

BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHÈLE AUDIN

Opérations géométriques en cobordisme complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 235-249

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__235_0

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES EN COBORDISME COMPLEXE

PAR

MICHÈLE AUDIN (*)

RÉSUMÉ. — On trouvera dans cet article une construction géométrique d'opérations en cobordisme complexe qui relèvent les puissances de Steenrod, des propriétés de ces opérations, et, chemin faisant, une démonstration géométrique (c'est-à-dire sans calcul de nombres caractéristiques) du théorème de Mischenko.

ABSTRACT. — This paper contains a geometric construction for some complex cobordism operations which lift the Steenrod powers, some properties of these operations, and, by the way, a geometric (i. e. without any computation of characteristic numbers) proof of Mischenko's theorem.

Introduction

Ce travail prend sa source dans l'interprétation des opérations internes de tom Dieck en cobordisme non orienté en termes de singularités donnée dans [5] et [1]. Dans le cadre non orienté (et pour le nombre premier 2), les opérations externes de tom Dieck se laissent bien décomposer en opérations internes ([3], voir aussi [10]). La description à l'aide des singularités de morphismes de fibrés vectoriels réels est possible parce que l'espace projectif réel infini est le classifiant $B\mathbb{Z}/2$, ce qui permet d'utiliser le fibré en droites réelles universel en lieu et place des actions du groupe $\mathbb{Z}/2$ des constructions classiques d'opérations cohomologiques.

(*) Texte reçu le 26 juin 1982, révisé le 15 avril 1983.

M. AUDIN, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex.

Cet article se compose de trois parties :

- les paragraphes 1 et 2, où l'on utilise le calcul des classes de cobordisme complexe représentées par les singularités de morphismes de fibrés vectoriels complexes [1] pour définir un « analogue S^1 » des opérations internes en cobordisme non orienté;

- les paragraphes 3 à 5, où l'on étudie des propriétés des opérations ainsi définies;

- les paragraphes 6 et 7, qui sont une généralisation : on construit, pour tout nombre premier p , des opérations internes au cobordisme complexe, qui relèvent les puissances de Steenrod en cohomologie mod p .

Il n'est sans doute pas inutile de préciser le lien de ces constructions avec le grand classique de tom Dieck [3]. Dans [3] sont construites les célèbres « opérations externes de tom Dieck ». Comme $U_*(BZ/p)$ a de la torsion d'ordre p^n pour tout n [2], on ne peut pas, par slant-produit, en déduire des opérations internes ([3], § 20, [9]). Dans un dernier paragraphe ([3], § 21), tom Dieck définit aussi rapidement de nouvelles opérations, internes cette fois, qui relèvent les puissances de Steenrod (et dont il ne démontre pas d'autres propriétés). Nos opérations θ_p^j sont assez proches des opérations π_p^j de ce paragraphe, il est d'ailleurs facile d'explicitier les relations entre ces deux objets. Dans cette optique, un des intérêts de l'approche géométrique développée ici — particulièrement de l'utilisation de la formule du fibré excès de Quillen ([7], prop. 3.3) dans la démonstration du théorème 7.1 — est de mettre en lumière des rapports entre les deux types d'opérations de [3].

Insistons encore sur le point de départ géométrique de notre travail. Nous utilisons la description de Quillen du cobordisme [7] : une classe de cobordisme est représentée par une application d'une variété dans une autre, et une opération associée à un tel objet un objet du même type (tant que l'usage de coefficients n'est pas nécessaire). C'est alors la description géométrique des opérations θ^j au paragraphe 2 qui permet de démontrer au paragraphe 5 les « relations d'Adem ». Pour démontrer, au paragraphe 4, « la formule de Cartan », on a aussi besoin du théorème de Mischenko [6] qui explicite les coefficients, dans $U^*(pt) \otimes \mathbb{Q}$, du logarithme de la théorie U^* . Or, au paragraphe 3, pour calculer l'action des opérations sur $U^*(pt)$, on est amené à faire une remarque géométrique très simple; on en déduit des relations entre divers éléments de $U^*(pt)$, dont la plus immédiate est précisément le théorème de Mischenko. On en trouvera donc ici une démonstration élémentaire.

0. Notations

Si X est une variété et $x \in U^i(X)$, alors on peut représenter x par une composition $f: Z \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^{2m-i} \rightarrow X$, où Z est une variété, f est propre, m est assez grand et le fibré normal de l'inclusion $Z \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^{2m-i}$ est un fibré vectoriel complexe de rang complexe m sur Z , appelé ν_f^m . On note alors $x = f_* 1$ [7].

$P^n(\mathbb{C})$ désigne l'espace projectif complexe de dimension n , et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites canonique (celui dont la fibre au-dessus de la droite l de \mathbb{C}^{n+1} est la droite duale l^* de l), e est la classe d'Euler et $t = e(\mathcal{O}(1)) \in U^2(P^n(\mathbb{C}))$.

1. Définition des opérations θ^j

Soit $f_* 1 \in U^i(X)$, avec fibré normal ν_f^m , soit j un entier relatif intérieur ou égal à m , et soit $p: X \times P^{m-j}(\mathbb{C}) \rightarrow X$ la première projection.

