BULLETIN DE LA S. M. F.

E. FORTUNA

M. GALBIATI

Quelques résultats sur les ensembles Nash sous-analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 347-358

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__347_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 347-358

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES ENSEMBLES NASH SOUS-ANALYTIQUES

Par

E. FORTUNA (**) et M. GALBIATI (**)

RÉSUMÉ. — On étudie les applications analytiques réelles propres à image Nash sous-analytique; en particulier, on donne des conditions pour la semi-analyticité d'une telle image. On donne aussi une caractérisation des Nash sous-analytiques qui sont en effet semi-analytiques, de la quelle on déduit des renseignements sur l'ensemble des points où un sous-analytique n'est pas semi-analytique (ou n'est pas Nash sous-analytique).

ABSTRACT. — Real analytic proper maps having Nash subanalytic images are studied: namely, the authors give a caracterisation of such maps and give conditions under which the image is in fact semi-analytic. The paper contains also a caracterisation for the semi-analyticity of a Nash subanalytic and some remarks about the set of points where a subanalytic set is not semi-analytic (or non-Nash, respectively).

Introduction

Une application analytique réelle propre a une image sous-analytique fermée; d'ailleurs un sous-ensemble sous-analytique fermé peut toujours être considéré comme image d'une application analytique réelle propre [7]. On peut donc se placer de deux points de vue différents :

(A) Étude de l'image des applications analytiques réelles propres; en particulier on peut chercher des conditions pour qu'une telle application ait une image semi-analytique, ou Nash sous-analytique.

(B) Étude directe d'un sous-analytique fermé D; en particulier, si l'on appelle

$$D_{ns} = \{ x \in D \mid D_x \text{ n'est pas semi-analytique} \},$$

$$D_{nN} = \{ x \in D \mid D_x \text{ n'est pas Nash sous-analytique} \},$$

(*) Texte reçu le 18 janvier 1984, révisé le 5 juillet 1985.

(**) E. FORTUNA et M. GALBIATI, sont associés au groupe G.N.S.A.G.A. du C.N.R. Recherche partiellement financée par M.P.I. *Adresse des auteurs :* Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, via Buonarroti, 2, I. 56100 Pisa, Italie.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/04 347 12/$ 3.20

est-ce que les deux sous-ensembles ainsi définis sont sous-analytiques dans D ?

Pour le problème posé dans (A), on rappelle que l'on a déjà obtenu des résultats qui essentiellement lient la structure de l'image d'une application analytique réelle propre $f: X \to Y$ avec des propriétés d'une complexification de f: si f a une complexification propre [5], ou si f a une complexification semi-propre (avec une propriété supplémentaire) [4], alors $f(X)$ est sous-analytique dans Y.

Dans cet article on étudie les conditions sur une complexification de f pour que l'image soit Nash sous-analytique en un point (§ 2). On obtiendra aussi des conditions de semi-analyticité de l'image qui portent exclusivement sur la structure réelle de l'application f et des espaces considérés (§ 3). D'autres conditions de semi-analyticité pour un Nash sous-analytique sont l'objet du paragraphe 4, où on ne regarde plus le sous-analytique comme image d'une application donnée.

Pour ce qui concerne le problème énoncé dans (B), la question de la sous-analyticité de D_{ns} a été posée il y a longtemps par Hironaka; celle sur D_{nN} a pour origine l'étude de certains problèmes d'analyse différentielle (*voir* [2], [3], où les Nash sous-analytiques ont été introduits). Dans le paragraphe 5 on aborde l'étude de ces deux sous-ensembles D_{ns} et D_{nN}, on souligne le lien entre les deux, et on donne comme facile conséquence de ces considérations la réponse aux questions dans certains cas particuliers.

Nous tenons à remercier le Referee pour le soin qu'il a apporté à la lecture du manuscrit; grâce à ses suggestions on a pu, en particulier, simplifier la démonstration du théorème 3.1.

1. Préliminaires

Pour la théorie des espaces analytiques réels on renvoie à [6]. On précise seulement que ici un espace analytique sera toujours denombrable à l'infini. Pour une exposition détaillée de la théorie des ensembles sous-analytiques on renvoie à [7]. Il nous faut d'ailleurs préciser ici quelques résultats :

THÉORÈME 1.1 [9]. — *Soit D un sous-ensemble sous-analytique dans un espace analytique réel Y. Alors, pour tout $j=0, \ldots, k$, avec $k=\dim D$, le sous-ensemble de D*

$$r^j(D)=\{x \in D \mid D_x \text{ est le germe d'une variété analytique réelle de dimension } j\}$$

est un sous-analytique de D.

