

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUELINE DETRAZ

Classes de Bergman de fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 259-268

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__259_0

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSES DE BERGMAN DE FONCTIONS HARMONIQUES

PAR

JACQUELINE DETRAZ (*)

RÉSUMÉ. — Soit Ω un ouvert C^1 de \mathbb{R}^n et $p > 0$. Nous montrons que si une fonction harmonique u dans Ω a une dérivée dans une direction transverse à $\partial\Omega$ qui appartient à $L^p(\Omega)$, le gradient de u est aussi dans $L^p(\Omega)$.

ABSTRACT. — Let Ω be an open C^1 set of \mathbb{R}^n and p positive. We show that if an harmonic function u in Ω has a derivative in some transverse direction to $\partial\Omega$ which belong to $L^p(\Omega)$, the gradient of u is also in $L^p(\Omega)$.

1. Le théorème de Riesz affirme que si une fonction u harmonique dans le disque unité vérifie :

$$\sup_r \int \left| \frac{\partial u}{\partial r}(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < \infty \quad \text{pour } p > 1$$

alors on a aussi :

$$\sup_r \int \left| \frac{\partial u}{\partial \theta}(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < \infty.$$

Des extensions de ce théorème ont fait l'objet de nombreux travaux dont l'étude des espaces H^p du demi-plan \mathbb{R}_+^n et des transformées de Riesz [3].

Plus généralement, si on considère un domaine Ω borné de \mathbb{R}^n , dont la frontière est C^1 et une fonction u harmonique sur Ω telle que sa dérivée dans la direction normale à $\partial\Omega$ a une limite dans $L^p(\partial\Omega)$ pour $p > 1$, on démontre que le gradient ∇u de u a la même propriété ([8], [2]).

Ici, nous étudierons si l'appartenance à $L^p(\Omega)$ de la dérivée dans une certaine direction d'une fonction harmonique u entraîne que le gradient de u est aussi dans $L^p(\Omega)$, pour $p > 0$.

(*) Texte reçu le 18 juin 1980, révisé le 29 septembre 1980.

Jacqueline DETRAZ, Université de Provence, U.E.R. de Mathématiques, 3, place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

Ce problème a été abordé par HARDY-LITTLEWOOD [6] et par DUREN [1] dans le cas des fonctions conjuguées sur le disque unité et par FORELLI-RUDIN [4]. Les résultats que nous obtenons sont valables pour tout $p > 0$ et ne font pas appel à la théorie des intégrales singulières contrairement au théorème de Riesz et à ses extensions qui concernent des propriétés d'intégrabilité sur $\partial\Omega$. On note $\delta(x)$ la distance d'un point x de Ω à $\partial\Omega$, et pour $p > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ on définit :

$$L_a^p(\Omega) = \left\{ f, \text{ mesurable sur } \Omega, \int_{\Omega} |f(x)|^p \delta^a(x) dx < \infty \right\}.$$

On notera :

$$\|f\|_{L_a^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \delta^a(x) dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p \geq 1$$

et :

$$\|f\|_{L_a^p} = \int_{\Omega} |f(x)|^p \delta^a(x) dx \quad \text{si } p < 1.$$

Nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — Soit Ω un domaine borné à frontière C^1 de \mathbb{R}^n . Soit L un champ de vecteurs unitaires sur $\bar{\Omega}$, continu sur un voisinage de $\partial\Omega$, transverse à $\partial\Omega$ en tout point de $\partial\Omega$. Soit $p > 0$. Soit U une fonction harmonique sur Ω telle que la dérivée $\partial U / \partial L = \nabla U \cdot L$ est dans $L_a^p(\Omega)$ alors :

1° U appartient à $L_{a-p}^p(\Omega)$ si $a - p > -1$;

2° le gradient ∇U de U appartient à $L_a^p(\Omega)$ si $a > -1$.

Dans la suite, C désignera indistinctement toute constante ne dépendant que de n et p ; A désignera toute constante ne dépendant que de n et p et de la géométrie C^1 des domaines considérés.

