BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDELLATIF MARDHY

Prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ et multiplicité

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 463-473

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__463_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 463-473.

PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE $|f|^{2\lambda}$ ET MULTIPLICITÉ

PAR

ABDELLATIF MARDHY (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous commençons par donner une estimation de la fonction $F_\varphi(s)=\int_{f=s}\varphi$ obtenue par intégration sur des fibres quand s tend vers 0, et ensuite on donne une estimation du premier pôle du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$, et enfin on termine par un exemple.

ABSTRACT. — In the present work, we begin by giving an estimation of the function $F_\varphi(s)=\int_{f=s}\varphi$ obtained by integration on the fibers when s tends to zero, and after we deduce an estimation of the first pole of the meromorphic extension of $|f|^{2\lambda}$. At last, we finish by giving an example.

Introduction

Soit x un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et soit $f: X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur X vérifiant $f(0)=0$. Pour φ forme différentielle C^∞ à support compact de type (n, n) sur X et $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda)>0$ posons :

$$G_\varphi(\lambda)=\int_X |f|^{2\lambda}\varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar f}{\bar f}.$$

Ceci définit, pour φ fixée une fonction holomorphe de λ, et qui admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier; ceci est une conséquence facile de l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f (*voir* [1] et [6]). Les pôles de ce prolongement méromorphe apparaîssent en des translatés par des entiers négatifs des zéros de ce polynôme (*voir* [10]).

(*) Texte reçu le 19 avril 1985.

A. MARDHY, Université de Nancy-I, Faculté des Sciences, U.E.R. de Mathématiques, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.

Nous nous proposons de montrer ici que si k est la multiplicité de f à l'origine c'est-à-dire le degré minimal d'une paramétrisation locale de $\{f=0\}$ près de 0 alors G_φ admet comme unique pôle dans la bande $\operatorname{Re}(\lambda)>-1/k$ l'origine (qui est un pôle simple de résidu égal au courant d'intégration sur $[f=0]$ à une constante près). En plus si $-1/k$ est un pôle alors son ordre est au plus égal à 3.

En terme de développement asymptotique en $s=0$ des intégrales $F_\varphi(s)=\int_{f=s}\varphi$ obtenues par intégration dans des fibres, ceci se traduit par le fait que :

$$F_\varphi(s)=F_\varphi(0)+\mathcal{O}(|s|^{2/k}(\operatorname{Log}|s|)^2) \quad \text{quand } s\to 0.$$

On remarque également que ce résultat ne semble pas accessible via le théorème de désingularisation d'Hironaka [8], qui fait perdre tout contrôle sur la multiplicité.

On termine en montrant que pour les singularités du type $X^a+Y^b+Z^c=0$ avec $a\leqslant b\leqslant c$, le premier pôle est en $-1/a-1/b-1/c$ qui est aussi proche que l'on veut de $-1/a$ (a est la multiplicité) quand b et c sont grands.

Nous nous proposons donc de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La fonction G_φ n'admet pas de pôles dans la bande $-1/k<\operatorname{Re}(\lambda)<0$. (Autrement dit 0 est le seul pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re}(\lambda)>-1/k$.) De plus si $-1/k$ est un pôle, il est d'ordre au plus égal à 3.*

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante dont la démonstration occupera la majeure partie de cet article.

PROPOSITION. — *Pour ε suffisamment petit on a :*

$$I_\varepsilon=\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|\geqq\varepsilon}\varphi\wedge\frac{df}{f}\wedge\frac{d\bar f}{\bar f}=2\operatorname{Log}\varepsilon\int_{f=0}\varphi+Pf(G_\varphi)(0)$$
$$+\mathcal{O}(\varepsilon^{2/k}(\operatorname{Log}\varepsilon)^2),$$

où $Pf(G_\varphi)(0)$ désigne la partie finie dans le développement de Laurent de $G_\varphi(\lambda)$ en 0.

