BULLETIN DE LA S. M. F.

M.N. NKASHAMA

Solutions périodiques des systèmes non conservatifs périodiquement perturbés

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 387-402

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__387_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 387-402

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES NON CONSERVATIFS PÉRIODIQUEMENT PERTURBÉS

PAR

M. N. NKASHAMA (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions 2π-périodiques du système

$$x''(t)+Cx'(t)+\text{grad}_x G(t, x(t))=e(t),$$

sous des conditions du type non uniforme (en t). Les valeurs propres de la Hessienne de G peuvent être contenues dans des intervalles différents de la résolvante du problème linéaire associé. Nos résultats sont basés sur la méthode de séries de Fourier, les techniques du type de Leray-Schauder et le degré de coïncidence.

ABSTRACT. — We use Fourier series method, Leray-Schauder's techniques and Coincidence degree in order to get existence and uniqueness results for 2π-periodic solutions of the system

$$x''(t)+Cx'(t)+\text{grad}_x G(t, x(t))=e(t)$$

under nonuniform conditions (in t). The eigenvalues of the Hessian of G may be contained in different gaps of the resolvent of the associated second order linear problem.

Mots clés et phrases. — Systèmes non conservatifs, solutions périodiques, conditions de Caratheodory, techniques du type de Leray-Schauder, degré de coïncidence.

AMS(MOS) (1980) : 34C25, 34B15, 34B30.

1. Introduction

Le but de ce travail est de donner des résultats d'existence et d'unicité de solutions du système forcé :

$$x''(t)+Cx'(t)+\text{grad}_x G(t, x(t))=e(t) \tag{1.1}$$

(*) Texte reçu le 17 janvier 1985, révisé le 25 mai 1985.

M. N. NKASHAMA, Institut de Mathématiques, Université de Louvain, chemin du Cyclotron 2, B 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique.

et son cas particulier

$$x''(t)+\mathrm{grad}_x G(t, x(t))=e(t), \tag{1.2}$$

vérifiant les conditions aux limites périodiques :

$$x(0)-x(2\pi)=x'(0)-x'(2\pi)=0. \tag{1.3}$$

Nous considérons toujours que $J=[0, 2\pi]$: $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$; $e \in L^1(J; \mathbb{R}^n)$; C est une matrice symétrique réelle d'ordre n et que $G: J\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions de Caratheodory i. e. $G(., x)$ est mesurable pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $G(t, .)$ est continu en x pour presque tout $t\in J$. Nous supposerons de plus que $G(t, .)$ est de classe C^2 pour presque tout $t\in J$ et que pour tout réel $r>0$, il existe une fonction à valeur réelle $c_r\in L^1(J; \mathbb{R})$ telle que

$$\|\mathrm{grad}_x G(t, x)\| \leqslant c_r(t)$$

pour presque tout $t\in J$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ avec $\|x\|\leqslant r$. Ici la notation $\|\,.\,\|$ représente la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et $(.,\,.)$ représente le produit scalaire usuel.

Les problèmes (1.1)-(1.3) et (1.2)-(1.3) ont fait l'objet de plusieurs travaux par différents auteurs. A. C. LAZER et D. A. SANCHEZ [14] ont montré que si $G(t, x)\equiv G(x)$ i. e. G est autonome et qu'il existe un entier naturel $N\in\mathbb{N}$ et deux nombres réels p et q tels que

$$N^2<p\leqslant q<(N+1)^2,$$

et que pour tout $a\in\mathbb{R}^n$, on ait

$$pI \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right) \leqslant qI, \qquad i, j=1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

où I est la matrice identité, alors le problème (1.2)-(1.3) possède au moins une solution; l'unicité ayant été démontrée plus tard par le premier auteur dans [13] sous des conditions plus faibles (nous en reparlerons). Ce résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.2)-(1.3) avec G autonome a été retrouvé plus tard par R. KANNAN [10] en utilisant les méthodes alternatives, par J. MAWHIN [15], S. N. CHOW, J. K. HALE et J. MALLET-PARET [7], et R. KANNAN et J. LOCKER [11] comme une conséquence des théorèmes d'existence et d'unicité dans des espaces abstraits. Nous signalons aussi que R. REISSIG [19] a étendu le résultat ci-dessus au cas du système non conservatif (1.1)-(1.3) avec C une matrice réelle symétrique arbitraire et

G autonome satisfaisant les conditions (1.4) en suivant l'idée de J. MAWHIN [15].