2. Résultats préliminaires

(A) Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Elle vérifie alors les propriétés de sous-moyenne suivantes [3] :

$$(\star) \quad |u(x)|^p \leq \frac{C}{R^n} \int_{B_R} |u(y)|^p dy,$$

$$(\star\star) \quad |\nabla u(x)|^p \leq \frac{C}{R^{n+p}} \int_{B_R} |u(y)|^p dy$$

pour toute boule B_R de rayon R , de centre x , incluse dans Ω . On en déduit le lemme suivant :

LEMME 1. — Soit u une fonction harmonique dans Ω ; alors :

$$\|\nabla u\|_{L^{a+2}}^p \leq C \|u\|_{L^a}^p \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

En effet, en utilisant l'inégalité (★★) et le fait que si $y \in B_{\delta(x)/2}$ alors :

$$\frac{\delta(x)}{2} \leq \delta(y) \leq \frac{3}{2} \delta(x),$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \delta^a(x) dx &\leq C \int_{\Omega} \delta^{a-n}(x) \int_{B_{\delta(x)/2}} |u(y)|^p dy dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |u(y)|^p \delta^{a-n}(y) \int_{B'} dx dy \leq C \int |u(y)|^p \delta^a(y) dy. \end{aligned}$$

(B) Soit ρ une fonction C^1 positive, définie sur la boule unité fermée de \mathbb{R}^{n-1} , nulle sur la sphère unité. On définit une « lunule » S dans \mathbb{R}^n par :

$$S = \{ (x, y); -\rho(x) < y < \rho(x); x \in \mathbb{R}^{n-1}, \|x\| < 1 \}.$$

PROPOSITION 1. — Soit u une fonction harmonique sur S ; soit $p > 0$ alors :

$$\|u(x, y) - u(x, 0)\|_{L^2} \leq A \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^{2p}}, \text{ si } a > -1.$$

Démonstration. — 1° Remarques :

(a) si $\delta(x, y)$ représente la distance d'un point (x, y) de S à ∂S , on a :

$$\rho(x) - y \leq A \delta(x, y) \quad \text{si } y > -\frac{\rho(x)}{2}.$$

En effet, soit $(x', y' = \rho(x'))$ un point de ∂S on a :

$$\rho(x) - y \leq A |x - x'| + |\rho(x') - y| \leq A |(x, y) - (x', \rho(x'))|,$$

d'où le résultat si $y > 0$.

Si :

$$y > -\frac{\rho(x)}{2}, \quad \rho(x) - y \leq C(\rho(x) + y) \leq A \delta(x, -y) = A \delta(x, y);$$

(b) si $p \geq 1$, la proposition 1 est une simple conséquence de l'inégalité suivante ([7], p. 245-246) :

$$\int_0^\infty s^a \left[\int_s^A |f(t)| dt \right]^p ds \leq \left[\frac{p}{a+1} \right]^p \int_0^A s^{a+p} |f(s)|^p ds \quad \text{si } a > -1,$$

où l'on pose :

$$A = \rho(x), \quad t = \rho(x) - \rho, \quad s = \rho(x) - y \quad \text{et} \quad f(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y).$$

On va donc maintenant se restreindre au cas $p < 1$.

2° Posons :

$$y_k = (1 - 2^{-k})y, \quad k \geq 0,$$

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x, 0)|^p &\leq \left[\sum_{k \geq 1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho}(x, \rho) \right| d\rho \right]^p \\ &\leq \sum_{k \geq 1} (y_k - y_{k-1})^p \sup_{y_{k-1} < \rho \leq y_k} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho}(x, \rho) \right|^p \\ &\leq C \sum_{k \geq 1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} (y - \rho)^{p-1} \sup_{s \in I(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) \right|^p d\rho \\ &\leq C \int_0^y (\rho(x) - \rho)^{p-1} \sup_{s \in I(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) \right|^p d\rho, \end{aligned}$$

où :

$$I(\rho) = [\beta_1(\rho), \beta_2(\rho)] \quad \text{avec} \quad \beta_1(\rho) = \sup(2\rho - \rho(x), 0)$$