Preuve. — Pour $|f|\geqq\varepsilon$ on a :

$$\varphi\wedge\frac{df}{f}\wedge\frac{d\bar f}{\bar f}=d''\left(\varphi\wedge\operatorname{Log} f\bar f\,\frac{df}{f}\right)+\frac{1}{2}\,d'((\operatorname{Log} f\bar f)^2\,d''\varphi)$$
$$+\frac{1}{2}(\operatorname{Log} f\bar f)^2\,d'\,d''\varphi.$$

En appliquant Stokes (deux fois) et pour des raisons de type on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|\geq\varepsilon}\varphi\wedge\frac{df}{f}\wedge\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}=\frac{1}{i\pi}\operatorname{Log}\varepsilon\int_{|f|\geq\varepsilon}d''\varphi\wedge\frac{df}{f}$$
$$-\frac{1}{i\pi}(\operatorname{Log}\varepsilon)^2\int_{|f|\leq\varepsilon}1\,d'd''\varphi+\frac{1}{4i\pi}\int_{|f|\geq\varepsilon}(\operatorname{Log}(f\bar{f}))^2\,d'd''\varphi.$$

Et

$$\int_{|f|\geq\varepsilon}d''\varphi\wedge\frac{df}{f}=2\operatorname{Log}\varepsilon\int_{|f|\leq\varepsilon}d'd''\varphi-\int_{|f|\geq\varepsilon}\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d'd''\varphi.$$

Car

$$d'(\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d''\varphi)=-d''\varphi\wedge\frac{df}{f}-\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d'd''\varphi.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|\geq\varepsilon}\varphi\wedge\frac{df}{f}\wedge\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}=\frac{2}{i\pi}(\operatorname{Log}\varepsilon)^2\int_{|f|\leq\varepsilon}1\,d'd''\varphi$$
$$-\frac{1}{i\pi}\operatorname{Log}\varepsilon\int_{|f|\geq\varepsilon}\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d'd''\varphi+\frac{1}{4i\pi}\int_{|f|\geq\varepsilon}(\operatorname{Log}(f\bar{f}))^2\,d'd''\varphi.$$

Comme $\operatorname{Log}(f\bar{f})$ et $(\operatorname{Log}(f\bar{f}))^2$ sont localement intégrables, la dernière égalité devient :

$$I_\varepsilon=2\operatorname{Log}\varepsilon\int_{f=0}\varphi+\frac{2}{i\pi}(\operatorname{Log}\varepsilon)^2\int_{|f|\leq\varepsilon}1\,d'd''\varphi$$
$$+\frac{1}{i\pi}\operatorname{Log}\varepsilon\int_{|f|\leq\varepsilon}1\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d'd''\varphi$$
$$-\frac{1}{4i\pi}\int_{|f|\leq\varepsilon}1\,(\operatorname{Log}(f\bar{f}))^2\,d'd''\varphi+\frac{1}{4i\pi}\int_X(\operatorname{Log}(f\bar{f}))^2\,d'd''\varphi.$$

En effet on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_X\operatorname{Log}(f\bar{f})\,d'd''\varphi=\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{df}{f}\right](d''\varphi)=-\frac{1}{2i\pi}d''\left[\frac{df}{f}\right](\varphi)=-\int_{f=0}\varphi$$

(*voir* [11]) et pour plus de détails [9].

Pour donner une estimation de I_ε, pour ε voisin de 0 on aura besoin de deux lemmes.

Le problème étant local sur X, choisissons un système de coordonnées $(z_0, \ldots, z_n)$ tel que :

La fonction $\xi \mapsto f(0, \ldots, 0, \xi)$ ne soit pas identiquement nulle au voisinage de 0, et admettant k comme multiplicité à l'origine. D'après le théorème de préparation de Weiestrass [7], il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant 0 et $r>0$ tels que :

$$f(t, z) = I(t, z)\, P_t(z),$$

avec $(t, z) \in \Omega \times \mathrm{D}(0, r)$, et $I(t, z)$ est une fonction holomorphe sur $\Omega \times \mathrm{D}(0, r)$ et à valeurs dans C^*. P_t étant un polynôme unitaire de degré k en z et dépendant analytiquement de t. De plus le polynôme P_t a toutes ses racines dans $D(0, r)$ pour tout t dans Ω, on note par

$$dt \wedge d\bar{t} = dz_0 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_0 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$$

où

$$t = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad z = z_n.$$

Notons par $z_j(t)$, $j \in [1, k]$ les zéros de P_t. Localement et en dehors des ramifications, on peut écrire

$$P_t(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - z_j(t)).$$

LEMME 1. — *Soit K un compact de Ω, alors on a :*

$$\mathrm{vol}((|f| \leqq \varepsilon) \cap K \times D(0, r)) \leqq C\varepsilon^{2/k}$$

où C est une constante ne dépendant que de K et f.

LEMME 2. — *Soit β un réel dans* $]0, 1/3[$, *et a un nombre complexe dans* $D(0, 1/2)$ *alors on a :*

$$(a) \qquad \int_{D(0,\beta)} |\mathrm{Log}|z-a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \mathcal{A}\, \beta^2 |\mathrm{Log}\, \beta|,$$

$$(b) \qquad \int_{D(0,\beta)} (\mathrm{Log}|z-a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \mathcal{B}\, \beta^2 (\mathrm{Log}\, \beta)^2,$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des constantes ne dépendant pas de a.