PROPOSITION 1.1. — L'élément $p_*(f \times 1)_* e(\nu_f^m \otimes \mathcal{O}(1))$ de $U^{i+2j}(X)$ ne dépend que de $x = f_* 1$.

DÉFINITION :

$$\theta^j(f_* 1) = \begin{cases} p_*(f \times 1)_* e(\nu_f^m \otimes \mathcal{O}(1)) & \text{si } j \leq m, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi défini, pour tout entier relatif j , une opération de degré $2j$.

Si ζ est un fibré vectoriel complexe de rang m sur une variété Z , définissons des classes $\alpha^l(\zeta) \in U^{2l}(Z)$ [1] par :

$$e(\zeta \otimes \mathcal{O}(1)) \in U^{2m}(Z \times P^N(\mathbb{C})); \quad U^*(Z \times P^N(\mathbb{C})) \cong U^*(Z)[[t]]/t^{N+1}; \\ e(\zeta \otimes \mathcal{O}(1)) = \sum \alpha^{m-k}(\zeta) \times t^k.$$

Il est clair que les α^l ne dépendent pas de N assez grand, sont des classes caractéristiques stables, naturelles et multiplicatives pour les fibrés vectoriels complexes, et que $\alpha^l(\zeta) = 0$ pour $l \geq m+1$, et $\alpha^m(\zeta) = e(\zeta)$.

PROPOSITION 1.2. — θ^j est une opération stable et naturelle de degré $2j$, associée à la classe caractéristique $\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{j+k}$.

La classe de cobordisme de $P^k(\mathbb{C})$ est ici désignée par p_k , $p_k \in U^{-2k}(pt)$. l'isomorphisme de Thom permettant d'associer à chaque classe caractéristique stable une opération stable [4].

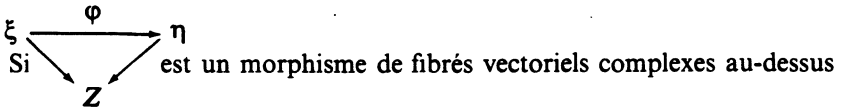
PROPOSITION 1.3. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc}
 U^*(-) & \xrightarrow{\theta^j} & U^{*+2j}(-) \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 H^*(-; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{Sq^{2j}} & H^{*+2j}(-; \mathbb{Z}/2)
 \end{array}$$

où μ désigne la réduction, est commutatif.

Démonstration. — Voir plus généralement le théorème 7.1.

2. Description géométrique des opérations θ^j et applications



d'une variété Z , définissons la singularité $\Sigma^1(\varphi) = \{(x, l) \mid l \text{ est une droite de } \ker \varphi_x\}$ contenue dans le projectif $P(\xi)$ de ξ . Si φ est générique, $\Sigma^1(\varphi)$ est une variété munie d'une application $\pi : \Sigma^1(\varphi) \rightarrow Z$ (la restriction de la projection $P(\xi) \rightarrow Z$). Le théorème suivant est démontré dans [1].

THÉORÈME 2.1. — Dans $U^*(Z)$, on a $\pi_* 1 = \sum_{k \geq 0} p_k \alpha^{j+k}(\eta - \xi)$, où $j = rg \eta - rg \xi + 1$.

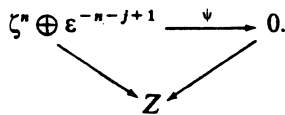
COROLLAIRE 2.2. — $\theta^j(f_* 1) = f_* \pi_* 1$, où $\pi : \Sigma^1(\varphi) \rightarrow Z$ est la projection et φ est un morphisme générique $\varepsilon^{m-j+1} \rightarrow \nu_f^m$ du fibré trivial dans le fibré normal de f , au-dessus de Z .

PROPOSITION 2.3. — (i) Si le fibré normal ν_f^m de $f : Z \rightarrow X$ admet un inverse ζ de rang n sur Z , et si $j \leq -n + 1$, $\theta^j(f_* 1)$ se représente par :

$$P(\zeta \oplus \varepsilon^{-n-j+1}) \rightarrow Z \xrightarrow{f} X.$$

(ii) Si $f : Z \rightarrow X$ admet un fibré normal de rang complexe m , alors $\theta^m(f_* 1) = f_* e(\nu_f^m)$; si f est un plongement de codimension $2j$, dont le fibré normal est complexe, alors $\theta^j(f_* 1) = (f_* 1)^2$ et $\theta^l(f_* 1) = 0$ pour $l \geq j + 1$.

Démonstration de (i) (description de l'action de θ^j pour les petites valeurs de j). — Considérons le morphisme nul :



Sa singularité est $P(\zeta \oplus \varepsilon^{-n-j+1})$. Suspendons-le par l'identité pour obtenir $\varepsilon^{m-j+1} = \zeta^n \oplus \varepsilon^{-n-j+1} \oplus v_f^m \xrightarrow{\psi \oplus 1} v_f^m$. Alors $\theta^j(f_* 1)$ est l'image dans X de $\tilde{\Sigma}^1(\psi \oplus 1, \cdot) = \tilde{\Sigma}^1(\psi) = P(\zeta \oplus \varepsilon^{-n-j+1})$.