Par la suite, A. C. LAZER [13] a démontré un résultat d'unicité de solutions pour le problème (1.2)-(1.3) avec G autonome sous les hypothèses suivantes (plus faibles que (1.4)) :

Il existe deux matrices symétriques réelles A et B de valeurs propres respectives

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$$

et qu'il existe des entiers $N_k \in \mathbb{N}$ $(k=1, \ldots, n)$ satisfaisant la condition

$$N_k^2 < \lambda_k \leqslant \mu_k < (N_k+1)^2 \tag{1.5}$$

et tels que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$A \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \leqslant B. \tag{1.6}$$

Les hypothèses (1.5) et (1.6) sont aussi suffisantes pour l'existence de solutions du problème (1.2)-(1.3) comme démontré par S. AHMAD [1]. Le résultat complet d'existence et d'unicité a été aussi retrouvé par K. J. BROWN et S. S. LIN [5] en utilisant un théorème d'inversion globale. Tous les résultats ont été démontré en supposant que $e \in C(J, \mathbb{R}^n)$. Récemment L. AMARAL et M. P. PERA [3] ont étendu les résultats de Lazer-Ahmad et Reissig au cas où la non-linéarité G est non autonome en introduisant pour la première fois les conditions du type non uniforme, à savoir la condition (1.6) est remplacée par

$$A \leqslant \gamma(t) \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(t, a)\right) \leqslant \Gamma(t) \leqslant B, \tag{1.7}$$

pour tout $t \in J$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, où A, B sont des matrices symétriques constantes d'ordre n ayant comme valeurs propres respectives N_k^2 et $(N_k+1)^2$ avec $N_k \in \mathbb{N}$ pour chaque $k=1, \ldots, n$; γ et Γ sont des matrices-fonctions symétriques d'ordre n, $\gamma, \Gamma \in C(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ i. e. γ, Γ sont continues avec des conditions supplémentaires sur l'interaction de γ avec A et Γ avec B respectivement et $e \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$. Ces résultats de Amaral-Pera sont une conséquence des théorèmes abstraits d'existence et d'unicité dans les espaces de Hilbert.

Dans ce travail, nous nous proposons de généraliser les résultats des auteurs cités ci-dessus (*cf.* théorèmes 1, 2) sur l'existence et l'unicité de solutions pour les problèmes (1.1)-(1.3) et (1.2)-(1.3). Nos résultats sont basés sur la méthode des séries de Fourier, les techniques du type de Leray-Schauder et le degré de coincidence.

L'approche utilisée ici — qui est différente de celles des autres auteurs — permet non seulement de généraliser les résultats antérieurs en élargissant la classe des termes forçants et la classe des non linéarités G pour lesquelles on a l'existence et l'unicité de solutions de (1.1)-(1.3) et (1.2)-(1.3), mais aussi de formuler de manière plus précise certaines hypothèses de l'article [3].

Nous signalons que toutes les propriétés utilisées ici pour les matrices symétriques, leurs valeurs propres et les fonctions propres correspondantes sont tirées de l'article de W. T. Reid [18]. En outre dans la suite, nous utiliserons toujours les notations de [9] pour les espaces fonctionnels, la convergence forte et la convergence faible.

2. Solutions périodiques des systèmes non conservatifs sans dissipation

Avant de donner le résultat principal, nous allons d'abord préciser un point de notation.

$$W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n) = \{x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n \mid x \quad \text{et} \quad x'$$

sont absolument continus,

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0\}.$$

Définition. — *Soit $Q \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une matrice symétrique constante d'ordre n, alors on écrira $Q \geqq 0$ (respectivement $Q > 0$) si et seulement si $(Qx, x) \geqslant 0$ (respectivement $(Qx, x) > 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$). Dans cette section, comme par la suite, nous considérons toujours que A et B sont des matrices symétriques constantes d'ordre n ayant comme valeurs propres respectives N_k^2 et $(N_k+1)^2$ où $N_k \in \mathbb{N}$ $(k=1, \ldots, n)$ et $N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots \leqslant N_n$.*