Preuve du lemme 1. — Posons pour ε petit :

$$H_\varepsilon = \{(t, z) \in K \times D(0, r) / |f(t, z)| \leqq \varepsilon\},$$
$$T_\varepsilon = \{(t, z) \in K \times D(0, r) / |P_t(z)| \leqq \varepsilon\}$$

et pour $t \in K$

$$T_{t, \varepsilon} = \{z \in D(0, r) / |P_t(z)| \leqq \varepsilon\}.$$

On a pour

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{Inf}_{(t, z) \in K \times D(0, r)}(|I(t, z)|)}, \qquad H_\varepsilon \subset T_{\alpha\varepsilon}.$$

Donc

$$\operatorname{vol}(H_\varepsilon) \leqq \operatorname{vol}(T_{\alpha\varepsilon}) \leqq \int_{T_{\alpha\varepsilon}} |dt \wedge d\bar{t} \wedge dz \wedge d\bar{z}|$$

et alors

$$\operatorname{vol}(H_\varepsilon) \leqq \int_K |dt \wedge d\bar{t}| \int_{T_{t, \alpha\varepsilon}} |dz \wedge d\bar{z}| \leqq \int_K \operatorname{vol}(T_{t, \alpha\varepsilon}) |dt \wedge d\bar{t}|.$$

Or, en dehors des ramifications, pour $z \in T_{t, \alpha\varepsilon}$ on a

$$\prod_{j=1}^{k} |z - z_j(t)| \leqq \varepsilon . \alpha.,$$

donc il existe $j \in [1, k]$ tel que $|z - z_j(t)| \leqq (\alpha\varepsilon)^{1/k}$.

Ceci montre que $T_{t, \alpha\varepsilon}$ est contenu dans la réunion des disques $D(z_j(t); (\alpha\varepsilon)^{1/k})$ $j \in [1, k]$.

On en déduit alors que :

$$\operatorname{vol}(T_{t, \alpha\varepsilon}) \leqq k\pi\alpha^{2/k} . \varepsilon^{2/k}.$$

Donc

$$\operatorname{vol}(H_\varepsilon) \leqq \operatorname{vol}(K) . \alpha^{2/k} . k\pi\varepsilon^{2/k}$$

et $k\pi\alpha^{2/k}$ vol (K) est une constante ne dépendant que de K et de f. □

Preuve du lemme 2. — Pour $|a| > 2\beta$ et z dans $D(0, \beta)$, on a :

$$|z - a| > \beta \quad \text{et donc} \quad |\operatorname{Log}|z - a|| \leqq |\operatorname{Log}\beta|$$

et par conséquent :

$$\int_{D(0, \beta)} |\operatorname{Log}|z - a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \pi\beta^2 |\operatorname{Log}\beta|.$$

et
$$\int_{D(0,\ \beta)} |\operatorname{Log}|z-a||^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \pi\beta^2 (\operatorname{Log}\beta)^2$$

Pour $|a| \leqq 2\beta$, on a :

$$\int_{D(0,\ \beta)} |\operatorname{Log}|z-a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \int_{D(a,\ 3\beta)} |\operatorname{Log}|z-a|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$
$$\leqq 9\pi\beta^2 |\operatorname{Log}\beta| \quad \text{car } 0<\beta<\frac{1}{3},$$

De même on a :

$$\int_{D(0,\ \beta)} (\operatorname{Log}|z-a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq \int_{D(a,\ 3\beta)} (\operatorname{Log}|z-a|)^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$
$$\leqq 9\pi\beta^2 (\operatorname{Log}\beta)^2 \quad \text{car } 0<\beta<\frac{1}{3}. \quad \square$$

Dans la suite, on va donner une estimation de chacune des intégrales de la dernière expression de I_ε, il suffit de le faire pour des formes différentielles de la forme suivante (*voir* [2], p. 380) :

$$\varphi(t,\ z) = \rho(t,\ z)\, dt \wedge d\bar{t},$$

où $\rho(t,\ z)$ est une fonction C^∞ à support compact dans $\Omega \times D(0,\ r)$.

On a d'après le lemme 1 :

$$\left| \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1\, d'\, d''\, \varphi \right| \leqq C \operatorname{vol}(|f| \leqq \varepsilon) \leqq C_1 \varepsilon^{2/k},$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de φ et de f.