Remarque 1.2. — De 1.1 on déduit que

$$D - \bigcup_{j=0}^{k} r^j(D)$$

(que l'on appellera sing D) est aussi sous-analytique dans D. On remarque encore que, si l'on appelle

$$D^j = \overline{r^j(D)},$$

alors $D^j \cap \operatorname{sing} D \supset \operatorname{sing} D^j$, si D est fermé. Remarquons enfin que si X est un espace analytique réel, il existe (*cf.* [6] ou [7]) un sous-espace analytique réel fermé de X, noté Sing X, tel que $X - \operatorname{Sing} X$ est semi-analytique en X de dimension pure $= \dim X$, $\dim \operatorname{Sing} X < \dim X$, et sing X est contenu dans le support de Sing X.

Rappelons maintenant la définition d'ensemble Nash sous-analytique ([2], [3]) :

DÉFINITION 1.3. — Soit D un sous-ensemble sous-analytique fermé d'un espace analytique réel Y. Soit $y \in D$ et supposons que la dimension de D soit constante en tout point d'un voisinage de y dans Y. On dit que D est Nash sous-analytique en y (ou que D_y est Nash) si le plus petit germe en y de sous-espace analytique réel de Y au voisinage de y qui contient D_y, disons-le Z_y, est tel que $\dim Z_y = \dim D_y$. Si D est de dimension pure, on dit que D est Nash s'il est Nash en tout point de D. Si D n'est pas de dimension pure, on dit que D est Nash s'il est réunion localement finie de sous-analytiques fermés de dimension pure, qui sont Nash.

Exemple 1.4. — Soit E un sous-ensemble semi-analytique compact et non semi-algébrique de dimension pure n dans $R^n \times \{1\}$ dans R^{n+1}. Considérons le cône $C(E)$ sur E de sommet 0 dans R^{n+1}. On sait [8] que $C(E)$ est sous-analytique et non semi-analytique en 0. $C(E)$ est d'ailleurs Nash.

Exemple 1.5. — Soit $f: R^2 \to R^3$, $f(x, y) = (x, xy, xe^y)$. Soit B une boule fermée centrée à l'origine de R^2. On démontre [8] que $f(B)$ est sous-analytique de dimension 2 et non semi-analytique en 0 de R^3. Pour démontrer cette assertion on remarque que le plus petit analytique qui contient $f(B)$ au voisinage de 0 est R^3, donc $f(B)$ n'est pas Nash en 0.

LEMME 1.6. — *Soit D un sous-ensemble sous-analytique fermé dans un espace analytique réel Y, Nash en un point y. Soit* $\dim D_y = k$. *Alors les sous-analytiques D^j définis dans* 1.2 *sont Nash en y.*

Démonstration. — D_y étant Nash au voisinage de y, D est réunion finie de sous-analytiques Nash en y de dimension pure; soient $A_0, \ldots, A_k$ (où $\dim A_j = j$ si $A_j \neq \emptyset$). Pour avoir le résultat il suffit de remarquer que, au voisinage de y, $r^j(D) \subset A_j$ et donc que $D^j \subset A_j$, pour tout j. Vu que A_j est Nash en y, D^j l'est aussi.

2. Approche complexe du problème A

On veut lier la structure de l'image d'une application analytique réelle propre $f: X \to Y$ avec des propriétés d'une complexification de f.

PROPOSITION 2.1. — *Soit $f: X \to Y$ une application analytique réelle propre, $y \in f(X)$. Supposons que le sous-analytique fermé $f(X)$ soit de dimension pure au voisinage de y. Alors $f(X)$ est Nash en y si et seulement si f vérifie la propriété suivante :*

(2.1.1) *il existe :*

(i) *des voisinages ouverts V de y dans Y et U de $f^{-1}(y)$ dans X, avec $f(U) \subset V$,*

(ii) *une complexification*

$$\tilde{f}_U: \quad (X \cap U)^{\sim} \to (Y \cap V)^{\sim},$$

de

$$f_U: \quad X \cap U \to Y \cap V,$$

(iii) *un sous-espace analytique complexe $\tilde{Z}$ de $(Y \cap V)^{\sim}$*
tels que :

(*a*) $\tilde{Z}_y \supset (\tilde{f}_U(X \cap U)^{\sim})_y$,

(*b*) $\dim \tilde{Z}_y = \dim f(X)_y$.

