BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL MEYER

Sur les hypersurfaces minimales des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 359-366
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__359_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 359-366.

SUR LES HYPERSURFACES MINIMALES DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES A COURBURE DE RICCI POSITIVE OU NULLE

PAR

DANIEL MEYER (*)

RÉSUMÉ. — Ces quelques pages sont une variation sur le thème des hypersurfaces minimales compactes des variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci positive ou nulle.

ABSTRACT. — These pages are a variation on the theme of compact minimal hypersurfaces in complete riemannian manifolds with nonnegative Ricci curvature.

Introduction

On discrimine d'abord les hypersurfaces (connexes) d'une variété (connexe) suivant :

1. la trivialité de leur fibré normal,
2. le fait qu'elles partagent ou non la variété.

Puis on établit des résultats qui concernent principalement l'intersection géométrique d'hypersurfaces minimales d'une variété riemannienne complète à courbure de Ricci $\geqslant 0$; ces résultats s'apparentent à ceux de T. FRANKEL (*voir* [F]). Lorsque la variété ambiante est supposée compacte, on applique la théorie de Hodge-de Rham à bord développée dans [D-S] et la formule de Weitzenböck; si elle est seulement supposée complète, on fait appel à un résultat récent de A. KASUE (*cf.* [K]), ou au splitting-theorem de GROMOLL-CHEEGER [C-G].

On en déduit quelques conséquences topologiques (corollaires 9 et 10) et géométriques (corollaires 11 et 12). Enfin viennent quelques remarques que l'auteur a jugées intéressantes.

(*) Texte reçu le 6 septembre 1982, révisé le 10 novembre 1983.

D. MEYER, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, U.E.R. de Mathématiques, Université de Paris-VII, 75251 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/04 359 08/$ 2.80

Je tiens à remercier chaleureusement M. Berger, J. P. Bourguignon et N. Koiso, pour leurs conseils, remarques et références bibliographiques.

Enfin, je veux remercier le referee; par ses remarques, il m'a permis d'améliorer une démonstration de ce texte.

1. Préliminaires topologiques

On désigne par M une variété (toutes les variétés considérées sont paracompactes et de classe C^k, $k \geqslant 1$) de dimension n, connexe et sans bord. Une hypersurface H de M sera une sous-variété plongée, fermée et connexe, sans bord, de codimension 1.

Definition. — Une hypersurface est :
- — *unilatère* si son fibré normal est tordu;
- — *bilatère* si son fibré normal est trivial et si elle disconnecte M;
- — *ambilatère* si son fibré normal est trivial, mais si $M \setminus H$ est connexe.

Tous ces cas se présentent et ce sont les seuls possibles.

Cette distinction n'est pas nouvelle, mais conduit, dans la situation géométrique considérée, à des renseignements intéressants; je remercie J. P. Bourguignon pour la terminologie agréable qu'il m'a proposée.

Exemples. — Les hyperplans projectifs $P^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $P^n(\mathbb{R})$, les sphères équatoriales S^{n-1} dans S^n, les sous-tores facteurs T^{n-1} dans T^n.

Lemme 1. — *Si H est unilatère, il existe un revêtement à deux feuillets $\tilde{M}$ de M dans lequel H se relève en une hypersurface bilatère $\tilde{H}$ de $\tilde{M}$.*

Idée de la preuve. — L'ouvert $M \setminus H$ est connexe (théorème du voisinage tubulaire). Une métrique riemannienne complète étant choisie sur M, on construit le complété W de $M \setminus H$ pour la distance interne : $d(x, y) = \inf \{ \operatorname{long}(c_{x,y}) \mid c_{x,y}$ courbe rectifiable de x à y, tracée dans $M \setminus H \}$. La frontière du complété est l'hypersurface $\tilde{H}$ annoncée, et c'est par construction un revêtement à deux feuillets de H. On recolle deux exemplaires de W le long de $\tilde{H}$ de manière à présenter $\tilde{H}$ localement dans $\tilde{M}$ comme H se présente dans M. □

Lemme 2. — *Si H est ambilatère, il existe un revêtement cyclique infini de M, dans lequel H se relève en une réunion disjointe d'hypersurfaces bilatères homéomorphes à H, qui sont échangées par le groupe de revêtement.*

Démonstration analogue.

COROLLAIRE 3 (*cf.* [Hi], p. 107, th. 4.6). — *Si M est simplement connexe, toute hypersurface est bilatère.*

COROLLAIRE 4. — *Si $\pi_1(M)$ est un groupe fini, il n'y a pas, dans M, d'hypersurface ambilatère et deux hypersurfaces unilatères s'intersectent nécessairement.*

COROLLAIRE 5. — *Si M contient une hypersurface ambilatère H, il existe une variété connexe à bord (W, $\partial W = H_1 \amalg H_2$), où H_1 et H_2 sont deux exemplaires de H, et un difféomorphisme $\varphi : H_1 \to H_2$, tels que M s'obtienne par recollement des deux composantes du bord de W via φ.*

Terminons ce paragraphe par deux énoncés dont nous laissons aussi les démonstrations au lecteur.