Pour deux matrices A et B comme ci-dessus, soient $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ et $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ [18] tels que

$$(2.1) \qquad A\bar{a}_k = N_k^2 \bar{a}_k, \qquad (\bar{a}_k, \bar{a}_j) = \delta_{kj},$$

$$(2.2) \qquad B\bar{b}_k = (N_k+1)^2 \bar{b}_k, \qquad (\bar{b}_k, \bar{b}_j) = \delta_{kj},$$

pour $j, k=1, \ldots, n$ où $\delta_{kj}=0$, $k \neq j$ et $\delta_{kk}=1$. Nous définissons les sous-espaces vectoriels $V_1, V_2, V_3 \subset W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)$ comme suit :

(*a*) $\tilde{x} \in V_1$ si

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\bar{b}_k, \tag{2.3}$$

où

$$f_k(t)=\sum_{r=N_k+1}^{\infty} (c_{kr}\cos rt+d_{kr}\sin rt), \tag{2.4}$$

(*b*) $y \in V_3$ si

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(t)\bar{b}_k, \tag{2.5}$$

où

$$g_k(t)=c_{ko}+\sum_{r=1}^{N_k}(c_{kr}\cos rt+d_{kr}\sin rt). \tag{2.6}$$

(*c*) $\bar{x} \in V_2$ si

$$\bar{x}(t)=\sum_{k=1}^{n} h_k(t)\bar{a}_k, \tag{2.7}$$

où

$$h_k(t)=p_{ko}+\sum_{r=1}^{N_k} (p_{kr}\cos rt+q_{kr}\sin rt). \tag{2.8}$$

Comme une application de la méthode de séries de Fourier et d'un lemme sur les formes bilinéaires symétriques, il est démontré dans [13], p. 91-93 que

$$W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)=V_3 \oplus V_1=V_2 \oplus V_1. \tag{2.9}$$

En fait (2.9) est démontré dans [13] pour le sous-espace V de $C^2(J, \mathbb{R}^n)$ formé des éléments 2π-périodiques ainsi que leur première dérivée, mais une simple analyse de la démonstration montre que (2.9) reste vrai si V est remplacé par $W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)$ tel que défini dans [9]. Nous considérerons aussi les sous-espaces H_N et H_{N+1} $(N \in \mathbb{N})$ de $H^1(J, \mathbb{R}^n)$ (*cf.* [9]) définis comme suit :

$$H_N=\{x \in H^1(J, \mathbb{R}^n) : x(t)= \\ =\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos N_k t+q_k\sin N_k t)\bar{a}_k,\ p_k,\ q_k \in \mathbb{R}\} \tag{2.10}$$

$$H_{N+1}=\{x \in H^1(J, \mathbb{R}^n) : x(t)= \\ =\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos(N_k+1)t+d_k\sin(N_k+1)t)\bar{b}_k,\ c_k,\ d_k \in \mathbb{R}\} \tag{2.11}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 1. — *Supposons qu'il existe deux matrices symétriques constantes A et B comme ci-dessus et deux matrices symétriques à valeurs réelles γ, $\Gamma \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ telles que*

$$A \leqslant \gamma(t) \leqslant \Gamma(t) \leqslant B, \tag{2.12}$$

pour presque tout $t \in J$. Supposons de plus que

$$\int_0^{2\pi} ((B-\Gamma(t))\, v(t),\ v(t))\, dt > 0 \tag{2.13}$$

pour tout $v \in H_{N+1} \setminus \{0\}$ et

$$\int_0^{2\pi} ((\gamma(t)-A)\, w(t),\ w(t))\, dt > 0 \tag{2.14}$$

pour tout $w \in H_N \setminus \{0\}$.

Alors si

$$\gamma(t) \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(t, a)\right) \leqslant \Gamma(t), \tag{2.15}$$

pour presque tout $t \in J$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, le problème (1.2)-(1.3) *possède une solution unique pour chaque $e \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$.*

Pour démontrer le théorème 1, nous avons besoin de quelques lemmes dont les énoncés et les démonstrations sont donnés ci-dessous.

LEMME 2.1. — *Soit $D \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ une matrice symétrique à valeurs réelles telle que*

$$\gamma(t) \leqslant D(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p.p. } t \in J, \tag{2.16}$$

où γ, $\Gamma \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ satisfont les conditions du théorème 1. Alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) + D(t)\, x(t) = 0, \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

n'a que la solution triviale (c'est-à-dire $x = 0$).

