BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 182-187

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__182_1>

Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions;
par M. G. HUMBERT.

(Séance du 16 avril 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1)\qquad (x^2-1)y''+2\left[x\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\omega\right]y'-n(n+\alpha+1)y=0,$$

où n et α sont deux nombres entiers tels que $n>0$ et $n+\alpha+1>0$.

En posant

$$\frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{x(2+\alpha)-2\omega}{x^2-1}$$

ou

$$\frac{K'(x)}{K(x)}=\frac{1+\frac{\alpha}{2}-\omega}{x-1}+\frac{1+\frac{\alpha}{2}+\omega}{x+1},$$

ce qui donne

$$K(x)=(x^2-1)^{1+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega},$$

on sait qu'une solution de l'équation (1) est le polynôme de degré n

$$\Theta(x)=\frac{x^2-1}{K(x)}D^n(x^2-1)^{n-1}K(x)$$

ou

$$\Theta(x)=(x^2-1)^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}D^n(x^2-1)^{n+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}.$$

Transformons maintenant l'équation (1) par la substitution

$$y = \frac{x^2 - 1}{K(x)} u;$$

nous trouvons

$$(2) \quad (x^2 - 1)u'' + 2\left[x\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \omega\right]u' - (n + \alpha)(n + 1)u = 0.$$

Cette équation admet comme solution le polynôme de degré $n + \alpha$

$$P(x) = \frac{K(x)}{x^2 - 1} D^{n+\alpha} \frac{(x^2 - 1)^{n+\alpha+1}}{K(x)}$$

ou

$$P(x) = (x^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\omega} D^{n+\alpha} (x^2 - 1)^{n+\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{\omega}.$$

Par conséquent, $P(x)$ et $\frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x)$ sont deux solutions de l'équation (2).

Sans chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles soient distinctes, je remarque qu'elles le seront nécessairement si $\frac{K(x)}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction rationnelle, car $P(x)$ est un polynôme entier et $\frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x)$ n'est pas un polynôme, dans le cas supposé.

Or

$$\frac{K(x)}{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\omega}.$$

Cherchons les conditions pour que cette fonction soit irrationnelle. Deux cas sont à distinguer :

1° α pair; il faut et il suffit que ω ne soit pas entier.

2° α impair; il faut et il suffit que ω ne soit pas de la forme $\frac{2p + 1}{2}$.

Supposons l'une de ces conditions remplie.

Une solution quelconque de l'équation (2) sera de la forme

$$y_1 = \lambda P(x) + \lambda' \frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x).$$

Mais cette équation admet comme solution la fonction

$$P(x)\int \frac{K(x)}{(x^2-1)^2 P^2(x)},$$

qui est de degré $-(n+1)$, c'est-à-dire qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

On a donc

$$\lambda P(x) - \lambda' \frac{K(x)}{x^2-1}\Theta(x) = \frac{1}{x^{n+1}} + \dots,$$

d'où

$$\frac{K(x)}{x^2-1} = \mu \frac{P(x)}{\Theta(x)} + \frac{1}{x^{2n+1}} + \dots,$$

équation qui montre que les polynômes $\Theta(x)$ sont les dénominateurs, les polynômes $P(x)$ les numérateurs des réduites de la fonction

$$\frac{K(x)}{x^2-1} = (x^2-1)^{\alpha}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega},$$

dans le cas où cette fonction est irrationnelle.

En posant $\frac{K(x)}{x^2-1} = F(x)$, on aura pour les réduites successives

$$\frac{F^2(x)\, D^{n+\alpha}\dfrac{(x^2-1)^{n+\alpha}}{F(x)}}{D^n(x^2-1)^n F(x)}.$$

Ce résultat comprend comme cas particulier le cas de $\alpha = 0$; on a alors les réduites de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$, étudiées par M. Laguerre par une méthode toute différente.

Laissant de côté l'étude des polynômes $\Theta(x)$ et $P(x)$, je fais la remarque suivante, qui va conduire à un théorème intéressant.