Démonstration de (ii) (description de θ^j pour les grandes valeurs de j). — $\theta^m(f_* 1) = f_* (\sum p_k \cdot \alpha^{m+k}(v_f)) = f_* \alpha^m(v_f) = f_* e(v_f^m)$ d'après la proposition 1.2 et les propriétés des classes α ; on peut aussi le voir directement à l'aide du corollaire 2.2 : $\theta^m(f_* 1)$ est représentée par la singularité d'un morphisme $\varepsilon^1 \xrightarrow{\varphi} v_f^m$; c'est exactement les zéros d'une section (transverse si φ est générique) de v_f^m , soit la classe d'Euler de v_f^m . De même, si f est un plongement, on a d'une part $\theta^j(f_* 1) = f_* e(v_f^j)$ comme on vient de le voir, et d'autre part, par naturalité, on peut supposer que f est l'inclusion de la section nulle dans l'espace total de v_f , mais alors $f_* e(v_f) = (f_* 1)^2$. Il y a là aussi un argument plus géométrique qui permet en outre, si f est une immersion à fibré normal complexe, d'évaluer la différence $\theta^j(f_* 1) - (f_* 1)^2$:

LEMME 2.4. — Si f est une immersion à croisements normaux de codimension $2j$ $f : Z \rightarrow X$, dont le fibré normal v_f^j est complexe, soit $M_2(f)$ la sous-variété de $Z \times Z$ définie par : $M_2(f) = \{(x, y) \in Z \times Z \mid x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\}$. Alors, $p : M_2(f) \rightarrow Z$ la restriction de la première projection est munie d'une orientation complexe et représente donc un élément $m_2(f) \in U^{2j}(Z)$; de plus $\theta^j(f_* 1) = (f_* 1)^2 - f_* m_2(f)$.

Démonstration. — L'hypothèse « croisements normaux » force $M_2(f)$ à être une sous-variété de $Z \times Z$, le fibré normal de p est $p^* v_f^j$, donc il a une structure complexe naturelle. L'argument classique (i.e. sans hypothèses « complexes ») à la Whitney fonctionne encore pour montrer que :

$$f_* f_* 1 - m_2(f) = e(v_f) \in U^{2j}(Z).$$

Alors :

$$\theta^j(f_* 1) = f_* e(v_f) = (f_* 1)^2 - f_* m_2(f).$$

(Si f est un plongement, $M_2(f)$ est vide.)

Notons que si X est un point et Z une variété presque complexe de dimension $2n$, le fibré complexe TZ convient pour ζ :

COROLLAIRE 2.5 (action sur $U^*(pt)$). — Si Z est une variété presque complexe de dimension $2n$:

- (i) si $j \leq -n + 1$, $\theta^j([Z]) = [P(TZ \oplus \varepsilon^{-n-j+1})] \in U^{-2n-2j}(pt)$;
- (ii) si $n \geq 1$, $\theta^n([Z]) \in 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = U^0(pt)$.

Démonstration de (ii). — On applique 1.2 à $\theta^n : U^{-2n}(pt) \rightarrow U^0(pt)$, en remarquant que le noyau de $\mu : U^0(pt) \rightarrow H^0(pt; \mathbb{Z}/2)$ s'identifie à $2\mathbb{Z}$. Remarquons que $\theta^{-j}(pt) = p_j (j \geq 0)$.

3. Une remarque et des applications

Pour calculer θ^j sur $U^*(pt)$, on est donc amené à considérer des projectifs de fibrés vectoriels. Commençons donc par une remarque géométrique :

PROPOSITION 3.1. — Soient η un fibré en droites complexes sur une variété X et j un entier naturel. Il existe un difféomorphisme (respectant les structures complexes) au-dessus de X :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times P^j(\mathbb{C}) & \xrightarrow{F} & P((j+1)\eta), \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & X &
 \end{array}$$

où $(j+1)\eta$ est la somme de $j+1$ copies du fibré η .

Démonstration. — $X \times P^j(\mathbb{C}) = \{(x, d) \mid x \in X, d \text{ est une droite de } \mathbb{C}^{j+1}\}$, $P((j+1)\eta) = P(\eta \otimes \varepsilon^{j+1}) = \{(x, \mathcal{D}) \mid x \in X, \mathcal{D} \text{ est une droite dans } \eta_x \otimes \mathbb{C}^{j+1}\}$. L'isomorphisme F est défini par $F(x, d) = (x, \eta_x \otimes d)$.

En particulier, si $X = P^j(\mathbb{C})$ et $\eta = \mathcal{O}(1)$, $(j+1)\eta \cong TP^j(\mathbb{C}) \oplus \varepsilon^1$, et donc :

COROLLAIRE 3.2. — $P(TP^j(\mathbb{C}) \oplus \varepsilon^1)$ est difféomorphe, par un difféomorphisme respectant la base $P^j(\mathbb{C})$, à $P^j(\mathbb{C}) \times P^j(\mathbb{C})$.

Remarque. — Bien entendu, le cas des projectifs réels est analogue. Voir dans [2] et [5] des démonstrations du fait que $P(TP^j(\mathbb{R}) \oplus \varepsilon^1)$ est cobordant à $P^j(\mathbb{R}) \times P^j(\mathbb{R})$.