Preuve. — Soit $x \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)$ une solution de (2.17). Alors, en vertu de (2.9) x s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$x(t)=\bar{x}(t)+\tilde{x}(t),$$

avec $\bar{x} \in V_2$ et $\tilde{x} \in V_1$. Dès lors, compte tenu de la symétrie de D, des inégalités (2.16), (2.12) et l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} ((\bar{x}(t)-\tilde{x}(t)), (x''(t)+D(t)x(t)))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t), \tilde{x}'(t))-(\tilde{x}(t), D(t)\tilde{x}(t))]\,dt \\
&\quad -\int_0^{2\pi} [(\bar{x}'(t), \bar{x}'(t))-(\bar{x}(t), D(t)\bar{x}(t))] \\
&\geqslant \int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t), \tilde{x}'(t))-[\tilde{x}(t), \Gamma(t)\tilde{x}(t))]\,dt \\
&\quad -\int_0^{2\pi} [(\bar{x}'(t), \bar{x}'(t))-(\bar{x}(t), \gamma(t)\bar{x}(t))]\,dt.
\end{aligned}$$

En vertu des relations (2.1), (2.2), (2.4), (2.8), l'égalité de Parseval-Steklov et les arguments utilisés dans [13], p. 92, nous avons

$$\int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t), \tilde{x}'(t))-(\tilde{x}(t), \Gamma(t)\tilde{x}(t))]\,dt \geqslant 0 \tag{2.18}$$

et

$$-\int_0^{2\pi} [(\bar{x}'(t), \bar{x}'(t))-(\bar{x}(t), \gamma(t)\bar{x}(t))]\,dt \geqslant 0, \tag{2.19}$$

avec l'égalité dans (2.18) et (2.19) si et seulement si $\tilde{x} \in H_{N+1}$ et $\bar{x} \in H_N$ respectivement. Dès lors

$$\int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t), \tilde{x}'(t))-(\tilde{x}(t), \Gamma(t)\tilde{x}(t))]\,dt=0$$

avec $\tilde{x} \in H_{N+1}$ et

$$\int_0^{2\pi} [(\bar{x}(t), \gamma(t)\bar{x}(t))-(\bar{x}'(t), \bar{x}'(t))]\,dt=0$$

avec $\bar{x} \in H_N$. Ce qui entraîne que $\bar{x} = \tilde{x} = 0$ en vertu des conditions (2.13) et (2.14), ce qui achève la preuve.

Nous allons maintenant énoncer et démontrer un lemme qui va nous donner des bornes *a priori* pour les solutions. Nous l'énoncerons sous sa forme la plus générale possible étant donné que nous l'utiliserons plusieurs fois dans ce travail.

LEMME 2.2. — *Soient* γ, $\Gamma \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *deux matrices symétriques à valeurs réelles. Supposons que pour chaque matrice symétrique* $D \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *telle que*

$$\gamma(t) \leqslant D(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p. } t \in J,$$

le problème

$$x''(t) + C x'(t) + D(t) x(t) = 0,$$
$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

(où C est une matrice symétrique constante d'ordre n) n'a que la solution triviale.

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \Gamma) > 0$ *et* $\eta = \eta(\gamma, \Gamma) > 0$ *tels que pour toute matrice symétrique* $Q \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *satisfaisant les inégalités*

$$\gamma(t) - \varepsilon I \leqslant Q(t) \leqslant \Gamma(t) + \varepsilon I \quad \text{p. p. } t \in J \tag{2.20}$$

et pour tout $x \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\| x'' + C x' + Q x \|_{L^1} \geqslant \eta \| x \|_C. \tag{2.21}$$

Preuve. — Supposons que la conclusion du lemme soit fausse. Nous pouvons trouver une suite

$$x_m \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n) \qquad \text{avec} \quad \| x_m \|_C = 1$$

et une suite $Q_m \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, Q_m symétriques avec

$$\gamma(t) - \frac{1}{m} I \leqslant Q_m(t) \leqslant \Gamma(t) + \frac{1}{m} I \quad \text{p. p. } t \in J \, (m \in \mathbb{N}^*), \tag{2.22}$$

telles que

$$\| x''_m + C x'_m + Q_m x_m \|_{L^1} < \frac{1}{m} \qquad (m \in \mathbb{N}^*). \tag{2.23}$$