Démonstration. — Si f vérifie (2.1.1), $f(X)$ est évidemment Nash en y : il suffit de considérer le germe en y de la partie réelle de $\tilde{Z}$, que l'on peut supposer invariant par l'auto-conjugaison de $(Y \cap V)^{\sim}$.

Pour la réciproque : si $f(X)$ est Nash en y, soit Z_y le germe analytique en y donné par la définition de Nash. Soit $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ une complexification arbitrairement choisie de f et appelons $\tilde{Z}_y$ la complexification de Z_y dans $\tilde{Y}_y$. Soit $\tilde{Z}$ une réalisation de $\tilde{Z}_y$ dans un voisinage ouvert $\tilde{V}$ (invariant par l'auto-conjugaison de $\tilde{Y}$) de y en $\tilde{Y}$, et soit $\tilde{Z}' = \tilde{f}^{-1}(\tilde{Z}) \subset \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{V})$. L'application $\tilde{f}|_{\tilde{Z}'}: \tilde{Z}' \to \tilde{Z}$ est une complexification de f au voisinage de $f^{-1}(y)$ et de y.

Quitte à restreindre $\tilde{V}$ de façon que $f(X) \cap \tilde{V}$ soit de dimension pure, on a

$$\dim \tilde{Z}_y = \dim Z_y = \dim f(X)_y = \dim (f(X) \cap \tilde{V}).$$

3. Des critères de semi-analyticité

On va donner maintenant des conditions sur une application analytique réelle propre f pour que l'image soit semi-analytique, sans rien supposer sur une complexification de f. Le théorème suivant est analogue au théorème de complexification semi-propre (*voir* [4]), mais sa démonstration est bien plus simple.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $f: X \to Y$ une application analytique réelle propre, et soit $y \in f(X)$. Supposons que, pour tout sous-espace analytique réel fermé T de X (y compris X), le germe $f(T)_y$ soit Nash. Alors $f(X)$ est semi-analytique en y.*

Remarque 3.1.1. — Dans l'énoncé du théorème 3.1 on pouvait supposer seulement que :

($*$) $f(X)$ est Nash en y et pour tout sous-espace analytique réel fermé T de X tel que $\dim f(T) < \dim f(X)$, $f(T)_y$ est Nash.

En effet, soit ($*$) vraie et soit T un sous-espace analytique réel fermé de X tel que $\dim f(T) = \dim f(X) = p$. Démontrons que $f(T)$ est Nash en y. Considérons la filtration lisse de T en sous-espaces analytiques réels fermés de T, $T_0 = T$, $T_{i+1} = \operatorname{Sing} T_i$. Par récurrence sur i (les T_i étant vides pour i assez grand), on peut supposer que $f(T_{i+1})$ soit Nash en y et que $\dim f(T_i) = p$.

Alors, on a :

$$f(T_i) = f(T_i)^{(p)} \cup f(J(T_i)) \cup f(T_{i+1}),$$

où $f(T_i)^{(p)}$ est le Nash sous-analytique formé des points de $f(T_i)$ de dimension p, et $J(T_i)$ est un sous-espace analytique réel fermé de T_i tel que $\dim f(J(T_i)) < p$, la restriction de f à $T_i - (J(T_i) \cup T_{i+1})$ étant de rang constant p. Donc $f(T_i)$ est évidemment Nash en y.

Démonstration de 3.1. — On procède par récurrence sur la dimension de $f(X)$. Le résultat est évidemment vrai si $\dim f(X) = 0,1$. Supposons donc $\dim f(X) = p$.

On considère la filtration lisse de X en sous-espaces analytiques réels fermés définie par

$$X = X_0, \qquad X_{i+1} = \mathrm{Sing}\ X_i.$$

On va montrer, par récurrence sur i, que les $f(X_i)$ sont semi-analytiques en y. En effet, il existe un indice i_0 tel que $X_{i_0} = \varnothing$ et donc le résultat est vrai pour i_0. Supposons alors que $f(X_{i+1})$ soit semi-analytique en y et considérons $f(X_i)$. Remarquons qu'on peut supposer que $\dim f(X_i) = p$.