La proposition 3.1 dit en particulier que les deux variétés considérées représentent la même classe de cobordisme dans $U^{-2j}(X)$. En appliquant le théorème 2.1 au morphisme nul $(j+1)\eta \rightarrow 0$, nous savons que la classe de cobordisme de $P((j+1)\eta)$ est $\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{-j+k}(\zeta)$, où ζ est un inverse de $(j+1)\eta$. La proposition 3.1 dit donc en particulier que :

$\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{-j+k}(\zeta) = p_j \cdot 1$. En particulier, si $X = P^n(\mathbb{C})$, désignons par u la classe d'Euler du fibré η , $u \in U^2(P^n(\mathbb{C}))$; la relation précédente s'écrit :

$$p_j \cdot 1 + \sum_{m=1}^n P_{n,j,m} u^m = p_j \cdot 1,$$

où $P_{n,j,m}$ est un polynôme à coefficients entiers en les p_k , $a_{r,s}$, les $a_{r,s}$ étant les coefficients du groupe formel F de U^* . En effet, si $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont les éléments symboliques dont les fonctions symétriques élémentaires sont les classes de Conner-Floyd de ζ , $\alpha^{-j+k}(\zeta)$ est le coefficient de t^{n+j-k} dans $\prod_{i=1}^n F(\lambda_i, t)$, et donc :

$$\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{-j+k}(\zeta) = \sum_{m=0}^n \sum_{r_1+\dots+r_m=m, s_1+\dots+s_m+k=n+j} p_k a_{r_1, s_1} \dots a_{r_m, s_m} \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_n^{r_n}.$$

Le terme correspondant à $m=0$ est $p_j \cdot 1$, et les fonctions symétriques des λ_i s'expriment universellement en fonction de u . Donc, on a :

$$\sum_{m=1}^n P_{n,j,m} u^m = 0 \quad \text{soit} \quad P_{n,j,m} = 0 \\ (j \geq 0, n \geq 1, 1 \leq m \leq n),$$

les u^m étant indépendants. On obtient ainsi des relations entre les $a_{r,s}$ et les p_k dans $U^*(pt)$, par exemple :

COROLLAIRE 3.3. — (i) $\forall j \geq 0$, $\sum_{k \geq 0} p_k \cdot a_{1, 1+j-k} = 0$, autrement dit :

$$\frac{1}{\sum_{i \geq 0} a_{1i} X^i} = \sum_{i \geq 0} p_i \cdot X^i$$

(théorème de Mischenko [6]).

(ii) $\forall j \geq 0$, $2 \sum_{k \geq 0} p_k \cdot a_{2, 1+j-k} = (j+2) \sum_{r+s+k=j+2} p_k a_{1r} a_{1s}$.

Démonstration. — C'est le calcul des relations $P_{n,j,m}$ pour $n=1$ (i) et $n=2$ (ii). Par exemple, pour $n=1$, on a $u^2=0$ et donc le calcul est extrêmement simple :

$$\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{-j+k}(\zeta) = p_j \cdot 1 - (j+1) \left(\sum_{k \geq 0} p_k \cdot a_{1, 1+j-k} \right) u.$$

COROLLAIRE 3.4. — Si ξ est un fibré vectoriel complexe de rang $j+1$ sur une variété X de dimension (réelle) ≤ 2 , la classe de cobordisme de $P(\xi)$ dans $U^{-2j}(X)$ est égale à celle de $X \times P^j(\mathbb{C})$.

Démonstration. — $\xi = \eta \oplus \varepsilon^j$, où η est un fibré en droites. Soit $x = -e(\eta)$. On calcule la classe de cobordisme de $P(\xi)$ comme plus haut et on obtient :

$$\sum_{k \geq 0} p_k \cdot \alpha^{-j+k}(-\eta) = p_j \cdot 1 + \left(\sum_{k \geq 0} p_k \cdot a_{1, 1+j-k} \right) x = p_j \cdot 1 \text{ d'après 3.3(i).}$$

- THÉORÈME 3.5. — (i) Si $j \leq -n+1$, $\theta^j(p_n) = [P(TP^n(\mathbb{C}) \oplus \varepsilon^{-n-j+1})]$;
 (ii) Si $j \geq 0$, $\theta^{-j}(p_j) = p_j^2$;
 (iii) Si $j \geq 0$, $\theta^{-j}(p_1) = p_1 p_j$;
 (iv) $\theta^n(p_n) = (-1)^n C_{2n}^n \in \mathbb{Z} = U^0(pt)$.

Démonstration. — (i) est 2.5.

(ii) est conséquence de 2.5 et de 3.2.

(iii) $\theta^{-j}(p_1) = [P(TP^1(\mathbb{C}) \oplus \varepsilon^j)] = p_1 p_j$ d'après 3.4.

(iv) $\theta^n(p_n) = f_* e(\zeta^n)$, où $f: P^n(\mathbb{C}) \rightarrow pt$ est l'application constante et ζ^n le fibré normal de $P^n(\mathbb{C})$, d'après 2.3. On a $e(\zeta^n) = c^n(\zeta^n)$ est le terme de degré n dans $1/(1+t)^{n+1}$, soit $(-1)^n C_{2n}^n t^n$; et $f_* t^n = 1$.