Des inégalités

$$\gamma(t)-I \leqslant Q_m(t) \leqslant \Gamma(t)+I \quad \text{p. p. } t \in J,$$

nous déduisons que

$$\|Q_m(t)\| \leqslant \|\gamma(t)-I\|+\|\Gamma(t)-\gamma(t)+2I\|, \tag{2.24}$$

pour presque tout $t \in J$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et donc

$$\|Q_m\|_{L^1} \leqslant c,$$

pour une certaine constante $c=c(\gamma, \Gamma, I) \in R$, ce qui implique que

$$\|x''_m+C x'_m\|_{\mathscr{L}^1} < d+\|Q_m\|_{L^1}\|x_m\|_C \leqslant d+c. \tag{2.25}$$

Dès lors, en considérant les sous-suites si il y a nécessité, nous pouvons supposer que (*cf.* par ex. [17], lemmes II.3 et II.4)

$$x_m \to x \quad \text{dans } C(J, \mathbb{R}^n),$$
$$Q_m \rightharpoonup Q \quad \text{dans } L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)),$$

avec

$$x \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n), \qquad \|x\|_C = 1.$$

Comme

$$Q_m(t)-\frac{1}{m} I \leqslant \Gamma(t)$$

on a

$$Q(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p.}$$

De même

$$\gamma(t) \leqslant Q(t) \quad \text{p. p.},$$

et donc

$$\gamma(t) \leqslant Q(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p. } t \in J \text{ ([21], p. 701)}. \tag{2.26}$$

D'autre part, pour chaque $\varphi \in L^\infty(J, \mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}(Q_m(t)x_m(t)-Q(t)x(t), \varphi(t))\,dt\right| &\leqslant \left|\int_0^{2\pi}(Q_m(t)(x_m(t)-x(t)), \varphi(t))\,dt\right| \\ &\quad+\left|\int_0^{2\pi}((Q_m(t)-Q(t))x(t), \varphi(t))\,dt\right| \\ &\leqslant c\|\varphi\|_{L^\infty}\|x_m-x\|_C \\ &\quad+\left|\int_0^{2\pi}((Q_m(t)-Q(t))x(t), \varphi(t))\,dt\right|.\end{aligned}$$

Comme les deux derniers termes convergent vers zéro pour $m \to +\infty$, *nous avons que*

$$Q_m x_m \rightharpoonup Q x \quad \text{dans } L^1(J, \mathbb{R}^n),$$

par la densité de $L^\infty(J, \mathbb{R}^n)$ dans $L^1(J, \mathbb{R}^n)$. Dès lors

$$x_m'' + C x_m' \rightharpoonup -Q x \quad \text{dans } L^1(J, \mathbb{R}^n) \text{ par } (2.23)$$

De plus l'opérateur L : $\operatorname{Dom} L \subset C(J, \mathbb{R}^n) \to L^1(J, \mathbb{R}^n)$ défini par

$$\operatorname{Dom} L = W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad Lx = x'' + Cx',$$

étant faiblement fermé, nous pouvons affirmer, en vertu de (2.23), que

$$x'' + Cx' + Qx = 0, \qquad x \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n).$$

D'où $x=0$ par hypothèse, une contradiction avec le fait que $\|x\|_C = 1$, ce qui achève la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.

Démonstration du théorème 1. — Elle sera divisée en deux parties; la première consacrée à l'existence alors que la deuxième est consacrée à l'unicité.

1re *partie.* — En vue d'appliquer le degré de coïncidence [16], nous définissons les espaces et les opérateurs abstraits suivants :

$$X = C(J, \mathbb{R}^n), \qquad Z = L^1(J, \mathbb{R}^n),$$
$$L : \operatorname{Dom} L \subset X \to Z$$

défini par

$$\operatorname{Dom} L = W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad Lx = x''$$

$$A: X \to Z: x \to Ax = \Gamma x,$$

$$N: X \to Z: x \to (Nx)(t) = \operatorname{grad}_x G(t, x(t)) - e(t)$$

Il est bien connu que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. A est linéaire et L-complètement continu et que N est continu et transforme les bornés en bornés; ce qui implique que N est L-compact en vertu du fait l'inverse à droite de L est compact [16].