LEMME 6. — *Si $(W, \partial W)$ est une variété connexe à bord, non orientable (i. e. $\mathring{W}$ non orientable), il existe un revêtement à deux feuillets $(\tilde{W}, \partial\tilde{W})$ qui est connexe et orientable et dont le bord $\partial\tilde{W}$ est un revêtement de ∂W.*

LEMME 7. — *Si M est compacte et à $\pi_1(M)$ fini, on a :*

$$H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^k \equiv [H_1(M; \mathbb{Z}_2)]^*.$$

Indication de preuve. — Pour le lemme 6, considérer le double au sens de [Gr], p. 184; pour le lemme 7, travailler avec un revêtement à deux feuillets orientable de M. $\square$

2. **Un lemme riemannien**

A partir de maintenant et pour des raisons de simplicité, toutes les variétés seront supposées C^∞.

LEMME 8. — *Soit $((W, \partial W), g)$ une variété compacte, connexe, riemannienne à courbure de Ricci $\geqslant 0$, dont le bord lisse est formé d'au moins deux composantes connexes minimales. Alors $((W, \partial W), g)$ est isométrique à un produit riemannien $(H \times [0, 1], g' \times \alpha^2\, dt^2)$. En particulier H est connexe et totalement géodésique.*

Preuve. — Supposons W orientable (sinon on applique le lemme 6). D'après l'hypothèse $H_1(W, \partial W; \mathbb{R})$ est $\neq 0$. D'autre part, d'après la théorie de Hodge à bord (*cf.* [D-S], p. 151, th. 8.1), il existe une 1-forme ϕ telle que $d\phi = \delta\phi = 0$ et $i_*\phi = 0$; où i est le plongement canonique de ∂W dans W. On peut donc écrire la formule de Weitzenböck :

$$(*) \qquad 1/2\,\Delta(|\phi^2) + |\nabla\phi|^2 + \mathrm{Ric}(\phi, \phi) = 0.$$

Mais un calcul direct (*cf.* aussi [Hs]) montre que :

$$1/2\int_W \Delta(|\phi|^2) = -\int_{\partial W} \mathrm{trace}(h)\,|\phi|^2,$$

où $h(x, y) = \langle \nabla_x \nu, y \rangle$ et où ν est le champ de vecteurs normaux rentrants; enfin ∇ désigne la dérivée covariante associée à g. Par intégration de $(*)$ sur W on obtient donc le résultat annoncé, puisque $\nabla\phi = 0$. □

Remarque A. — Le résultat ci-dessus est encore vrai si $\mathrm{trace}(h) \leqslant 0$ sur ∂W, donc en particulier si W est localement convexe.

Remarque B. — Par des techniques proches de celle de GROMOLL et CHEEGER, et indépendamment de l'auteur, A. KASUE (*cf.* [K]) *vient de montrer le résultat ci-dessus en supposant seulement W complète et l'une des hypersurfaces bordantes compacte.* Cette dernière hypothèse est essentielle, *cf.* [K].

3. **Résultats**

La variété riemannienne (M, g) est toujours supposée *complète* dans ce paragraphe. Les hypersurfaces considérées dans ce paragraphe vérifient les hypothèses énoncées au début du paragraphe 1 et seront donc complètes, elles aussi.

THÉORÈME A (folk.). — *Si (M, g) est à courbure de Ricci >0, deux hypersurfaces minimales, dont l'une est compacte, s'intersectent nécessairement.*

Rappelons d'autre part le théorème de Myers qui assure que $\pi_1(M)$ est fini si la courbure de Ricci est bornée inférieurement par une constante strictement positive; à rapprocher du corollaire 4.

Idée de la preuve. — On peut appliquer le lemme 8, et la version de la remarque B si l'on ne sait pas que M est compacte. On peut aussi faire un raisonnement proche de ceux de [F] : on considère un plus court chemin joignant une hypersurface à l'autre et on trace, sur les directions orthogonales à ce chemin, dans la formule de la variation seconde (*cf.* [G-K-M], p. 126(13)); en s'appuyant sur la minimalité des hypersurfaces et la variation première, on aboutit à la contradiction cherchée. □

THÉORÈME B. — (Bochner-Cheeger-Gromoll *revisités*). *Supposons que* (M, g) *soit à courbure de Ricci* $\geqslant 0$. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *dans* (M, g), *il existe une hypersurface ambilatère compacte* F;

(ii) *dans* (M, g), *il existe une hypersurface ambilatère compacte et minimale* H;

(iii) *la variété* (M, g) *est un fibré localement trivial sur* S^1, *qui est localement isométrique à* $(H \times [0, 1], g' \times \alpha^2\, dt^2)$ *et dont l'application de recollement est une isométrie de* H, *qui est supposée compacte.*

Remarque. — En particulier, sous les hypothèses du théorème B, une hypersurface ambilatère et minimale est totalement géodésique.