4. La formule de Cartan

Le théorème de Mischenko (3.3(i)) permet aussi de démontrer :

THÉORÈME 4.1 :

$$\theta^j(xy) = \sum_{r \in \mathbb{Z}, l, m, n \in \mathbb{N}} a_{1l} a_{1m} p_n \theta^{j+l+m+n-r}(x) \theta^r(y).$$

Démonstration. — Appelons β^j la classe caractéristique stable associée à θ^j , $\beta^j = \sum_{k \geq 0} p_k \alpha^{j+k}$. Il est équivalent de montrer que, pour tous fibrés vectoriels complexes ξ et η , on a :

$$\beta^j(\xi \oplus \eta) = \sum_{l, m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}} a_{1l} a_{1m} p_n \beta^{j+l+m+n-r}(\xi) \beta^r(\eta).$$

Le théorème résulte alors des deux faits suivants :

Fait 1. — $\alpha^j = \sum_{k \geq 0} a_{1k} \beta^{j+k}$.

Fait 2. — $\alpha^j(\xi \oplus \eta) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha^{j-r}(\xi) \alpha^r(\eta)$.

Le fait 2 est clair, démontrons le fait 1 : on a à résoudre le système linéaire infini : $\beta^j = \sum_{k \geq 0} p_k \alpha^{j+k}$ ($j \in \mathbb{Z}$). Or, il est facile de voir qu'un système $y_j = \sum_{k \geq 0} b_k x_{j+k}$ ($b_0 = 1$) s'inverse en $x_j = \sum_{k \geq 0} a_k y_{j+k}$, où les a_k sont définis par $\sum a_k X^k = (\sum b_k X^k)^{-1}$ au sens de la multiplication des séries formelles. Le fait 1 résulte alors du théorème de Mischenko. On obtient aussi :

PROPOSITION 4.2. — Soit $g: X \rightarrow Y$ une application propre munie d'une orientation complexe; soit v_g son fibré normal stable, et soit $x \in U^*(X)$. Alors :

$$\theta^j(g_* x) = \sum_{l+m=j} g_* (\alpha^l(v_g) \theta^m(x)).$$

Démonstration. — Si $x = f_* 1$, $\theta^j(g_* x) = \theta^j((g \circ f)_* 1) = (g \circ f)_* \beta^j(v_{g \circ f})$.
 $v_{g \circ f} = v_f \oplus f^* v_g$, donc :

$$\begin{aligned} \theta^j(g_* x) &= \sum_{k \geq 0} p_k g_* f_* \alpha^{j+k}(v_f \oplus f^* v_g) \\ &= \sum_{k \geq 0} p_k g_* \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}} \alpha^a(v_g) f_* \alpha^{j+k-a}(v_f) \right) \\ &= \sum_{k, l \geq 0, a \in \mathbb{Z}} p_k a_l g_* (\alpha^a(v_g) \theta^{j+k-a+l}(x)) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} g_* (\alpha^r(v_g) \theta^{j-r}(x)), \end{aligned}$$

en utilisant encore une fois le théorème de Mischenko.

5. La composition $\theta^l \circ \theta^j$

La description géométrique de θ^j en termes de singularités permet d'évaluer la composition $\theta^l \circ \theta^j$. En effet, si $x \in U^l(X)$, $x = f_* 1$, le corollaire 2.2 exhibe une variété $\Sigma^1(\varphi)$ et une application $f \circ \pi : \Sigma^1(\varphi) \rightarrow X$. Écrivons :

$$\theta^j(x) = g_* 1 \quad \text{alors} \quad \theta^l \circ \theta^j(x) = \sum_{k \geq 0} p_k g_* \alpha^{l+k}(v_g).$$

Le calcul de v_g en fonction de v_f est facile; on obtient par exemple :

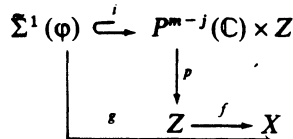
THÉORÈME 5.1 (*relations d'Adem généralisées*) :

$$\begin{aligned} (\star) \quad \theta^l \circ \theta^j(f_* 1) &= f_* \left(\sum_{\alpha + \beta + \gamma = j+l} (C_{j-\gamma-1}^{l-\beta-\gamma} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l-\beta-\gamma} C_{l-\beta-\gamma}^{j-\alpha-1}) X_\alpha X_\beta X_\gamma \right) \text{ mod I,} \end{aligned}$$

où $X_k = c^k(v_f)$ est la k -ième classe de Conner Floyd et :

$$I = (t_1 \dots t_n \dots) \subset \mathbb{Z}[t_1 \dots t_n \dots] = U^*(pt).$$

Démonstration. — $\theta^j(f_* 1) = g_* 1$, où :



et $\varphi : \varepsilon^{m-j+1} \rightarrow v_f^m$ est un morphisme générique.

Soit ζ un fibré complexe de rang K sur $P^{m-j}(\mathbb{C})$, représentant le fibré normal de $P^{m-j}(\mathbb{C})$. Appelons $q : P^{m-j}(\mathbb{C}) \times Z \rightarrow P^{m-j}(\mathbb{C})$ la première projection. Alors :

$$v_g^{2m+k} = i^* ((q^* \mathcal{O}(1) \otimes p^* v_f^m) \oplus q^* \zeta \oplus p^* v_f^m)$$

est un représentant (de rang complexe $2m + K$) du fibré normal de g . Si on calcule mod I :

$$\theta^l(g_* 1) \equiv g_* \alpha^l(v_g) \equiv g_* c^l(v_g) \pmod I$$

(il est clair, par définition des classes α , que $\alpha^l \equiv c^l \pmod I$).

