^2$, on a, en prenant,

$$c'_1 = \min \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\alpha-2} \right),$$

$$c'_2 = \max \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\alpha-2} \right),$$

$$c'_1 |xe^{i\theta} - 1|^2 \leq x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x \cos \theta \leq c'_2 |xe^{i\theta} - 1|^2.$$

2.5. Supposons que f satisfait aux hypothèses du théorème 3.

Soit $\mu = \lambda/(\lambda-1)$ et $\sigma_0 = 1 - 1/2\mu$.

Montrons, d'abord, que l'hypothèse (8) entraîne que :

$$(16) \quad \sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) < \infty \quad \text{pour } s > 1 \text{ et } \alpha \in [1, \lambda],$$

$$(17) \quad \sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r\sigma}} \right) < \infty \quad \text{si } \sigma > \sigma_0.$$

Si $\alpha = \lambda$ (16) découle de (8).

Si $\alpha < \lambda$, l'inégalité de Hölder entraîne que :

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) \leq \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) \right)^{\alpha/\lambda} \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \right) \right)^{(\lambda-\alpha)/\lambda},$$

et donc (16) se déduit de (8) et de la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} 1/p^{rs} \right)$, pour $s > 1$.

D'autre part, soit $g(n)$ la fonction multiplicative déterminée par :

$$g(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r=1, \\ 1 & \text{si } r \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi $\sum_p (\sum_{r=1}^{\infty} g(p^r)/p^{r\gamma}) < \infty$ pour $\gamma > 1/2$, et donc :

$$(18) \quad \sum \frac{g(n)}{n^\gamma} < \infty \quad \text{pour } \gamma > 1/2.$$

Soit $\sigma > \sigma_0$. On peut trouver deux nombres a et b tels que $a+b=\sigma$ et $a > 1/\lambda$, $b > 1/2\mu$. L'inégalité de Hölder montre que :

$$\sum \frac{|g(n)f(n)|}{n^\sigma} \leq \left(\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^{\lambda a}} \right)^{1/\lambda} \left(\sum \frac{g(n)}{n^{b\mu}} \right)^{1/\mu},$$

et donc $\sum |g(n)f(n)|/n^\sigma < \infty$ grâce à (8) et (18). Tenant compte de la définition de g , on obtient (17).

2.6. Pour tout p premier, la série $1 + \sum_{r=1}^{\infty} f(p^r)/p^r$ est convergente d'après (17).

Nous allons voir que les hypothèses entraînent qu'elle est non nulle.

Posons, pour $s > 1$,

$$F(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad F_p(s) = \sum_{p \mid n} \frac{f(n)}{n^s}.$$

L'inégalité de Hölder et l'hypothèse (9) donnent :

$$(19) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\alpha}{n^s} \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \right)^{\alpha/\lambda} = A^{\alpha/\lambda}$$

pour tout $\alpha \in [1, \lambda]$.

Par suite, puisque $|F_p(s)| \leq \sum |f(n)|/n^s$,

$$(20) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1, s > 1} \frac{1}{\zeta(s)} |F_p(s)| \leq A^{1/\lambda}.$$

Mais, pour $s > 1$,

$$F_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p^r \mid n} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$F_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \sum_{p^r \nmid n} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} (F(s) - F_p(s)).$$

Ainsi :

$$\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right) F_p(s) = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right) F(s)$$

et donc :

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right| \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} |F(s)| = \left|1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right| \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} |F_p(s)|.$$

Il résulte de (10) et (20) que :

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right| \cdot B \leq A^{1/\lambda} \left|1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right|.$$

B étant non nul, cela implique que $1 + \sum_{r=1}^{\infty} f(p^r)/p^r \neq 0$ et prouve donc (13).

2.7. Soit $\alpha \in [1, \lambda]$. On a :

$$(21) \quad \sum \frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2} < \infty.$$

En effet : si $\lambda \geq 2\alpha$, cela découle de (16).