Rappelons qu'il existe J_i, sous-espace analytique réel fermé de X_i, tel que f est de rang p en tout point x de $X_i - (X_{i+1} \cup J_i)$ et $\dim f(J_i) < p$. Donc $f(J_i)$ est semi-analytique en y par récurrence.

Vu que

$$f(X_i) = B_i \cup \overline{(f(X_i) - B_i)},$$

où $B_i = f(J_i) \cup f(X_{i+1})$ est semi-analytique en y, grâce aux hypothèses de récurrence, il suffit de démontrer que $\overline{f(X_i) - B_i}$ est semi-analytique en y.

Évidemment, on peut supposer que $y \in \overline{f(X_i) - B_i}$, autrement il n'y a rien à montrer.

Par hypothèse, $f(X_i)$ est Nash en y; soit donc Z_i un représentant, dans un voisinage ouvert assez petit V de y dans Y, du plus petit germe analytique en y qui contient $f(X_i)_y$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que, dans V, $Z_i \supset f(X_i)$ et $\dim Z_i = p$.

Remarquons que $f(X_i) - (B_i \cup \mathrm{Sing}\ Z_i)$ est semi-analytique dans Z_i (et donc dans Y), étant ouvert et fermé dans $Z_i - (B_i \cup \mathrm{Sing}\ Z_i)$.

Par ailleurs, toujours en travaillant dans V,

$$\overline{f(X_i) - (B_i \cup \mathrm{Sing}\ Z_i)} = \overline{f(X_i) - B_i},$$

$f(X_i) - B_i$ étant analytique réel de dimension pure p dans $Z_i - B_i$.

Donc $f(X_i)$ est semi-analytique en y.

On se place maintenant dans des situations particulières dans les quelles on peut obtenir le résultat de semi-analyticité de l'image avec des hypothèses plus maniables. Le théorème suivant, qui pourrait évidemment être énoncé localement en Y, a aussi l'avantage d'avoir une démonstration directe et d'ailleurs très simple.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $f : X \to Y$ analytique réelle propre, $f(X)$ Nash sous-analytique de dimension pure. Soit J un sous espace analytique réel* *fermé de X tel que* $\dim f(J) < \dim f(X)$ *et f de rang constant sur* $X - (\text{Sing } X \cup J)$. *Supposons que $f(J)$ et $f(\text{Sing } X)$ soient Nash et que* Sing X *vérifie une des deux hypothèses suivantes :*

(a) $\dim f(\text{Sing } X) < \dim f(X)$;

(b) $f(\text{Sing } X)$ *est semi-analytique dans Y.*

Alors $f(X)$ est semi-analytique dans Y.

Démonstration. — Soit $y \in f(X)$ et soient Z, Z_1, Z_2 des représentants dans un voisinage convenable de y dans Y des germes analytiques relatifs respectivement aux sous-analytiques $f(X)$, $f(J)$, $f(\text{Sing } X)$, qui sont Nash en y. Ici, les deux derniers sous-ensembles peuvent ne pas être de dimension pure en y; en ce cas Z_1 et Z_2 sont représentants de la réunion des germes analytiques relatifs aux Nash sous-analytiques en y de dimension pure dont $f(J)_y$ et $f(\text{Sing } X)_y$ sont réunion finie.

Dans le cas (a), soient

$$B = Z_1 \cup Z_2 \cup \text{Sing } Z,$$
$$A = f(X) - B;$$

A est semi-analytique dans Z (et donc dans Y), étant ouvert et fermé dans $Z - B$, toujours au voisinage de y dans Y, où d'ailleurs $f(X) = \bar{A}$, et l'on a la thèse dans ce cas.

Dans le cas (b), et si $\dim f(\text{Sing } X)_y = \dim f(X)_y$, disons

$$B_1 = Z_1 \cup f(\text{Sing } X) \cup \text{Sing } Z,$$
$$A_1 = f(X) - B_1.$$

Alors, comme dans le cas (a), dans un voisinage de y, A_1 est semi-analytique et $f(X) = \bar{A}_1 \cup f(\text{Sing } X)$. Le théorème est alors complètement démontré.