Le problème (1.2)-(1.3) est équivalent à

(2.27) $$Lx + Nx = 0, \qquad x \in \operatorname{Dom} L.$$

En vue d'appliquer le théorème de continuation dû à J. MAWHIN [16], p. 44, nous considérons l'homotopie

$$\Phi: \quad \operatorname{Dom} L \times [0, 1] \to Z$$

définie par $\Phi(x, \lambda) \equiv Lx + (1-\lambda) Ax + \lambda Nx$.

Il s'agit de montrer que l'ensemble de toutes les solutions possibles de l'équation

(2.28) $$\Phi(x, \lambda) = 0$$

est borné indépendamment de λ.

Soit $x \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n)$ une solution de (2.28), alors x vérifie l'équation

(2.29) $$x''(t) + (1-\lambda)\Gamma(t) x(t) + \lambda \operatorname{grad}_x G(t, x(t)) - \lambda e(t) = 0$$

qui, en vertu du théorème de la moyenne pour les fonctions vectorielles (*cf.* [12], p. 100), est équivalente à

(2.30) $$x''(t) + [(1-\lambda)\Gamma(t) + \lambda D(t)] x(t) + \lambda \operatorname{grad}_x G(t, 0) - \lambda e(t) = 0,$$

$x \in \operatorname{Dom} L$, où

$$D(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(t, sx(t)) \right) ds.$$

En vertu de l'hypothèse (2.15), la matrice

$$Q(t) = (1-\lambda)\Gamma(t) + \lambda D(t)$$

est telle que

$$\gamma(t) \leqslant Q(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p. } t \in J.$$

Donc, en vertu des lemmes 2.1 et 2.2 on a

$$O = \| x'' + [(1-\lambda)\Gamma + \lambda D] x + \lambda \operatorname{grad}_x G(., 0) - \lambda e \|_{L^1} \geqslant \eta \| x \|_C - (\| \operatorname{grad}_x G(., 0) \|_{L^1} + \| e \|_{L^1}),$$

où η ne dépend que de γ et Γ. Dès lors

$$\| x \|_C \leqslant \eta^{-1} (\| \operatorname{grad}_x G(., 0) \|_{L^1} + \| e \|_{L^1}) \leqslant R, \tag{2.31}$$

où R est une constante indépendante de λ et de x. L'existence découle du théorème IV.5 de [16].

2^e *partie.* — Soient $x, y \in W^{2,1}(J, R^n)$ deux solutions du problème (1.2)-(1.3). Alors $u = x - y$ est solution du problème

$$u''(t) + Q(t) u(t) = 0, \qquad u \in W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n),$$

où

$$Q(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} (y(t) + s(x(t) - y(t))) \right) ds$$

grâce au théorème de la moyenne. Clairement

$$\gamma(t) \leqslant Q(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p. } t \in J,$$

en vertu de l'hypothèse (2.15). Le lemme 1.1 implique que $u = 0$ c'est-à-dire $x = y$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.1. — Compte tenu de la structure des espaces H_N et H_{N+1} : les hypothèses (2.12), (2.13) et (2.14) sont en particulier satisfaites si on a :

$$A \leqslant \gamma(t) \leqslant \Gamma(t) \leqq B \quad \text{p. p. } t \in J, \tag{2.12'}$$

$$\Gamma(t) < B \tag{2.13'}$$

(i. e. $B - \Gamma(t)$ définie positive) sur un sous-ensemble de $[0, 2\pi]$ de mesure positive,

$$A < \gamma(t) \tag{2.14'}$$

(i. e. $\gamma(t) - A$ définie positive) sur un sous-ensemble de $[0, 2\pi]$ de mesure positive.

Remarque 2.2. — Une analyse de la démonstration du théorème 1 montre que l'hypothèse (2.15) peut être remplacée par

$$\gamma(t)-\nu \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(t, a)\right) \leqslant \Gamma(t)+\nu,$$

p. p. $t \in J$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant \nu < \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est associée à γ et Γ par le lemme 2.2. Dès lors, on peut « traverser » les valeurs propres N_k^2 et $(N_k+1)^2$ sur des sous-ensembles de $[0, 2\pi]$ de mesure positive.