Supposons $\alpha < \lambda < 2\alpha$ et soit $\sigma_1 \in]1, \lambda/(2\alpha - \lambda)[$.

De (16) on déduit l'existence d'une constante c_3 telle que $|f(p)|^\lambda \leq c_3 p^{\sigma_1}$.
Ainsi :

$$\sum_p |f(p)|^{2\alpha} p^{-2} \leq c_3^{(2\alpha - \lambda)/\lambda} \sum_p |f(p)|^\lambda p^{-2 + \sigma_1(2\alpha - \lambda)/\lambda}.$$

Il suffit alors de remarquer que $2 - \sigma_1((2\alpha - \lambda)/\lambda) > 1$ pour déduire (21) de (8).

2.8. Pour $s > 1$, posons :

$$\mathcal{H}(s) = \prod_p \left[\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \exp \frac{1 - f(p)}{p^s} \right],$$

$$u_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{rs}},$$

$$v_p(s) = \frac{f(p) - 1}{p^s}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s) &= \prod_p [(1 + u_p(s)) \exp -v_p(s)], \\ U_p &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r) - f(p^{r-1})|}{p^r}, \\ V_p &= 2 \left(\sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|}{p^r} \right) + \frac{|f(p)|}{p^2}. \end{aligned}$$

Les inégalités (16) et (17) montrent que : $\sum V_p < \infty$, ce qui entraîne que $\sum V_p^2 < \infty$.

Et, puisque $U_p \leq V_p + |f(p) - 1|/p$, on a :

$$\sum U_p^2 \leq 3 \sum V_p^2 + 3 \sum \frac{|f(p)|^2}{p^2} + 3 \sum \frac{1}{p^2} < +\infty \text{ d'après (2.1).}$$

En appliquant le lemme 1, on obtient que $\mathcal{H}(s)$ est absolument convergent pour $s \geq 1$ et qu'il existe une constante C telle que, pour tout ensemble F de nombres premiers distincts et tout $s \geq 1$ on a :

$$(22) \quad \prod_{p \in F} \left| 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right| \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \exp \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p^s} \leq C.$$

De plus $\mathcal{H}(1)$ est différent de zéro.

2.9. LEMME 3. — Soit E un ensemble fini de nombres premiers, k un entier et α et λ réels satisfaisant à : $1 < \alpha \leq \lambda$.

Supposons que la fonction f satisfait les hypothèses du théorème 3.

Alors, il existe une constante $D(\alpha)$ ne dépendant pas de E et de k telle que :

$$(I) \quad \prod_{p \in E} \left[1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right] \left[1 - \frac{1}{p} \right] \exp \alpha \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \leq D(\alpha).$$

Preuve. — Soit $h_E(n)$ la fonction multiplicative définie par :

$$h_E(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin E, \\ 0 & \text{si } p \in E, \end{cases} \quad r \geq 1.$$

On voit immédiatement que pour $s > 1$,

$$\sum \frac{f(n) h_E(n)}{n^s} = \prod_{p \notin E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right).$$

On en déduit que :

$$F(s) = \left(\sum \frac{f(n) h_E(n)}{n^s} \right) \prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right),$$

Comme, grâce à (13), quand $s \rightarrow 1$, le produit :

$$\prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right)$$

tend, vers le produit :

$$\prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right),$$

qui est non nul, on a :

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} |F(s)| = \prod_{p \in E} \left| \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right) \right| \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{f(n) h_E(n)}{n^s} \right|.$$

Ainsi :

$$(23) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{f(n) h_E(n)}{n^s} \right| = B \left[\prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right) \right]^{-1}.$$

Si $\alpha \in [1, \lambda]$ et si $s > 1$, on a également :

$$\sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s} = \prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right)$$

et donc :

$$\left[\sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s} \right] \prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) = \sum \frac{|f(n)|^\alpha}{n^s}.$$

Par suite, pour tout entier k ,

$$\left[\sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s} \right] \prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) \leq \sum \frac{|f(n)|^\alpha}{n^s}.$$