4. Conditions de semi-analyticité pour un Nash sous-analytique

On quitte maintenant la direction (A) de l'introduction et on passe à une étude directe des sous-analytiques. Dans ce paragraphe on examinera le cas Nash sous-analytique; les résultats qui suivent seront utilisés dans le paragraphe 5 pour l'étude des sous-ensembles D_{ns} et D_{nN} définis dans l'introduction. Tous les énoncés sont donnés globalement, mais il est facile d'en considérer une version locale. En effet, c'est dans ce sens qu'on les utilisera dans le paragraphe 5.

THÉORÈME 4.1. — *Soit D un sous-analytique fermé de dimension pure dans un espace analytique réel Y. Soit D_1 un sous-analytique fermé de Y tel que $D_1 \subset D$,* dim $D_1 <$ dim D *et $D - D_1$ est lisse. Alors, si D et D_1 sont Nash, D est en fait semi-analytique.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la semi-analyticité de D en tout point de D_1; soit donc $y \in D_1$. La méthode de démonstration est tout à fait analogue à celle de 3.2 : soient Z et Z_1 des représentants au voisinage de y des germes analytiques relatifs à D et D_1, qui sont Nash en y. Alors, au voisinage de y,

$$B = D - (Z_1 \cup \operatorname{Sing} Z)$$

est semi-analytique dans Z et $D = \bar{B}$.

Le théorème 4.1 implique comme corollaire un résultat qui nous sera très utile dans la suite.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit D Nash de dimension pure k dans Y. Alors D est semi-analytique si et seulement si sing D est Nash.*

Démonstration. — Si sing D est Nash, il suffit d'appliquer 4.1 à D, avec $D_1 = \operatorname{sing} D$. L'autre implication est évidente.

Le théorème 4.1 peut être généralisé :

THÉORÈME 4.3. — *Soit D Nash dans Y,* dim $D = k$. *Soit D_1 un sous-analytique fermé dans Y, $D_1 \subset D$, $D - D_1 \subset r^k(D)$. Si D_1 est semi-analytique, alors D est semi-analytique.*

Démonstration. — On procède toujours de la même façon : soit $y \in D$ et, avec les notations habituelles, appelons

$$A = D - (\operatorname{Sing} Z \cup D_1).$$

Au voisinage de y, A est semi-analytique en Z et $\bar{A} \cup D_1 = D$.

Cette dernière assertion est presque évidente : il suffit de remarquer que, si $x \in D - D_1$, $x \in r^k(D)$; mais

$$r^k(D) \subset \overline{D - \operatorname{Sing} Z} \subset \bar{A} \cup D_1.$$

Vu que $x \notin D_1$, $x \in \bar{A}$.

Analoguement à 4.2, on obtient :

COROLLAIRE 4.4. — *Soit D sous-analytique Nash dans Y. D est semi-analytique si et seulement si* sing D *est semi-analytique.*

Démonstration. — Considérons les sous-analytiques de dimension pure D^j définis dans 1.2. D étant Nash, grâce à 1.6, pour tout j, D^j est Nash. Comme sing $D \supset \text{sing}\, D^j$, il suffit d'appliquer 4.3 à $D^j \cup \text{sing}\, D$, avec $D_1 = \text{sing}\, D$.

On peut maintenant retrouver le résultat suivant :

THÉORÈME 4.5 (Bierstone). — *Soit D un Nash sous-analytique dans Y. Supposons qu'il existe une filtration de D*

$$D = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_r,$$

telle que :

(1) *D_i est un Nash sous-analytique dans Y, pour tout $i = 0, \ldots, r$.*

(2) dim $D_i >$ dim D_{i+1}, *pour tout $i = 0, \ldots, r-1$.*

(3) *$D_i - D_{i+1}$ est lisse de dimension pure* $=\dim D_i$, *pour tout $i = 0, \ldots, r-1$, et D_r est lisse.*

Alors D est semi-analytique dans Y.

Démonstration. — Par récurrence sur i on se réduit à la situation du théorème 4.3 (D_r, étant lisse et fermé, est semi-analytique dans Y.)