Il suffit donc de calculer $g_* c^l(v_g)$:

$$g_* c^l(v_g) = f_* p_* (\sum_{r+s+t=l} c^r(q^* \mathcal{O}(1) \otimes p^* v_f) c^s(q^* \zeta) c^t(p^* v_f) i_* 1).$$

Rappelons que $i_* 1 = e(\mathcal{O}(1) \otimes p^* v_f)$ (c'est essentiellement ce que dit le théorème 2.1).

Notons $t = e(\mathcal{O}(1)) \in U^2(P^{m-j}(\mathbb{C}))$; on a $c^s(\zeta) = (-1)^s C_{m-j+s}^s t^s$, et donc $g_* c^l(v_g) \pmod I$ est l'image par f_* du coefficient de t^{m-j} dans :

$$\sum_{r+s+t=l} ((\sum_{q=0}^r C_{m-r+q}^q c^{r-q}(v_f) t^q) (-1)^s \times C_{m-j+s}^s t^s c^l(v_f) (\sum_{u=0}^m c^{m-u}(v_f) t^u)).$$

Donc :

$$g_* c^l(v_g) \equiv \sum_{q+n+t=l} f_* (X_q X_t X_n) \times \sum_{r+s=l-t} (-1)^s C_{m-q}^{m-r} C_{m-j+s}^s \sum_{r+s=l-t} (-1)^s C_{m-q}^{m-r} C_{m-j+s}^s = \sum_{r+s=l-t} (-1)^s C_{m-q}^{r-q} C_{m-j+s}^s$$

est le coefficient de x^{l-t-q} dans $(1+x)^{m-q} / (1+x)^{m-j+1}$, soit :

$$\begin{cases} C_{j-q-1}^{l-t-q} & \text{si } j-q-1 \geq 0, \\ (-1)^{l-t-q} C_{l-j-t}^{l-t-q} & \text{si } j-q-1 < 0. \end{cases}$$

On en déduit la proposition (N.B. Dans la formule (★), il y a toujours un des deux coefficients binomiaux qui est nul.)

Appelons σ_{i_1, \dots, i_k} l'opération de Landweber-Novikov associée à la classe caractéristique stable $c^1 \dots c^k$. On sait [4] que $\sigma_l \circ \sigma_j$ s'exprime en fonction des σ_{i_1, \dots, i_k} par une relation à coefficients dans \mathbb{Z} . A l'aide de 2.5(ii), on en déduit :

COROLLAIRE 5.2. :

$$\sigma_l \circ \sigma_j \equiv \sum_{\alpha+\beta+\gamma=j+l} (C_{j-\gamma-1}^{l-\beta-\gamma} + (-1)^{l-\beta-\gamma} C_{l-\beta-\gamma}^{l-\beta-\gamma}) \sigma_{\alpha\beta\gamma} \pmod 2.$$

6. Les opérations θ_p^j .

Désignons dans la suite par p un nombre premier (éventuellement égal à 2).

Soit ξ_p le fibré de rang $p-1$ sur $P^{n(p-1)}(\mathbb{C})$ défini par : $\xi_p = \mathcal{O}(1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(p-1)$. Notons, pour tout i , $[i](X)$ la i -ième série formelle itérée du groupe formel F de U^* : $[i](X) = X + X \dots + X$ (i termes). Soit enfin $t = e(\mathcal{O}(1)) \in U^2(P^{n(p-1)}(\mathbb{C}))$. On a donc :

$$e(\xi_p) = \prod_{i=1}^{p-1} [i](t) = (p-1)! t^{p-1} + \dots$$

Désignons par A un anneau qui sera :

- $\mathbb{Z}_{(p)}$; le localisé de \mathbb{Z} en p , ou \mathbb{Z}/p si $p \geq 3$;
- \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z}/2$ si $p=2$.

$(p-1)!$ est inversible dans A . En particulier, l'élément :

$$\omega_p(X) = \frac{X^{p-1}}{\prod_{i=1}^{p-1} [i](X)},$$

existe dans $(U^*(pt) \otimes A)[[X]]$. En utilisant un spectre de Moore ou une théorie à singularités, on peut considérer $U^*(-; A)$. En particulier :

$$U^*(pt) \otimes A[[t]] = U^*(P^\infty(\mathbb{C})) \otimes A = U^*(P^\infty(\mathbb{C}); A).$$

Dans la suite, on définit les opérations $\theta_p^j : U^i(X) \rightarrow U^{i+2j(p-1)}(X; A)$. On continuera à représenter les éléments de $U^i(X)$ par des applications à orientation complexe $f : Z \rightarrow X$.

Définition. - Si $x = f_* 1 \in U^i(X)$ et v_f^m est le fibré normal complexe de f :

$$\theta_p^j(x) = \begin{cases} p_* (f \times 1)_* [(1 \times \omega_p^{m-j}) e(v_f^m \otimes \xi_p)] & \text{si } j \leq m, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le fibré ξ_p est pris sur $P^{(m-j)(p-1)}(\mathbb{C})$; $\omega_p = \omega_p(t) \in U^0(P^{(m-j)(p-1)}(\mathbb{C}); A)$ et $p : X \times P^{(m-j)(p-1)}(\mathbb{C}) \rightarrow X$ est la première projection.