On sait que, si l'on pose

$$y = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{K(z)(z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}}\,dz,$$

on a

$$(x^2-1)y''+2\left[x\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\omega\right]y'-(n+1)(n+\alpha)y$$
$$=-(n+1)[K(z)(z^2-1)^n(x-z)^{-n-2}]_\gamma^\delta.$$

Le second membre devient, en remplaçant K par sa valeur,

$$-(n+1)\left[(z^2-1)^{n+1+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^\omega(x-z)^{-n-2}\right]_\gamma^\delta.$$

La quantité entre parenthèses s'annule pour -1 et $+1$ si l'on a

$$n+1+\frac{\alpha}{2}+\omega>0,\quad n+1+\frac{\alpha}{2}-\omega>0.$$

Dans ce cas, la fonction

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)(z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}}dz$$

est une solution de l'équation (2), et elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

Si $K(z)$ s'annule pour -1 et pour $+1$, c'est-à-dire si

$$1+\frac{\alpha}{2}+\omega>0,\quad 1+\frac{\alpha}{2}-\omega>0,$$

conditions qui comprennent les précédentes, on aura évidemment

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{D^n K(z)(z^2-1)^{n-1}}{x-z}dz,$$

ou

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)\Theta(z)dz}{(z^2-1)(x-z)}=\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}dz$$
$$+\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{z^2-1}\left[\frac{\Theta(z)-\Theta(x)}{x-z}\right]dz,$$

ou

$$y=\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)}dz+\Pi(x),$$

$\Pi(x)$ étant un polynôme au plus de degré $n-1$.

On a donc

$$\Theta(x)\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz+\Pi(x)=\lambda\mathrm{P}(x)+\mu\,\frac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}\,\Theta(x)$$

ou

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu\,\frac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}=\frac{\mathrm{P}(x)}{\Theta(x)};$$

$\mathrm{P}(x)$ est un polynôme de degré $n+\alpha$.

Si, sans changer α et ω, on change n en $n+p$, on aura deux autres polynômes $\mathrm{P}_1(x)$ et $\Theta_1(x)$, et

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu_1\,\frac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}=\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Retranchant ces deux relations membre à membre, on aura

$$(\mu_1-\mu)\,\frac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}=\frac{\mathrm{P}(x)}{\Theta(x)}-\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\Theta_1(x)},$$

et $\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}$ serait une fonction rationnelle, ce qui est contraire à l'hypothèse; on a donc

$$\mu=\mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{P}(x)}{\Theta(x)}=\frac{\mathrm{P}_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Prenant $n=0$ (on peut le faire si $\alpha>0$), le polynôme Θ correspondant est une constante; par suite, on a

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{K}(z)}{(z^2-1)(x-z)}\,dz-\mu\,\frac{\mathrm{K}(x)}{x^2-1}=\mathrm{P}_\alpha,$$

P_α étant un polynôme de degré α.

Si α est négatif, comme on doit avoir

$$\omega>-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),\quad \omega<\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),$$

il faut que

$$1+\frac{\alpha}{2}>0.$$

Par suite, α ne peut prendre que la valeur -1; la valeur $\alpha=-2$ donnerait $\omega=0$, et $\dfrac{\mathrm{K}}{x^2-1}$ serait rationnel.

Dans ce cas, pour que $\frac{P(x)}{\Theta(x)} = \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}$, il faudrait que Θ et Θ_1 eussent au moins une racine commune, puisque les numérateurs sont d'un degré inférieur d'une unité au degré des dénominateurs; alors tous les polynômes $\Theta(x)$ auraient au moins une racine commune, ce qu'on sait être impossible. Donc

$$P(x) = P_1(x) = 0,$$

et l'on a, pour $\alpha = -1$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2 - 1)(x - z)} dz - \mu \frac{K(x)}{x^2 - 1} = 0.$$

En résumé : 1° α étant entier et plus grand que 0, si la fonction

$$F(z) = (z^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\omega}$$

est irrationnelle et si, pour -1 et $+1$, elle ne devient pas infinie d'un ordre supérieur ou égal à 1, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{x - z} dz = \mu F(x) + (A x^{\alpha} + B x^{\alpha - 1} + \ldots + L);$$

2° α étant égal à -1, et les mêmes conditions étant réalisées, on a

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\omega} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{dz}{x - z} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} \frac{\mu}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$