Remarque 2.3. — Le théorème 1 généralise les résultats antérieurs de la manière suivante :

(*a*) Le résultat de LAZER-SANCHEZ [14] :

$$A=N^2 I, \quad N \in \mathbb{N}; \qquad B=(N+1)^2 I; \qquad \gamma(t)=pI, \quad p \in \mathbb{R};$$

$$\Gamma(t)=qI, \quad q \in \mathbb{R}; \qquad G(t, x) \equiv G(x),$$

$$pI \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \leqslant qI \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R},$$

$$N^2 < p \leqslant q < (N+1)^2, \quad e \in C(J, \mathbb{R}^n).$$

(*b*) Le résultat de KANNAN [10], MAWHIN [15], CHOW-HALE-MALLET-PARET [7], KANNAN-LOCKER [11] : *voir* (*a*).

(*c*) Le résultat de LAZER [13], AHMAD [1], BROWN-LIN [5] : $G(t, x) \equiv G(x)$, A et B sont des matrices symétriques définies comme au début de cette section, γ et Γ sont des matrices symétriques constantes, $A < \gamma \leqslant \Gamma < B$ et $e \in C(J, \mathbb{R}^n)$ (*cf.* W. T. REID [18]).

(*d*) Le résultat de AMARAL-PERA [3] : $G \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, γ, $\Gamma \in C(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, R^n))$ et $e \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$. Nous précisons ici la signification de l'hypothèse (F_2) du théorème 5 de [3], *voir* à ce sujet les hypothèses (2.13), (2.14) et la remarque 2.1 ci-dessus.

3. Solutions périodiques des systèmes non conservatifs avec dissipation

Cette section est consacrée à l'étude du problème (1.1), (1.3) c'est-à-dire que nous considérons le cas où l'on a une dissipation linéaire. Nous généralisons les résultats de R. REISSIG [19] et ceux de L. AMARAL et M. P. PERA [3].

Tout au long de cette section nous supposerons toujours que A et B sont des matrices symétriques constantes d'ordre n ayant comme valeurs propres respectives des entiers N_k^2 et $(N_k+1)^2$ comme au début de la section 2.

De plus nous supposerons aussi que :

$$\bar{a}_k = \bar{b}_k. \tag{3.1}$$

Nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 2. — *Supposons qu'il existe des matrices symétriques* A, $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, γ, $\Gamma \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *satisfaisant les hypothèses* (2.12) *à* (2.14) *du théorème* 1. *Supposons de plus que la relation* (3.1) *a lieu et que la matrice symétrique* C *commute avec* A *et* B.

Alors si G *satisfait la condition* (2.15), *le problème* (1.1), (1.3) *possède une solution unique pour chaque* $e \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Avant de démontrer le théorème 2, nous prouvons d'abord le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soit* $D \in L^1(J; (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *une matrice symétrique à valeurs réelles telle que*

$$\gamma(t) \leqslant \mathrm{D}(t) \leqslant \Gamma(t) \quad \text{p. p. } t \in J,$$

où γ, $\Gamma \in L^1(J, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ *et* C *satisfont les conditions du théorème* 2. *Alors le problème*

$$\begin{cases} x''(t) + Cx'(t) + D(t)x(t) = 0, \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

n'a que la solution triviale.

Preuve. — Elle est similaire à celle du lemme 2.1. Il suffit seulement de remarquer que la relation (3.1) implique que $V_2 = V_3$. En vertu de l'orthogonalité (au sens de $L^2(J, \mathbb{R}^n)$) de V_1 et V_3 et du fait que C commute avec A et B, on a

$$\int_0^{2\pi} (\bar{x}(t) - \tilde{x}(t), Cx'(t))\, dt = 0 \quad (cf. [3]),$$

ce qui achève la preuve.