PROPOSITION 6.1. - (i) $\theta_p^j(x)$ ne dépend que de x (et pas des choix de f et m), θ_p^j définit une opération naturelle et stable de degré $2j(p-1)$:

$$\theta_p^j : U^*(-) \rightarrow U^{*+2j(p-1)}(-; A).$$

(ii) Si $f : Z \rightarrow X$ admet un fibré normal v_f^m complexe de rang m , $\theta_p^m(f_* 1) = \rho_{f_*} e(v_f^m)^{p-1}$; et si f est un plongement de codimension $2j$ dont le fibré normal est complexe, $\theta_p^j(f_* 1) = \rho(f_* 1)^p$ où $\rho : U^*(-) \rightarrow U^*(-; A)$ est induit par l'homomorphisme évident $\mathbb{Z} \rightarrow A$.

Démonstration. — (i) est clair par définition de ω_p .

(Le produit $(1 \times \omega_p^{m-j})e(v_f^m \otimes \xi_p)$ est défini :

$$U^*(Z \times P^{(m-j)(p-1)}(\mathbb{C}); A) \otimes U^*(Z \times P^{(m+j)(p-1)}(\mathbb{C})) \rightarrow U^*(Z \times P^{(m-j)(p-1)}(\mathbb{C}); A).$$

(ii) Si $j=m$, alors l'usage des coefficients A est superflu; ξ_p est sur $P^0(\mathbb{C})=pt$, et donc $e(v_f^m \otimes \xi_p) = e(v_f^m)^{p-1}$, de plus si f est un plongement, par naturalité on peut supposer que X est l'espace total de v_f , et f l'inclusion de la section nulle, mais alors $f_* e(v_f)^{p-1} = (f_* 1)^p$.

Remarquons que si $p=2$ et $A=\mathbb{Z}$, on a $\theta_2^j = \theta^j$.

7. Le rapport avec les puissances de Steenrod

Désignons par μ et μ_A respectivement les réductions :

$$U^*(-) \rightarrow H^*(-; \mathbb{Z}), \quad U^*(-; A) \rightarrow H^*(-; \mathbb{Z}/p).$$

THÉORÈME 7.1. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} U^*(-) & \xrightarrow{\theta^j} & U^{*+2j(p-1)}(-; A) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ H^*(-; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{P^j} & H^{*+2j(p-1)}(-; \mathbb{Z}/p) \end{array}$$

est commutatif, où P^j est la j -ième « puissance » de Steenrod pour le nombre premier p (on contient que $P^j = Sq^{2j}$ si $p=2$).

Démonstration. — Comme θ_p^j et P^j sont stables, il suffit de montrer que $\mu_A \theta_p^j(x) = P^j \mu(x)$ quand $x = f_* 1$, avec $f: Z \rightarrow X$ un plongement avec fibré normal complexe v_f^j de rang i (alors $x \in U^{2i}(X)$).

(a) Évaluons $\mu_A \theta_p^j(x)$:

$$\begin{aligned} \mu_A \theta_p^j(x) &= \mu_A p_* (f \times 1)_* (1 \times \omega_p^{i-j}) e(v_f^i \otimes \xi_p) \\ &= p_* (f \times 1)_* \left\{ \left[\frac{1}{(p-1)!} \right]^{i-j} \prod_{i=1}^{p-1} \sum_{k=0}^i c^{i-k}(v_f^i)(lt)^k \right\}, \end{aligned}$$

où \int désigne l'homomorphisme de Gysin en cohomologie à coefficients \mathbb{Z}/p , c^k la réduction mod p de la k -ième classe de Chern et $t \in H^2(P^{(i-j)(p-1)}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p)$ la réduction de la classe d'Euler de $\mathcal{O}(1)$.

En effet, en cohomologie, $e(v_f^i \otimes \mathcal{O}(l)) = \sum_{k=0}^i c^{i-k}(v_f^i)(lt)^k$ par définition des classes de Chern ($e(\mathcal{O}(l)) = lt$, et de même, $\mu_A \omega_p = 1/(p-1)!$). Donc :

$$\begin{aligned} \mu_A \theta_p^j(x) &= (-1)^{i-j} p_! (\sum 1^{k_1} \dots (p-1)^{k_{r-1}} f_! \\ &\quad [c^{j-k_1}(v_f) \dots c^{j-k_{r-1}}(v_f)] t^{k_1+\dots+k_{r-1}}) \\ &= (-1)^{i-j} \sum_{k_1+\dots+k_{r-1}=(i-j)(p-1)} 1^{k_1} \dots (p-1)^{k_{r-1}} f_! [c^{j-k_1}(v_f) \dots c^{j-k_{r-1}}(v_f)]. \end{aligned}$$