et :

$$\beta_2(\rho) = \frac{\rho + \rho(x)}{2}.$$

D'où en posant :

$$S_+ = \{ (x, y), 0 < y < \rho(x); \|x\| < 1 \},$$

$$\begin{aligned} &\int_{S_+} |u(x, y) - u(x, 0)|^p \delta^a(x, y) dx dy \\ &\leq A \int |u(x, y) - u(x, 0)|^p (\rho(x) - y)^a dx dy \\ &\leq A \int_{S_+} (\rho(x) - \rho)^{p-1} \sup_{s \in I(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) \right|^p \int_\rho^{\rho(x)} (\rho(x) - y)^a dy dx d\rho \\ &\quad A \int_{S_+} (\rho(x) - \rho)^{a+p} \sup_{s \in I(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) \right|^p dx d\rho \quad \text{si } a > -1. \end{aligned}$$

3° $\partial u / \partial y$ est harmonique, donc vérifie l'inégalité (\star).

Prenons $R = \gamma(\rho(x) - \rho)$ avec γ assez petit pour que :

$$\gamma(\rho(x) - \rho) \leq \text{dist}(I(\rho), \partial\Omega).$$

Alors :

$$\sup_{s \in I(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x, s) \right|^p \leq \frac{A}{(\rho(x) - \rho)^n} \int_{D(x, \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t) \right|^p d\alpha dt$$

où $D(x, \rho)$ est l'union des boules de rayon R , centrées aux ponts de $I(\rho)$.

Si $(\alpha, t) \in D(x, \rho)$ on a :

$$\beta_1(\rho) - R \leq t \leq \beta_2(\rho) + R,$$

d'où :

$$\frac{\rho(x) - \rho}{2} - R - A|x - \alpha| \leq \rho(\alpha) - t \leq \rho(x) - \rho + R + A|x - \alpha|.$$

On peut choisir γ assez petit pour que si $(\alpha, t) \in D(x, \rho)$ on a :

$$t > -\frac{\rho(\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad 0 < A' < \frac{\rho(\alpha) - t}{\rho(x) - \rho} < A.$$

Alors si $(\alpha, t) \in D(x, \rho)$, $\delta(\alpha, t)$ vérifie l'inégalité de la remarque 1 (a) et de plus (x, ρ) appartient à un ensemble $D'(\alpha, t)$ de mesure $\leq A[\rho(\alpha) - t]^n$.

4° Si $a > -1$ on a alors, d'après les deux paragraphes précédents :

$$\begin{aligned} & \int_{S_+} |u(x, y) - u(x, 0)|^p \delta^a(x, y) d\lambda(x, y) \\ & \leq A \int_{t > -(\rho(\alpha)/2)} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, t) \right|^p (\rho(\alpha) - t)^{a+p-n} \left(\int_{D'(\alpha, t)} dx dy \right) d\alpha dt \\ & \leq A \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, t) \right|^p \delta^{a+p}(\alpha, t) d\alpha dt. \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient la même inégalité pour $S_- = \{(x, y), -\rho(x) < y < 0\}$ et donc le résultat cherché.

3. Démonstration du théorème 1

1° Soit λ une fonction définissant le domaine $\Omega = \{\zeta; \lambda(\zeta) < 0\}$. Pour tout ζ de $\partial\Omega$ et tout α positif assez petit, on considère le plan P perpendiculaire à la direction $L(\zeta)$ transverse à $\partial\Omega$ et passant par le point $\zeta \pm \alpha L(\zeta)$ intérieur à Ω à la distance α de ζ . On note Γ le 1/2 espace déterminé par P et contenant y .

Pour tout α assez petit, il existe une boule B de centre y de rayon $A \cdot \alpha$ ($A > 1$) une fonction g positive, nulle au voisinage de ζ dont la norme \mathcal{C}^1 ne dépend que de Ω telles que :

- $\overline{B} \cap P \subset \Omega$;
- si $\mu \in \overline{B} \cap P$ alors $(\lambda + g)(\mu) = 0$ si et seulement si $\mu \in \partial B \cap P$ on pose $S_+(\zeta) = \{\lambda + g < 0\} \cap \Gamma$ et $S_-(\zeta)$ le symétrique de S_+ par rapport à P .