Démonstration du Théorème 2. — Nous définissons les espaces et les opérateurs abstraits comme suit :

$$X = C(J, \mathbb{R}^n), \qquad Z = L^1(J, \mathbb{R}^n),$$

L: $\mathrm{Dom}\, L \subset X \to Z$ est défini par

$$\mathrm{Dom}\, L = W^{2,1}(J, \mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad Lx = x'' + Cx';$$

$$Ax = \Gamma x, \qquad (Nx)(t) = \mathrm{grad}_x G(t, x(t)) - e(t).$$

En suivant pas à pas l'approche de la démonstration du théorème 1 et en utilisant les lemmes 3.1 et 2.2 (au lieu des lemmes 2.1 et 2.2), on prouve aisément que toute solution de l'homotopie

$$Lx + (1-\lambda)Ax + \lambda Nx = 0$$

est telle que $\|x\|_C \leqslant R$ où R est une constante réelle indépendante de λ et de x; l'existence découle aussi du théorème IV.5 de [16]. L'unicité provient alors du lemme 3.1 ci-dessus en utilisant l'approche de la deuxième partie de la démonstration du théorème 1, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.1. — Les remarques (2.1) et (2.2) ci-dessus restent vraies pour le théorème 2.

Le théorème 2 généralise les résultats de R. REISSIG [19], L. AMARAL et M. P. PERA [3], théorème 5. Nous signalons que le fait que $F(t, .)$ est de classe C^1 et est tel que $(\partial F/\partial x)(t, x)$ est symétrique dans [3] entraîne que $F(t, x) = \mathrm{grad}_x G(t, x)$ pour une certaine fonction $G: [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $G(t, .)$ est de classe C^2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHMAD (S.). — An existence theorem for periodically perturbed conservative systems, *Michigan Math. J.*, vol. 20, 1973, p. 385-392.

[2] AMANN (H.). — On the unique solvability of semi-linear operator equations in Hilbert spaces, *J. Math. pures et appl.*, vol. 61, 1982, p. 149-175.

[3] AMARAL (L.) and PERA (M. P.). — On periodic solutions of non-conservative systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, vol. 6, 1982, p. 733-743.

[4] BATES (P. W.). Solutions of nonlinear elliptic systems with meshed spectra, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, vol. 4, 1980, p. 1023-1030.

[5] BROWN (K. J.) and LIN (S. S.). — Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, vol. 4, 1980, p. 193-201.

[6] CHOW (S. N.) and LASOTA (A.). — On boundary value problems for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, vol. 14, 1973, p. 326-337.

[7] CHOW (S. N.), HALE (J. K.) and MALLET-PARET (J.). — Applications of generic bifurcation I, *Arch. Rat. Mech. An.*, vol. 59, 1975, p. 159-188.

[8] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.), *Linear Operators*, vol. 1, Inter-science Publishers, Wiley, New York, 1964.

[9] IANNACCI (R.) and NKASHAMA (M. N.). — Periodic solutions for some forced second order Lienard and Duffing systems, *Bol. Un. Mat. Italiana*, vol. 4-B, 1985, p. 557-568.

[10] KANNAN (R.), Periodically perturbed conservative systems, *J. Differential Equations*, vol. 16, 1974, p. 506-514.

[11] KANNAN (R.) and LOCKER (J.), On a class of nonlinear boundary value problems, *J. Differential Eq.*, vol. 26, 1977, p. 1-8.

[12] LANG (S.), *Analyse réelle*, Inter-Éditions, Paris, 1977.

[13] LAZER (A. C.), Application of a lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear oscillations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 33, 1972, p. 89-94.

[14] LAZER (A. C.) and SANCHEZ (D. A.). — On periodically perturbed conservative systems, *Michigan Math. J.*, vol. 16, 1969, p. 193-200.

[15] MAWHIN (J.), Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems, *Arch. Math. (Brno)*, vol. 12, 1976, p. 67-73.

[16] MAWHIN (J.), Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, *Regional Conf. Series in Math. n° 40*, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1979, Second printing, 1981.

[17] MAWHIN (J.). — Compacité, monotonie et convexité dans l'étude de problèmes aux limites semi-linéaires, *Sem. Anal. Moderne, n°* 19, Université de Sherbrooke, Québec, 1981.

[18] REID (W. T.), Some elementary properties of proper values and proper vectors of matrix functions, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, (2), vol. 18, 1970, p. 259-266.

[19] REISSIG (R.). — Contractive mappings and periodically perturbed non-conservative systems, *Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e nat.*, vol. 58, 1975, p. 696-702.

[20] WARD (J. R.). — Periodic solutions of perturbed conservative systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, 1978, p. 281-285.

[21] WARD (J. R.), The existence of periodic solutions for nonlinearly perturbed conservative systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, vol. 5, 1979, p. 697-705.