En effet :

$$p_!(at^m) = \begin{cases} a, & \text{si } m=(i-j)(p-1) = \dim P^{(i-j)(p-1)}(\mathbb{C}) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Évaluons $P^j \mu x$: Soit E une sphère de dimension impaire assez grande (par rapport à $2(i-j)$) et $E \rightarrow B$ le quotient par l'action de \mathbb{Z}/p . Soit $u \in H^2(B; \mathbb{Z}/p)$ le générateur : $u = e(\zeta)$ où ζ est le fibré en droites complexes associé au revêtement $E \rightarrow B$. Alors $P^j \mu x$ est (à multiplication par $(-1)^{i-j}$ près) le coefficient de $u^{(i-j)(p-1)}$ dans $P(\mu x) \in H^*(X \times B, \mathbb{Z}/p)$ [8]. Or $P(\mu x) = \mu P^{\text{ext}} x$, où P^{ext} est l'opération externe de tom Dieck définie par :

$$\begin{array}{ccc} E \times_{\mathbb{Z}/p} (Z^p) & \xrightarrow{1 \times_{\mathbb{Z}/p} f^p} & E \times_{\mathbb{Z}/p} (X^p) \\ & & \uparrow \Delta \\ & & B \times X \end{array} \quad [3]$$

$P^{\text{ext}} x = \Delta^*(1 \times_{\mathbb{Z}/p} f^p)_* 1$ (c'est bien défini car on a supposé que la codimension de f est paire).

Comme on a supposé que f est un plongement, $E \times_{\mathbb{Z}/p} (Z^p)$ et $B \times X$ sont des sous-variétés de $E \times_{\mathbb{Z}/p} (X^p)$ et $P^{\text{ext}} x$ est donc représentée par leur intersection transverse, sous-variété de $B \times X$. L'intersection ensembliste de $E \times_{\mathbb{Z}/p} (Z^p)$ et $B \times X$ est $B \times Z$, les deux sous-variétés ne sont pas en position générale, mais leur intersection est lisse. Le fibré « excès » de cette intersection :

$$T(E \times_{\mathbb{Z}/p} (X^p)) / (T(E \times_{\mathbb{Z}/p} (Z^p)) + T(B \times X)) \quad (\text{fibré sur } B \times Z),$$

s'identifie à :

$$(\zeta \oplus \dots \oplus \zeta^{p-1}) \otimes v_f^i.$$

On peut utiliser la proposition 3.3 de [7] : $\Delta^*(1 \times_{\mathbb{Z}/p} f)_* 1$, l'intersection transverse, se représente par la classe d'Euler du fibré « excès »; on obtient donc :

$$(\star) \quad P^{\text{ext}} x = (f \times 1)_* e(v_f^i \otimes (\zeta \oplus \dots \oplus \zeta^{p-1}))$$

et :

$$\mu P^{\text{ext}} x = (1 \times f)_! (\Sigma 1^{k_1} \dots (p-1)^{k_{p-1}} c^{i-k_1}(v_f^i) \dots c^{i-k_{p-1}}(v_f^i) u^{k_1 + \dots + k_{p-1}}),$$

comme dans le calcul précédent. On a alors :

$$P^j \mu x = (-1)^{i-j} \sum_{k_1 + \dots + k_{p-1} = (i-j)(p-1)} 1^{k_1} \dots (p-1)^{k_{p-1}} f! \\ \times (c^{i-k_1}(v_f^i) \dots c^{i-k_{p-1}}(v_f^i)),$$

d'où le théorème 7.1.

COROLLAIRE 7.2. — Si $x \in U^{-2n(p-1)}(pt)$ ($n \geq 1$) et $A = \mathbb{Z}_{(p)}$:

$$\theta_p^n(x) \in p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{(p)} = U^0(pt) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Démonstration. — On applique 7.1 à :

$$\theta_p^n : U^{-2n(p-1)}(pt) \rightarrow U^0(pt) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Remarque 1. — La description (\star) de $P^{\text{ext}} x$, quand x est représenté par un plongement est essentiellement le « lemme-clé » de Quillen ([7], prop. 3.12). Cette description est une des sources de la définition des θ_p^j : la projection $B \times X \rightarrow X$ a un Gysin essentiellement nul, puisque le cobordisme de B est concentré en codimension paire, B est de dimension impaire et donc l'oubli $U^*(B) \rightarrow U^*(pt)$ est zéro pour $\star < \dim B$. On ne peut donc, à l'aide du Gysin de $B \times X \rightarrow X$, définir des opérations internes à l'aide de P^{ext} , mais ceci donne l'idée de remplacer B par un espace projectif complexe, ce qui est fait dans la définition de θ_p^j . En plus, (\star) indique le lien entre les opérations externes de tom Dieck et les θ_p^j (donc aussi les π_p^j de [3], § 21).

Remarque 2 (lien avec les opérations π_p^{2j} de Tom Dieck [3], § 21). — Si ζ^m est un fibré vectoriel complexe de rang m sur Z , la formule :

$$(1 \times \omega_p(t)^{m-j}) e(\zeta^m \otimes \xi_p) = \sum_{k \geq 0} \gamma_{p,j}^{m(p-1)-k}(\zeta^m) t^k,$$

dans $U^{2m(p-1)}(Z \times P^\infty(\mathbb{C}); A)$, définit des classes caractéristiques (stables) $\gamma_{p,j}^k(\zeta^m) \in U^{2k}(Z, A)$ pour tout entier j , avec :

$$\gamma_{p,j}^k(\zeta^m) = 0 \quad \text{si } k > m(p-1),$$

$$\gamma_{p,j}^{m(p-1)}(\zeta^m) = \frac{e(\zeta^m)^{p-1}}{[(p-1)!]^{m-j}}.$$