Il résulte de (19) que :

$$(24) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s} \leq A^{\alpha/\lambda} \left[\prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right) \right]^{-1}.$$

Soit $\alpha \in]1, \lambda]$ pour $s > 1$, on a par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} [\zeta(s)]^{-1} \left| \sum \frac{f(n) h_E(n)}{n^s} \right| \\ \leq \left(\zeta(s)^{-1} \sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s} \right)^{1/\alpha} \left(\zeta(s)^{-1} \sum \frac{h_E(n)}{n^s} \right)^{1-1/\alpha} \end{aligned}$$

Il résulte alors de (23) et (24) que :

$$\begin{aligned} B \left(\prod_{p \in E} \left| 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right| \right)^{-1} \\ \leq A^{1/\lambda} \left(\prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right)^{1/\alpha} \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{1-(1/\alpha)} \right) \end{aligned}$$

puisque $1/\zeta(s) \sum h_E(n)/n^s$ tend vers $\prod_{p \in E} (1 - (1/p))$.

Ceci peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \prod_{p \in E} \left(1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ \leq A^{\alpha/\lambda} B^{-\alpha} \left[\prod_{p \in E} \left| 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right| \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]^\alpha \end{aligned}$$

Multipliant par :

$$\prod_{p \in E} \exp \left(\alpha \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \right),$$

il vient :

$$\begin{aligned} \prod_{p \in E} \left[\left(1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \exp \left(\alpha \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \right) \right] \\ \leq A^{\alpha/\lambda} B^{-\alpha} \left[\prod_{p \in E} \left| 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right| \left(1 - \frac{1}{p} \right) \exp \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \right]^\alpha \end{aligned}$$

Il résulte alors de (22) que :

$$\prod_{p \in E} \left[1 + \sum_{r=1}^k \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r} \right] \left(1 - \frac{1}{p} \right) \exp \left(\alpha \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \right) \leq D(\alpha),$$

où $D(\alpha) = A^{\alpha/\lambda} B^{-\alpha} C^\alpha$.

2.10. Prenons $k=1$ dans l'inégalité (I) du lemme 3.

Puisque $\log(1+u) \geq u - u^2$ si $u \geq -1/2$, on déduit :

$$\sum_{p \in E} \frac{|f(p)|^\alpha - 1 + \alpha - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} - \sum_{p \in E} \frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2} - \sum_{p \in E} \frac{1}{p^2} \leq \log D(\alpha),$$

pour tout $\alpha \in]1, \lambda]$.

Comme, d'après (21), $\sum |f(p)|^{2\alpha}/p^2 < \infty$ on voit que :

$$\sum_{p \in E} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} \leq D_1(\alpha),$$

où :

$$D_1(\alpha) = \log D(\alpha) + \sum \frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2} + \sum \frac{1}{p^2}.$$

On remarquera que $D_1(\alpha)$ est une constante indépendante de E .

Pour $x > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la quantité $x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x \cos \theta$ étant positive d'après le lemme 2, il en résulte que :

$$\sum \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty.$$

En particulier :

$$\sum_{|f(p)| < 3/2} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty$$

et :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty.$$

Ceci entraîne d'après (14) et (15) que :

$$\sum_{|f(p)| < 3/2} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

et :

$$(25) \quad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\alpha}{p} < \infty \quad \text{pour tout } 1 < \alpha < \lambda.$$

Il nous reste à montrer que :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty.$$

Reprenons l'inégalité (I) du lemme 3 avec $k=1$, $E = \{p \leq y \text{ tel que } |f(p)| > 3/2\}$ et $\alpha = \lambda$, ce qui donne :

$$\prod_{p \in E} \left(1 + \frac{|f(p)|^\lambda}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp\left(\lambda \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p}\right) \leq D(\lambda).$$

Or d'après (25), les séries :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|}{p}$$

sont convergentes, et donc le produit :

$$\prod_{|f(p)| > 3/2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp\left(\lambda \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p}\right)$$

est convergent. Il est non nul ayant tous ses facteurs non nuls et il en résulte que :

$$\prod_{p \in E} \left(1 + \frac{|f(p)|^\lambda}{p}\right) \leq D'(\lambda),$$

où :

$$D'(\lambda) = D(\lambda) \left[\prod_{|f(p)| > 3/2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \exp \lambda \left(\frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p}\right) \right]^{-1}.$$

Cela montre que :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty$$

et achève la démonstration du théorème 3.