5. Commentaires sur D_{ns} et D_{nN}

Rappelons le problème B de l'introduction : si D est un sous-analytique fermé dans un espace analytique réel Y, il s'agit d'étudier les sous-ensembles

$$D_{ns} = \{x \in D \mid D_x \text{ n'est pas semi-analytique}\},$$
$$D_{nN} = \{x \in D \mid D_x \text{ n'est pas Nash}\}$$

Les conjectures annoncées sont donc :

CONJECTURE 1 (Hironaka). — Pour tout sous-analytique fermé D, l'ensemble D_{ns} est sous-analytique.

CONJECTURE 2 (Bierstone, Milman, Schwarz). — Pour tout sous-analytique fermé D, l'ensemble D_{nN} est sous-analytique.

Commençons l'étude de D_{ns} et D_{nN} en remarquant que, évidemment, on a :

(5.1.1) $$D_{nN} \subset D_{ns} \subset \text{sing}\, D$$

et

$$(5.1.2)\qquad (\operatorname{sing} D)_{ns} \subset D_{ns}.$$

On veut utiliser les résultats du paragraphe 4 pour obtenir des renseignements sur D_{ns} et D_{nN}, et sur le lien entre les deux conjectures. En fait les résultats principaux 4.1 et 4.2 sont valables dans le cas où D est de dimension pure. Mais on peut toujours, pour notre problème, se réduire à cette situation; en effet, si D ne l'est pas, on a que

$$D_{ns} = \bigcup_j (D^j)_{ns},$$
$$D_{nN} = \bigcup_j (D^j)_{nN},$$

avec les notations de 1.2. Pour la deuxième égalité, *voir* 1.6.

On obtient alors, comme corollaire de 4.2 et 4.4, le résultat suivant qui nous sera très utile dans la suite :

COROLLAIRE 5.2. — *Si D est un sous-analytique fermé de dimension pure dans un espace analytique réel Y, alors*

$$(5.2.1)\qquad D_{ns} = D_{nN} \cup (\operatorname{sing} D)_{nN},$$

$$(5.2.2)\qquad D_{ns} = D_{nN} \cup (\operatorname{sing} D)_{ns}$$

Dans le cas Nash,

$$(5.2.3)\qquad D_{ns} = (\operatorname{sing} D)_{nN} = (\operatorname{sing} D)_{ns}.$$

Le résultat (5.2.1) nous permet de déduire de façon évidente :

PROPOSITION 5.3. — *Si la conjecture* 2 *est vraie, la conjecture* 1 *l'est aussi.*

COROLLAIRE 5.4. — *Sous les hypothèses de* 5.2, *on a que*

$$D_{nN} \supset (\operatorname{sing} D)_{ns} - (\operatorname{sing} D)_{nN}.$$

Démonstration. — Si $y \in (\operatorname{sing} D)_{ns}$, $y \in D_{ns}$. Mais alors, si $(\operatorname{sing} D)_y$ est Nash, D_y ne peut pas l'être, parce que D_y serait alors semi-analytique (4.2), contre l'hypothèse.

On veut maintenant voir quels renseignements ultérieurs on peut obtenir des résultats du paragraphe 3, en regardant D comme l'image d'une application analytique réelle propre, ce qui est toujours possible grâce à :

THÉORÈME 5.5 [7]. — *Soit D un sous-analytique fermé d'un espace analytique réel Y; alors il existe une application analytique réelle propre $f: X \to Y$, telle que :*

(*a*) $f(X)=D$,

(*b*) X est lisse et $\dim X = \dim f(X)$.

Remarque 5.6. — On pourra donc se placer toujours dans la situation suivante : D sous-analytique fermé de dimension pure dans Y, $D=f(X)$, où $f: X \to Y$ est une application qui vérifie les propriétés de 5.5. On pourra aussi supposer que sur chaque composante connexe X_i de X on ait $rk\, f|_{X_i} = rk\, f$.

LEMME 5.7. — *Soit $f: X \to Y$ comme dans 5.6. Alors il existe un sous-espace analytique réel E, fermé, de X, tel que*

(i) $\dim E < \dim X$,

(ii) $\dim f(E) \leqslant \dim f(X) - 2$,

(iii) *la restriction de f à $X - f^{-1}(f(E))$ est un morphisme fini d'espaces analytiques.*