Preuve. — La seule implication à montrer est (i) $\Rightarrow$ (iii). Par le lemme 2, il existe un revêtement cyclique infini $\tilde{M}$ de M. Soit x un point de F et $\tilde{x}$ un relevé de x. Soit γ un générateur du groupe de revêtement. Alors, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $\{\delta_n\}$, où δ_n désigne un plus court chemin joignant $\gamma^n \tilde{x}$ à $\gamma^{-n} \tilde{x}$; la limite est une droite δ au sens de CHEEGER et GROMOLL [C-G] (utiliser la compacité de F). La variété $(\tilde{M}, \tilde{g})$ se décompose en le produit riemannien $(\tilde{H} \times \mathbb{R}, g' \times \alpha^2\, dt^2)$. Puisque tout relevé $\tilde{F}$ de F disconnecte M, il est facile de voir que $\tilde{F}$ se projette surjectivement sur $\tilde{H}$, qui est compacte.

La droite δ, qui est de la forme $\{\tilde{h}_0 \times t,\ t \in \mathbb{R}\}$ est transformée par γ en une droite de la forme $\{\tilde{h}_1 \times (t + t_1),\ t \in \mathbb{R}\}$; *indication* : les segments géodésiques $\gamma(\delta_n)$ forment un angle constant α_n avec le champ parallèle $\partial/\partial t$; d'autre part, si $\gamma^n \tilde{x} = (\tilde{h}_n, t_n)$ et $\gamma^{-n} \tilde{x} = (\tilde{h}'_n, t'_n)$, alors, puisque $d(\gamma^n \tilde{x}, \gamma^{-n} \tilde{x}) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, on voit que $|t_n - t'_n| \to \infty$, lorsque $n \to \infty$. Or, on a l'inégalité évidente :

$$|t_n - t'_n| + \operatorname{diam}(\tilde{H}) \geqslant \operatorname{long}(\gamma(\delta_n)) = (\cos \alpha_n)^{-1} |t_n - t'_n|,$$

d'où l'on tire que $\alpha_n \to 0$, lorsque $n \to \infty$. Le facteur $\tilde{H} \times s$ s'envoie isométriquement sur le facteur $\tilde{H} \times (s + t_1)$; et γ est donc de la forme :

$$\gamma : \quad (\tilde{h}, t) \to (\theta(\tilde{h}), t + t_1),$$

où θ est une isométrie de $\tilde{H}$. $\square$

THÉORÈME C. — *Si* (M, g) *est à courbure de Ricci* $\geqslant 0$ *et si* H *et* F *sont deux hypersurfaces minimales, dont l'une est compacte, telles que* $H \cap F = \emptyset$, *alors* H *et* F *sont des translatées l'une de l'autre dans le sens suivant : elles bordent une variété cylindrique* $((W, \partial W), g) = (H \times [0, 1], g' \times \alpha^2\, dt^2)$.

Preuve. — En appliquant auparavant, si nécessaire, les constructions décrites aux lemmes 1 et 2, on obtient grâce au lemme 8, et par passage à la limite, le résultat annoncé (on a recours au résultat de KASUE, remarque B, dans le cas général où M n'est pas supposée compacte). □

COROLLAIRE 9. — *Une variété (M, g) à courbure de Ricci $\geqslant 0$ qui admet une hypersurface ambilatère compacte est compacte.*

COROLLAIRE 10. — *Étant donnée une variété M, de dimension paire, compacte, et telle que $\chi(M) \neq 2$, la variété obtenue en lui attachant une anse $I \times S^{n-1}$ n'admet pas de métrique à courbure de Ricci $\geqslant 0$.*

COROLLAIRE 11. — *Soit (T^n, g) un tore plat. Soit H une hypersurface minimale; on a les équivalences :*

(i) *H n'est pas totalement géodésique;*

(ii) *toute hypersurface minimale F rencontre H;*

(iii) *aucun champ de vecteurs parallèles n'est partout transverse à H.*

Tous ces corollaires découlent immédiatement des théorèmes B ou C. Le corollaire 10 découle aussi bien du théorème de Bochner et du lemme 2, que du théorème B. Compte tenu du théorème d'existence de [La], p. 51, et des théorèmes B et C, on a le :

COROLLAIRE 12. — *Soit (M, g) une variété de dimension $\leqslant 7$, compacte, à courbure de Ricci $\geqslant 0$; toute classe d'homologie $\alpha \in H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ est représentable par une hypersurface minimale plongée (lisse!) H_α et un entier n_α, t. q. $n_\alpha H_\alpha \in \alpha$.*

Il est intéressant de rapprocher ce résultat du lemme 7, lorsque Ric >0; alors H_α est de plus unilatère (corollaire 4) et $n_\alpha = \pm 1$.