3. Démonstration du théorème 2

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 2. *A fortiori* f vérifie les hypothèses du théorème 3. Il nous suffit donc de prouver que la série $\sum (f(p) - 1)/p$ converge et que :

$$\sum_p \left(\sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \right) < \infty.$$

3.1. CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\sum (f(p) - 1)/p$

Nous utilisons pour cela la méthode classique de DELANGE [4].

Il est immédiat que, pour $s > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{r \geq 1} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{rs}} \right),$$

le produit étant absolument convergent pour $s > 1$. Ainsi :

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)}{n^s} = \mathcal{H}(s) \exp \sum \frac{f(p) - 1}{p^s}.$$

D'après l'hypothèse (7) on a :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{H}(s) \exp \sum \frac{f(p) - 1}{p^s} = M(f) \quad \text{où } M(f) \neq 0.$$

D'après le lemme 4, $\mathcal{H}(s)$ tend vers $\mathcal{H}(1) \neq 0$, quand $s \rightarrow 1$, et donc :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \exp \sum \frac{f(p) - 1}{p^s} = \frac{M(f)}{\mathcal{H}(1)}.$$

Il en résulte que $\sum (f(p) - 1)/p^s$ tend vers une limite finie quand s tend vers 1.

Posons :

$$\alpha(u) = \sum_{p \leq e^u} \frac{f(p) - 1}{p}$$

et montrons que :

$$\alpha\left(\frac{1}{s-1}\right) - \sum \frac{f(p) - 1}{p^s}$$

tend vers zéro quand s tend vers 1. Posons $\sigma = s - 1$.

Pour $\sigma > 0$, on a :

$$\sum \frac{f(p) - 1}{p^s} = \int_0^\infty e^{-t} \alpha(t/\sigma) dt.$$

Ainsi :

$$\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sum \frac{f(p) - 1}{p^s} = \int_0^\infty e^{-t} \left(\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right) \right) dt.$$

Il nous suffit alors de démontrer que, pour tout t , $e^{-t} [\alpha(1/\sigma) - \alpha(t/\sigma)]$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro et que son module est majoré par une fonction de t intégrable sur $(0, \infty)$.

Soient y et z réels satisfaisant à $0 < y < z$. On a :

$$|\alpha(y) - \alpha(z)| = \left| \sum_{e^y < p < e^z} \frac{f(p) - 1}{p} \right|.$$

Notons :

$$E_1 = E_1(y, z) = \{ p \text{ tel que } e^y < p \leq e^z \text{ et } |f(p)| \leq 3/2 \}$$

et

$$E_2 = E_2(y, z) = \{ p \text{ tel que } e^y < p \leq e^z \text{ et } |f(p)| > 3/2 \}.$$

On a :

$$|\alpha(y) - \alpha(z)| \leq \sum_{p \in E_1} \frac{|f(p) - 1|}{p} + \sum_{p \in E_2} \frac{|f(p) - 1|}{p}.$$

Or :

$$\sum_{p \in E_1} \frac{|f(p) - 1|}{p} \leq \left(\left(\sum_{p \in E_1} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \right) \left(\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p} \right) \right)^{1/2},$$

$$\sum_{p \in E_2} \frac{|f(p) - 1|}{p} \leq 2 \left(\sum_{p \in E_2} \frac{|f(p)|^2}{p} \right)^{1/2} \left(\sum_{p \in E_2} \frac{1}{p} \right)^{1 - (1/\lambda)}.$$

