BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LÉAUTÉ

# Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 8 (1880), p. 106-109

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__106_1>

*Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme* $\sqrt{x^2 - y^2}$; par M. Léauté.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La méthode géométrique indiquée par le général Poncelet pour remplacer, avec une approximation connue, le radical $\sqrt{x^2 + y^2}$ par une fonction linéaire $\alpha x + \beta y$, s'applique, comme il l'a démontré lui-même ([1]), au calcul approché du radical $\sqrt{x^2 - y^2}$; les formules auxquelles on arrive dans ces deux cas, tant pour la valeur des coefficients que pour celle de l'erreur commise, n'ont aucune analogie apparente, bien que, *a priori*, une relation étroite doive cependant exister entre elles. Le calcul montre, en effet, que les résultats auxquels on est conduit dans chaque cas ne diffèrent que par le changement des fonctions circulaires en fonctions hyperboliques. Il m'a paru intéressant d'établir ce point, qui permet de réduire de moitié les formules à employer, et de remplacer toute la théorie, que l'on est obligé de faire à nouveau pour le calcul approché du second radical, par une simple remarque après le calcul du premier.

La présente Note a donc pour but d'établir que les valeurs des coefficients $\alpha$ et $\beta$, ainsi que celle de l'erreur commise, restent identiquement les mêmes lorsqu'on passe du radical $\sqrt{x^2 + y^2}$ au radical $\sqrt{x^2 - y^2}$, à la seule condition de changer alors les lignes trigonométriques en lignes hyperboliques, ou, si l'on veut, à la seule condition de remplacer dans le calcul la Table de logarithmes ordinaires par une Table de fonctions hyperboliques.

Posons

$$\sqrt{x^2 - y^2} = c,$$

et prenons le cas le plus général où $\frac{y}{x}$ varie entre les deux limites $K'$ et $K''$.

Traçons l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = c^2,$$

dont l'équation peut s'écrire

$$x = c \operatorname{cos hyp} u,$$
$$y = c \operatorname{sin hyp} u,$$

et marquons sur elle les deux points A et B, dont les arguments $u'$

---

([1]) *Voir* la théorie de Poncelet, *Cours de Mécanique appliquée aux machines*, publié par M. Kretz, p. 409, Note I, *Sur la valeur linéaire et rationnelle des radicaux de la forme* $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, ....

et $u''$ sont définis par les relations

$$\text{tang hyp}\, u' = K',$$
$$\text{tang hyp}\, u'' = K''.$$

Le problème revient, comme l'on sait, à former l'équation de la droite A″B″ située à égale distance de la corde AB et de la tangente parallèle la plus voisine A′B′. Quant à la limite de l'erreur, elle a pour expression

$$\varepsilon = \frac{OI - OI'}{OI + OI'},$$

I et I′ étant les points d'intersection de l'axe $Ox$ avec les droites AB et A′B′.

Cela rappelé, l'équation de la droite AB est

$$\begin{vmatrix} x & c \cosh\text{yp}\, u' & c \cosh\text{yp}\, u'' \\ y & c \sinh\text{yp}\, u' & c \sinh\text{yp}\, u'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$x \cosh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - y \sinh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - c \cosh\text{yp} \frac{u'-u''}{2} = 0.$$

L'équation de la tangente A′B′ est

$$x \cosh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - y \sinh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - c = 0,$$

et, par suite, on a, pour équation de la droite A″B″,

$$x \cosh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - y \sinh\text{yp} \frac{u'+u''}{2} - c\, \frac{\cosh\text{yp} \frac{u'-u''}{2} + 1}{2} = 0.$$

On déduit de là

$$c = \frac{\cosh\text{yp} \frac{u'+u''}{2}}{\left(\cosh\text{yp} \frac{u'-u''}{4}\right)^2} x - \frac{\sinh\text{yp} \frac{u'+u''}{2}}{\left(\cosh\text{yp} \frac{u'-u''}{4}\right)^2} y.$$

Ainsi, l'expression linéaire à substituer au radical $\sqrt{x^2 - y^2}$ étant prise sous la forme $\alpha x - \beta y$, on a

$$\alpha = \frac{\cosh\text{yp}\,\frac{u'+u''}{2}}{\left(\cosh\text{yp}\,\frac{u'-u''}{4}\right)^2},$$

$$\beta = \frac{\sinh\text{yp}\,\frac{u'+u''}{2}}{\left(\cosh\text{yp}\,\frac{u'-u''}{4}\right)^2}.$$

Quant à l'erreur commise, elle a pour limite

$$\varepsilon = \frac{\cosh\text{yp}\,\frac{u'-u''}{2} - 1}{\cosh\text{yp}\,\frac{u'-u''}{2} + 1} = \left(\text{tanghyp}\,\frac{u'-u''}{4}\right)^2.$$

Ces trois formules sont *identiques* à celles trouvées par Poncelet dans le cas de $\sqrt{x^2 + y^2}$, sauf le changement des lignes trigonométriques en fonctions hyperboliques; le calcul s'effectuera donc de la même manière, sous la seule réserve de remplacer les Tables de logarithmes ordinaires par les Tables de Hoüel.