On définit alors la lunule $S(\zeta) = S_+(\zeta) \cup S_-(\zeta)$ et on choisit α assez petit pour que $S(\zeta)$ soit inclus dans Ω .

Soit S une telle lunule, par un changement de variable linéaire, on se ramène à la situation géométrique de la proposition 1, Oy étant l'image de $L(\zeta)$ et on note l l'image du champ de vecteur L . \mathcal{S} l'image de S s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{(x, y); x \in R^{n-1}, \|x\| < 1; -\rho(x) < y < \rho(x)\},$$

où la norme C^1 de ρ ne dépend que de la norme C^1 de λ .

La fonction harmonique U est transformée en une fonction harmonique sur \mathcal{S} telle que $\mathcal{U}(x, 0)$ et $\nabla \mathcal{U}(x, 0)$ soit bornée (car $S \cap P \subset \Omega$).

2° Écrivons :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} = \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}.$$

(a) Si $a - p > -1$ en utilisant le lemme 1 puis la proposition 1 on a :

$$\|\nabla \mathcal{U}\|_{L^2} \leq C \|\mathcal{U}\|_{L^2} \leq A \left\| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right\|_{L^2} + \|\mathcal{U}(x, 0)\|_{L^2} C,$$

$\mathcal{U}(x, 0)$ étant borné donc dans $L^p_{a-p}(\mathcal{S})$ si $a - p > -1$, U sera dans $L^p_{a-p}(\mathcal{S})$ dès que $\partial \mathcal{U} / \partial y$ est dans $L^p_a(\mathcal{S})$. Or :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} \right\|_{L^2} &\geq \left\| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right\|_{L^2} \inf_{\mathcal{S}} (\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2}) - \|\nabla \mathcal{U}\|_{L^2} \sup_{\mathcal{S}} |\varepsilon_i| \\ &\geq \left\| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right\|_{L^2} [\inf_{\mathcal{S}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2} - \sup_{\mathcal{S}} |\varepsilon_i| A] - \sup_{\mathcal{S}} |\varepsilon_i| C \|\mathcal{U}(x, 0)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

L étant un champ de vecteurs continu au voisinage de $\partial \Omega$ on peut choisir α assez petit pour que la variation de l sur \mathcal{S} vérifie :

$$\inf_{\mathcal{S}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2} - \sup_{\mathcal{S}} |\varepsilon_i| A > \frac{1}{2},$$

$\partial\mathcal{U}/\partial l$ étant dans $L_a^p(\mathcal{S})$ par hypothèse, on en déduit que $\partial\mathcal{U}/\partial y$ et donc $\nabla\mathcal{U}$ est dans $L_a^p(\mathcal{S})$.

(b) Si $a > -1$ on pose $u_i = \partial\mathcal{U}/\partial x_i (x_n = y)$ on a $\partial u_i/\partial y = \partial u_n/\partial x_i$.

En utilisant la proposition 1, puis le lemme 1 on a :

$$\|u_i(x, y) - u_i(x, 0)\|_{L^p} \leq A \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \leq A \|u_n\|_{L^p} \quad \text{si } i \leq n-1.$$

On en déduit que si u_n est dans $L_a^p(\mathcal{S})$, $\nabla\mathcal{U}$ est aussi dans $L_a^p(\mathcal{S})$, car $u_i(x, 0)$ est borné donc dans $L_a^p(\mathcal{S})$ or :

$$\left\| \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial l} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i u_i(x, 0) \right\|_{L^p} \geq \|u_n\|_{L^p} [\inf \sqrt{1 - \sum \varepsilon_i^2} - A \sup \sum \varepsilon_i].$$

En prenant comme dans (a), α assez petit, on en déduit que u_n et donc $\nabla\mathcal{U}$ est dans $L_a^p(\mathcal{S})$.