Remarquant alors que :

$$\sum_{e^y < p < e^z} \frac{1}{p} \leq \left(\log \frac{z}{y} + d \right),$$

où d est une constante absolue, on en déduit que :

$$|\alpha(y) - \alpha(z)| \leq \left(\sum_{p \in E_1} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} \right)^{1/2} \left(\log \frac{z}{y} + d \right)^{1/2} + 2 \left(\sum_{p \in E_2} \frac{|f(p)|^2}{p} \right)^{1/2} \left(\log \frac{z}{y} + d \right)^{1 - (1/\lambda)}.$$

Ainsi grâce à (11) et (12) on voit que $|\alpha(1/\sigma) - \alpha(t/\sigma)|$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro en tout point t , et que :

$$\left| \alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right) \right| \leq c_6 (\log |t| + d)^{1/2} + c_7 (\log |t| + c_6)^{1 - (1/\lambda)},$$

où :

$$c_6 = \left(\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} \right)^{1/2}$$

et

$$c_7 = \left(\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} \right)^{1/\lambda}.$$

Les fonctions $e^{-t}(\log|t+d|)^{1/2}$ et $e^{-t}(\log|t+d|)^{1-(1/\lambda)}$ étant intégrables sur $[0, +\infty[$, nous obtenons le résultat.

3.2. CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\sum_p \sum_{r \geq 2} |f(p^r)|^\lambda / p^r$.

Notons $f^*(p) = \inf(|f(p)|, 3/2)$.

Il est facile de voir que la convergence des séries :

$$\sum \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p}$$

entraîne la convergence des séries :

$$\sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f^*(p) - 1}{p}.$$

En effet,

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f^*(p) - 1|}{p} = \frac{1}{2} \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{1}{p} < +\infty,$$

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p) - 1|}{p} \leq 2 \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty.$$

Remarquons alors que :

$$||f(p)| - 1|^2 \leq |f(p) - 1|^2$$

et que :

$$||f(p)| - 1|^2 = |f(p)|^2 - 1 + 2(1 - |f(p)|),$$

$$|f(p) - 1|^2 = |f(p)|^2 - 1 + 2\operatorname{Re}(1 - f(p)),$$

on obtient que :

$$\sum \frac{1 - |f(p)|}{p}$$

converge et aussi :

$$\sum_{|f(p)| < 3/2} \frac{1 - |f(p)|}{p} = \sum_{|f(p)| < 3/2} \frac{1 - f^*(p)}{p}.$$

L'inégalité :

$$c_1 |f(p) - 1|^2 \leq |f(p)|^\lambda - 1 + \lambda(1 - \operatorname{Re} f(p)) \leq c_2 |f(p) - 1|^2$$

si $|f(p)| < 3/2$, entraîne alors la convergence de $\sum_{|f(p)| < 3/2} (f^*(p)^\lambda - 1)/p$ et finalement de $\sum (f^*(p)^\lambda - 1)/p$ puisque :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f^*(p)^\lambda - 1|}{p} \leq \left[\left(\frac{3}{2} \right)^\lambda - 1 \right] \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{1}{p} < \infty.$$

Mais, pour tout p et tout $s > 1$ on a :

$$1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} \leq \frac{1}{\mu} \quad \text{où} \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^\lambda \right)^{-1}.$$

Alors, étant donné k entier ≥ 2 , on a pour tout p et tout $s > 1$,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} &\geq 1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} + \sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \\ &\geq \left(1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} \right) \left(1 + \mu \sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right). \end{aligned}$$

Comme, pour $x \geq -1/2$, $\log(1+x) \geq x - x^2$ on en déduit :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) \\ \geq \left(1 + \mu \sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) \exp \left(\frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^s} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour $s > 1$, et y quelconque ≥ 2 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_1^\infty \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} &\geq \left(\prod_{p \leq y} \left(1 + \mu \sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^2} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{p < y} \sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \leq \frac{1}{\zeta(s)} \left(\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \right) \\ \times \frac{1}{\mu} \exp \left(\sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} - 1}{p^2} - \sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} \right).$$