Démonstration. — Soit $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ une complexification de f, où $\tilde{X}$ est lisse, $rk\, \tilde{f} = rk\, f$, et si $\tilde{X}_i$ est une composante irréductible de $\tilde{X}$, $rk\, \tilde{f}|_{\tilde{X}_i} = rk\, \tilde{f}$. On sait alors [1] qu'il existe un sous-espace analytique complexe fermé $\tilde{E}$ de $\tilde{X}$, tel que $\dim \tilde{E} < \dim \tilde{X}$, $rk\, \tilde{f}|_{\tilde{E}} \leqslant rk\, \tilde{f} - 2$, et $\dim (\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)))_x = 0$ pour tout $x \in \tilde{X} - \tilde{E}$. On peut supposer que $\tilde{E}$ soit invariant par l'auto-conjugaison de $\tilde{X}$, et soit E sa partie fixe. On vérifie aisément que E satisfait les propriétés demandées.

On obtient, grâce à 5.7, des résultats qui donnent des renseignements sur la « codimension » de D_{ns} et D_{nN}, et que l'on peut formuler sans hypothèses sur l'équidimensionalité de D.

PROPOSITION 5.8. — *Soit D un sous-analytique fermé dans Y. Alors :*

1. *D_{ns} est contenu dans un sous-analytique fermé de dimension* $\leqslant \dim D - 2$.

2. *Si D est Nash, D_{ns} est contenu dans un sous-analytique fermé de dimension* $\leqslant \dim D - 3$.

Démonstration. — Vu que $D_{ns} = \bigcup_j (D^j)_{ns}$ avec les notations de 1.2, on peut se réduire à supposer D de dimension pure.

1. Soit $f: X \to Y$ comme dans 5.6. Il suffit de remarquer que $D_{ns} \subset f(E)$; en effet si $y \notin f(E)$, D est semi-analytique localement en y, étant l'image d'un analytique par un morphisme fini.

2. Par (5.2.3), $D_{ns} = (\operatorname{sing} D)_{ns}$. Il suffit donc d'appliquer 5.8.1 à sing D.

PROPOSITION 5.9. — *Soit D sous-analytique fermé de dimension pure et $f : X \to Y$ l'application donnée par* 5.5. *Alors $D_{ns} - D_{nN} \subset (f(J))_{nN}$, où J est un sous-espace analytique de X défini comme dans* 3.2.

Démonstration. — Si D_y est Nash et $f(J)_y$ aussi, le résultat suit de 3.2, avec X lisse.

En tant que corollaire de la proposition 5.8, on peut aisément décrire D_{ns} et D_{nN} pour un sous-analytique fermé quelconque de dimension 2.

COROLLAIRE 5.10. — *Soit D un sous-ensemble sous-analytique fermé de dimension* 2 *dans un espace analytique réel Y. Alors, si D est Nash, D est semi-analytique. Si D n'est pas Nash, les ensembles D_{ns} et D_{nN} coïncident et ils sont semi-analytiques de dimension* 0.

De la même façon on obtient :

COROLLAIRE 5.11. — *Soit D Nash sous-analytique de dimension* 3. *Alors D_{ns}, s'il n'est pas vide, est semi-analytique de dimension* 0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) and STOLL (W.). — Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, *Lecture Notes in Mathematics*, No. 234, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.

[2] BIERSTONE (E.) and MILMAN (P.). — Composite differentiable functions, *Ann. Math.*, vol. 116, n° 3, 1982, p. 541-558.

[3] BIERSTONE (E.) and SCHWARZ (G. W.). — Continouos linear division and extension of C^∞ functions, *Duke Math. J.*, vol. 50, n° 1, 1983, p. 233-271.

[4] FORTUNA (E.) et GALBIATI (M.). — Le théorème de complexification semi-propre, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. XXXIII, n° 1, 1983, p. 53-65.

[5] GALBIATI (M.). — Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sc.*, (4), vol. III, n° 2, 1976, p. 311-319.

[6] HIRONAKA (H.). — Introduction to real analytic sets and real analytic maps, *Quaderno C.N.R.Pisa*, Istituto Matematico "L. Tonelli", 1973.

[7] HIRONAKA (H.). — Subanalytic sets. Dans : *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra*, In honour of Y. Akizuki, Tokio, Kinokuniya Pub. 1973.

[8] HIRONAKA (H.). — Stratification and flatness. Dans : *Real and complex singularities*, Oslo 1976, p. 199-265. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1977.

[9] TAMM (M.). — Subanalytic sets in the calculus of variation, *Acta Math.*, vol. 146, 1981, p. 167-199.