3° $\overline{\mathcal{S}}(\zeta)$ étant un voisinage de ζ dans $\overline{\Omega}$ pour tout ζ de $\partial\Omega$, il existe donc un nombre fini de lunules d'union V tel que $\Omega \setminus V$ soit compact. En appliquant ce qui précède à chacune de ces lunules, on déduit que U est dans $L_{a-p}^p(V)$ si $a > p-1$ et ∇U est dans $L_a^p(V)$ si $a > -1$ ces fonctions étant bornées sur $\Omega \setminus V$. Le théorème est démontré.

4. Compléments

(A) FONCTIONS HOLOMORPHES DANS \mathbb{C}^n

On obtient comme corollaire du théorème 1 le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de \mathbb{C}^n à frontière C^1 . Soit $p > 0$ et $a > -1$:

1° si $f' \in L_{a+p}^p(\Omega)$, f est dans $L_a^p(\Omega)$;

2° si u est dans $L_a^p(\Omega)$, f est dans $L_a^p(\Omega)$.

En effet, dans ce cas $|f'| = |\nabla f| = |\nabla u| = |\nabla v|$.

Si f' est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$, $\partial f/\partial L$ est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$ pour tout champ de vecteur vérifiant les hypothèses du théorème 1 et donc f est dans $L_a^p(\Omega)$.

Si u est dans $L_a^p(\Omega)$, $|\nabla f| = |\nabla u|$ est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$ d'après le lemme 1 donc f est dans $L_a^p(\Omega)$ d'après le théorème 1.

(B) CAS D'OUVERTS NON BORNÉS

On note Γ le demi-plan $\Gamma = \{(x, y); x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$.

On considère des systèmes de fonctions conjuguées $F = (u_0, \dots, u_n)$ tels que les fonctions u_i sont harmoniques dans Γ et vérifient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{avec } x_0 = y).$$

Pour $p > 0$ on note B^p l'ensemble de ces systèmes tels que :

$$\int_{\Gamma} |F|^p d\lambda < \infty$$

et b^p l'ensemble des fonctions harmoniques u telles que :

$$\int_{\Gamma} |u|^p d\lambda < \infty.$$

De façon parallèle aux espaces $H^p(\Gamma)$ avec $p > 1$ [9], on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *L'application de B^p sur b^p qui à $F = u_0 \dots u_n$ associe u_0 est un isomorphisme pour tout $p > 0$.*

1° Remarquons que toute fonction u de b^p vérifie (\star) , donc :

$$|u|^p(x, y) < \frac{C}{y^p} \int_{\Gamma} |u|^p;$$

u est borné dans tout demi-plan Γ_{y_1} où $\Gamma_{y_1} = \{(x, y), y \geq y_1\}$ pour tout y_1 et u est dans $L^{p'}(\Gamma_{y_1})$ avec $p' > p$ on en déduit [9] :

(a) u est égal à l'intégrale de Poisson :

$$u(x, y_1 + y) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} u(t, y_1) \frac{y}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt;$$

(b) si on prend $p' > \sup(p, 1)$ on a :

$$\sup_{y \geq y_1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx < \infty.$$

2° (a) si F est dans B^p alors :

$$u_i(x, y_1 + y) = C_n \int_{\mathbb{R}_n} \frac{x_i - t_i}{[|x - t|^2 + y^2]^{(n+1)/2}} u_0(t, y_1) dt, \quad 1 \leq i \leq n$$

et F est déterminé de façon unique par u_0 ;

(b) réciproquement, si u_0 est dans b^p , on définit u_1, \dots, u_n par les formules ci-dessus.

Alors $F = (u_0, \dots, u_n)$ est indépendant du choix de y_1 et appartient à $H^p(\Gamma y_1)$ si $p' > \sup(p, 1)$ pour tout y_1 .