Prenant les limites supérieures quand s tend vers 1 on obtient :

$$\sum_{p < y} \left(\sum_{r=2}^k \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \right) \leq \frac{A}{\mu} \exp \left[\sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^2} - \sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p} \right].$$

Faisons alors tendre k et y vers l'infini on a :

$$\sum_p \left(\sum_{r=2}^\infty \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \right) < \infty.$$

4. Nous pouvons généraliser le théorème 2 ainsi :

THÉORÈME 4. — Soit $\lambda > 1$ et f une fonction multiplicative vérifiant :

$$(26) \quad \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < +\infty \text{ pour tout } s > 1,$$

$$(27) \quad \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty,$$

il existe deux entiers l, k tels que :

$$(28) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=l(k)} \frac{f(n)}{n^s}$$

existe et est non nulle.

(29) Alors : il existe un caractère de Dirichlet χ_1 tel que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :

$$\sum \frac{\chi_1(p)f(p) - 1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| < 3/2} \frac{|\chi_1(p)f(p) - 1|^2}{p}, \\ \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p}, \quad \sum_p \left(\sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \right).$$

(30) De plus, pour tout p premier ne divisant pas (l, k) :

$$1 + \sum_{k>1} \frac{\chi_1(p)^k f(p^k)}{p^k} \text{ est non nulle.}$$

Réciproquement si les sommes ou séries ci-dessus sont finies ou convergentes alors f est limite périodique B^λ .

Notons $l = l' d, k = k' d$ avec $(k', l') = 1$.

Soient a et b les fonctions complètement multiplicatives définies par :

$$a(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \mid d, \\ 0 & \text{si } p \nmid d, \end{cases} \quad b(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid d, \\ 0 & \text{si } p \mid d. \end{cases}$$

On voit facilement que $n \equiv l(k)$ équivaut à : $n = n_1 d n_2$ avec $a(n_1 d) = b(n_2) = 1, (n_1 d, n_2) = 1$ et $n_1 n_2 \equiv l'(k')$.

Dès lors :

$$\sum_{n \equiv l(k)} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n_1} \frac{f(n_1 d)}{n_1^s d^s} a(n_1 d) \left(\sum_{n_2, n_2 \equiv l'(k')} \frac{f(n_2) b(n_2)}{n_2^s} \right),$$

$$(31) \quad \sum_{n \equiv l(k)} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\varphi(k')} \sum_{\chi \bmod k'} \overline{\chi(l')} \\ \times \sum_{n_1} \frac{f(n_1 d) a(n_1 d) \chi(n_1)}{n_1^s d_1^s} \left(\sum_{n_2} \frac{f(n_2) b(n_2) \chi(n_2)}{n_2^s} \right).$$

Comme en 2.3, on voit que :

$$\sum_{p>1} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty \text{ pour tout } p \text{ premier.}$$

Ainsi :

$$\sum_{p, r} \frac{|f(p^r)| a(p^r)}{p^r} = \sum_{p \mid d} \sum_{r>1} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty.$$

Il en résulte que :

$$\sum \frac{|f(n)| a(n)}{n} < \infty$$

et donc :

$$(32) \quad \sum_{d \mid n} \frac{|f(n) a(n)|}{n} < + \infty.$$

Nous allons montrer qu'il existe un caractère χ_1 modulo k' , et un seul tel que :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n) \chi_1(n) b(n)}{n^s} \text{ existe et est non nulle.}$$

Ceci entraînera que la fonction $b \chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2, et donc, puisque $b(p) |\chi_1(p)| = 1$ sauf pour un nombre fini de nombres premiers, que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :

$$\sum \frac{\chi_1(p) f(p) - 1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|\chi_1(p) f(p) - 1|^2}{p},$$

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^2}{p}, \quad \sum_{\chi_1(p) | b(p) = 1} \sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r}.$$