4. Remarques diverses

(*a*) Un produit tordu $(S^2 \times S^2, g_0 \times \varphi^2 g_0)$, où la fonction différentiable φ est du type

$$\varphi : \quad (x, y) \to \varphi(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

et où g_0 est la métrique standard de S^2, contient une famille à deux paramètres de surfaces totalement géodésiques, bien que, pour un choix convenable de φ, la métrique ainsi définie soit à courbure de Ricci >0. Ceci exclut une généralisation du théorème A en codimension 2, et à courbure de Ricci >0.

(*b*) Les constructions métriques dues à J. Cheeger et à D. Page et L. Bérard Bergery (*cf.* [Be]; ch. XIV et XV, et aussi [BB]) introduisent aux « extrémités », de manière canonique, deux surfaces totalement géodésiques disjointes; *ce type de constructions ne fournira donc jamais*, à lui seul, *une métrique à courbure sectionnelle strictement positive*, d'après le théorème 1 de [F].

(*c*) Sous des hypothèses ponctuelles *raisonnables* sur le bord, la méthode de Hodge-de Rham (à bord) ne peut fournir des théorèmes d'annulation des nombres de Betti relatifs b_p, $2 \leqslant p \leqslant n-1$. En effet, soit $S^1 \times S^1$ un tore minimal (de Clifford) dans (S^3, can); ce tore borde une variété qui, du point de vue topologique est le produit $S^1 \times D^2$; il est clair que $H_2(W, \partial W; \mathbb{R}) \neq 0$, et pourtant W est muni, comme sous-variété de (S^3, can) de la métrique la plus positive qui soit. Cet exemple se généralise facilement.

(*d*) La situation qui nous intéresse est très différente de celle de la géométrie complexe : l'intersection géométrique de deux hypersurfaces même minimales représentant des cycles non triviaux d'un espace lenticulaire, n'implique pas que l'intersection en homologie des cycles correspondants soit non nulle, comme me l'a indiqué J. Lannes.

(*e*) J. P. Bourguignon m'a signalé que, lorsque M est supposée analytique, on peut faire du lemme 8 une démonstration dans l'esprit de celle du théorème A (*cf.* [Bo]).

(*f*) Le travail de G. J. Galloway [Ga] est relié à celui-ci.

BIBLIOGRAPHIE

[BB] Bérard Bergery (L.). — A paraître.

[Be] Besse (A.). — Géométrie riemannienne en dimension 4, Textes Maths., Cedic, Paris, 1981.

[Bo] Bourguignon (J. P.). — Sur les géodésiques fermées des variétés quaternioniennes de dimension 4, *Math. Ann.*, vol. 221, 2, 1976, p. 153-166.

[C-G] Cheeger (J.) and Gromoll (D.). — The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. diff. géom.*, vol. 6, 1972, p. 119-128.

[D] Duff (G.). — Differential forms on manifolds with boundary, *Ann. of Math.*, vol. 56, n° 1, 1952, p. 115-127.

[D-S] Duff (G.) and Spencer (D. C.). — Harmonic tensors on Riemannian manifolds with boundary, *Ann. of Math.*, vol. 56, 1952, p. 128-156.

[F] Frankel (T.). — Manifolds with positive curvature, *Ann. of Math.*, 1961, p. 165-174.

[Ga] Galloway (G. J.). — Some results on the occurence of compact minimal submanifolds, *Man. Math.*, vol. 35, n° 1, 1981, p. 209-219.

[Gr] GREENBERG (M.). — Algebraic topology, W. Benjamin, New York.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) und MEYER (W.). — Riemannsche Geometrie im Groβen, Springer lect. notes n° 55, 1968.

[Hi] HIRSCH (M.). — Differential topology, GTM Springer.

[Hs] HSIUNG (C. C.). — Curvature and homology of Riemannian manifolds with boundary, *Math. Zeit.*, vol. 82, 1963, p. 67-81.

[K] KASUE (A.). — Preprint, Tokyo Hongo University, 1981.

[La] LAWSON (H. B.). — Minimal varieties in real and complex geometry, SMS Montréal n° 57, 1974.