En particulier, $u_i(x, y) \rightarrow_{y \rightarrow \infty} 0$ et donc :

$$|u_i(x, y)| \leq \int_y^\infty \left| \frac{\partial u_i}{\partial \rho}(x, \rho) \right| d\rho \leq \int_y^\infty |\nabla u_0(x, \rho)| d\rho.$$

Il s'agit de montrer que u_i est dans $L^p(\Gamma)$. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1. Indiquons simplement que pour $p < 1$ on établit en posant $y_k = 2^k y$ ($k \geq 0$) que :

$$|u_i(x, y)|^p \leq C \int_y^\infty \rho^{p-1} \sup_{\rho/2 < t < 2\rho} |\nabla u_0(x, t)|^p d\rho.$$

Comme on a :

$$\sup_{\rho/2 < t < 2\rho} |\nabla u_0(x, t)|^p \leq \frac{C}{\rho^{n+p}} \int_{|x-\alpha| < \rho/4, \rho/4 < t < 2\rho+(\rho/4)} |u(x, t)|^p d\lambda(x, t).$$

Le théorème de Fubini permet à nouveau de conclure.

(C) FRONTIÈRE NON RÉGULIÈRE

La condition C^1 sur $\partial\Omega$ n'est pas nécessaire; le théorème 1 reste valable par exemple si Ω est un cube de \mathbb{R}^n . Si $\partial\Omega$ est C^1 par morceaux, on peut ne pas obtenir les conclusions du théorème, par exemple dans le cas où $\partial\Omega$ a des points de rebroussement extérieurs, comme l'indique l'exemple suivant [5].

Dans \mathbb{C} , considérons l'ouvert :

$$\Omega = \left\{ (r, \theta); -\frac{r}{2} < \theta < \frac{r}{2}; 0 < r < \frac{\pi}{2} = R \right\}.$$

Si le théorème 2 était valable, il existerait une constante Γ telle que pour toute fonction holomorphe $f = u + iv$ sur Ω avec $\int_\Omega v d\lambda = 0$ on ait :

$$(\star\star\star) \quad \int_\Omega v^2 d\lambda \leq \Gamma \int_\Omega u^2 d\lambda.$$

Posons alors :

$$f_n(z) = u_n(z) + iv_n(z) = i \left(\frac{2}{n} \right)^{1/2} z^{(1/n) - 3/2},$$

$$\int_{\Omega} u_n^2 d\lambda + \int_{\Omega} v_n^2 d\lambda = \int_{\Omega} |f_n(z)|^2 r dr d\theta = \frac{2}{n} \int_0^R r^{(2/n) - 1} dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n^2 d\lambda - \int_{\Omega} v_n^2 d\lambda &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} f_n^2(z) r dr d\theta \\ &= -\frac{2}{n} \int_0^R r^{(2/n) - 1} \frac{2 \sin((2/n) - 3)(r/2) dr}{(2/n) - 3} dr \rightarrow -1 \end{aligned}$$

et de même $\int_{\Omega} f_n(z) r dr d\theta \rightarrow 0$.

On en déduit que :

$$\frac{\int_{\Omega} v_n^2}{\int_{\Omega} u_n^2} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\int_{\Omega} (v_n - v_n d\lambda)^2 d\lambda}{\int_{\Omega} u_n^2 d\lambda} \rightarrow \infty.$$

D'où la contradiction avec l'inégalité (★★★) ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUREN. — *Theory of H^p -spaces*, Academic Press, 1970.
- [2] FABES, JOEIT and RIVIÈRE. — Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains, *Acta Math.*, t. 141, 1978, p. 165-186.
- [3] FEFFERMAN and STEIN. — H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, t. 129, 1972, p. 137-193.
- [4] FORELLI and RUDIN. — Projections on spaces of holomorphic functions in balls, *Indiana Univ. J.*, t. 24, n° 6, 1974, p. 593-602.
- [5] FRIEDICH. — On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables, *T.A.M.S.*, t. 41, 1937, p. 321-364.
- [6] HARDY and LITTLEWOOD. — Some properties of conjugate functions, *J. Reine Angew Math.*, t. 167, 1931, p. 405-423.
- [7] HARDY, LITTLEWOOD et POLYA. — *Inequalities*, Cambridge, 1967.
- [8] KORANYI and VAGI. — Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, t. XXV, 1971, p. 575-648.
- [9] STEIN. — *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1970.