De plus :

$$1 + \sum_{k \geq 1} \frac{f(p^k) \chi_1(p^k)}{p^k}$$

est non nulle pour tout $p|d$. On montrera alors que :

$$\sum_{\chi_1(p) | b(p) = 0} \sum_{r \geq 2} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r} < \infty.$$

Considérons les quantités :

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{\chi(n) f(n) b(n)}{n^s} \right|.$$

Si elles sont nulles pour tout caractère χ modulo k' , on déduirait de (31) et de (32) que :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1(k)} \frac{f(n)}{n^s} = 0.$$

Il y a donc au moins un caractère χ_1 modulo k' , pour lequel la quantité plus haut est non nulle. Supposons que ce soit encore vrai, pour un autre caractère χ_2 modulo k' . On aurait, en appliquant le théorème 3 aux fonctions $b \chi_1 f$ et $b \chi_2 f$,

$$\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|\chi_1(p) f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^2}{p} < + \infty,$$

$$\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|\chi_2(p) f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

puisque, sauf pour un nombre fini de p , $|\chi_1(p)|b(p)=|\chi_2(p)|b(p)=1$.

Ces inégalités impliquent à leur tour que :

$$\sum_{1/2 < |f(p)| < 3/2} \frac{|\chi_1(p) - \chi_2(p)|^2}{p} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)| < 1/2} \frac{1}{p} < +\infty.$$

Comme, d'autre part,

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^k}{p} < \infty$$

entraîne que :

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{1}{p} < \infty,$$

on voit que :

$$\sum \frac{|\chi_1(p) - \chi_2(p)|^2}{p} < +\infty.$$

Mais, si $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe m premier avec k' tel que $\chi_1(m) \neq \chi_2(m)$. Si $p \equiv m(k')$,

$$|\chi_1(p) - \chi_2(p)|^2 = |\chi_1(m) - \chi_2(m)|^2 > 0$$

et comme :

$$\sum_{p \equiv m(k')} \frac{1}{p} = +\infty,$$

on a :

$$\sum \frac{|\chi_1(p) - \chi_2(p)|^2}{p} = +\infty,$$

ce qui est contradictoire.

Ainsi pour tout χ modulo k' $\chi \neq \chi_1$,

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{\chi(n) f(n) b(n)}{n^s} = 0.$$

L'hypothèse (28) et (31), (32), entraînent alors que :

$$(33) \quad \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{\chi_1(n) f(n) b(n)}{n^s}$$

existe et est non nulle et par conséquent la fonction $b\chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2.

Montrons maintenant que :

$$\sum_{\chi_1(p)b(p)=0} \sum_{r>1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < \infty.$$

Pour $s > 1$:

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)\chi_1(n)b(n)}{n^s} \right| \leq \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s} \right)^{1/\lambda}.$$

Ainsi, (33) entraîne que :

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s} > 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s} \right) \\ & \quad \times \prod_{\chi_1(p)b(p)=0} \left(1 + \sum_{r>1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \prod_{\chi_1(p)b(p)=0} \left[1 + \sum_{r>1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right] \\ & \leq \left[\overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \right] \left[\overline{\lim}_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

quantité finie d'après (27).

On en déduit le résultat désiré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DABOUSSI (H.). — Caractérisation des fonctions multiplicatives pp B^λ à spectre non vide, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXX, fasc. 3, 1980, p. 141-166.
 [2] DABOUSSI (H.) et DELANGE (H.). — On a theorem of P. D. T. A. Elliot on multiplicative functions, *J. London Math. Soc.*, (2), vol. 14, 1976, p. 345-356.

- [3] DABOUSSI (H.) et DELANGE (H.). — Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, série A, p. 657-660.
 - [4] DELANGE (H.). — Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 78, 1961, p. 273-304.
 - [5] DELANGE (H.). — Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, 281, 1975, p. 997-1000.
 - [6] ELLIOT (P. D. T. A.). — A mean value theorem for multiplicative functions, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 31, 1975, p. 418-438.
-