D'autre part on a :

$$\int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|f|\, d'\, d''\, \varphi = \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|I|\, d'\, d''\, \varphi + \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|P_t|\, d'\, d''\, \varphi,$$

$$\left| \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|I|\, d'\, d''\, \varphi \right| \leqq C_2 \varepsilon^{2/k} \quad \text{(d'après le lemme 1).}$$

Et,

$$\left| \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|P_t|\, d'\, d''\, \varphi \right| \leqq C \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1\, |\operatorname{Log}|P_t|\, dt \wedge d\bar{t}| \wedge \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$
$$\leqq C \int_K |dt \wedge d\bar{t}| \int_{T_{t,\ \alpha}} |\operatorname{Log}|P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

En plus on a :

$$\int_{T_{t,\,\alpha\varepsilon}} |\operatorname{Log}|P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

$$\leqq \sum_{j,\,l=1}^{k} \int_{D(z_j(t);\,(\alpha\varepsilon)^{1/k})} |\operatorname{Log}|z - z_l(t)|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Et d'après le lemme (2, a) on a :

$$\int_{T_{t,\,\alpha\varepsilon}} |\operatorname{Log}|P_t|| \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \leqq C'' \varepsilon^{2/k} \operatorname{Log} \varepsilon,$$

où C'' est une constante qui ne dépend pas de t, donc on a :

$$\left| \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 \operatorname{Log}|f| \, d' d'' \varphi \right| \leqq C_2 \varepsilon^{2/k} + C_3 \varepsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \varepsilon|.$$

Pour

$$\int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 (\operatorname{Log}|f|)^2 \, d' d'' \varphi,$$

on fait la même chose que pour l'intégrale précédente; et en appliquant le lemme (2, b) et l'inégalité de Schwartz on obtient :

$$\left| \int_{|f| \leqq \varepsilon} 1 (\operatorname{Log}|f|)^2 \, d' d'' \varphi \right| \leqq C'_2 \varepsilon^{2/k} + C'_3 \varepsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \varepsilon| + C'_4 \varepsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \varepsilon)^2.$$

Et finalement on a :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geqq \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} - 2 \operatorname{Log} \varepsilon \int_{f=0} \varphi - \frac{1}{i\pi} \int_X (\operatorname{Log}|f|)^2 \, d' d'' \varphi \right|$$
$$\leqq A_1 \varepsilon^{2/k} + A_2 \varepsilon^{2/k} |\operatorname{Log} \varepsilon| + A_3 \varepsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \varepsilon)^2.$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = 2 \operatorname{Log} \varepsilon \int_{f=0} \varphi$$
$$+ \frac{1}{i\pi} \int_X (\operatorname{Log}|f|)^2 \, d' d'' \varphi + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/k} (\operatorname{Log} \varepsilon)^2).$$

En plus on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|f|\leq\varepsilon} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} - 2\,\mathrm{Log}\,\varepsilon \int_{f=0} \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{i\pi}\int_X (\mathrm{Log}\,|f|)^2\, d'd''\varphi,$$

qui n'est autre chose que $Pf(G_\varphi)(0)$.

La démonstration de la proposition est donc achevée.

Posons, maintenant pour s dans le disque unité :

$$F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi,$$

où φ est une forme différentielle C^∞ de type (n, n) à support compact dans X.

COROLLAIRE. — *Pour s voisin de* 0, *on a :*

$$\mathscr{F}_\varphi(s) = \mathscr{F}_\varphi(0) + \mathcal{O}(|s|^{2/k}(\mathrm{Log}\,|s|)^2).$$

Pour la preuve de ce corollaire, on aura besoin du théorème d'existence suivant [1] :

THÉORÈME. — *Si K est un compact de X, alors pour tout forme différentielle C^∞ φ à support compact dans K de type (n, n), il existe $r_1, \ldots, r_p$ dans $[0, 2[\cap\mathbb{Q}$ et des courants $T^{r,j}_{m,m'}(\varphi)$ de type $(1, 1)$ sur X, $j \in [0, n]$ et $(m, m') \in \mathbb{N}^2$ tels que : la fonction $\mathscr{F}_\varphi$ admet pour s voisin de* 0, *un développement asymptotique de la forme :*

$$\mathscr{F}_\varphi(s) = \sum_{r_1, \ldots, r_p} \sum_{j=0}^{n} \sum_{(m, m') \in \mathbb{N}^2} T^{r,j}_{m,m'}(\varphi)\, s^m \bar{s}^{m'} |s|^r (\mathrm{Log}\,|s|)^j.$$

Preuve du corollaire. — Supposons que le développement asymptotique de $F_\varphi(s) - F_\varphi(0)$ commence par le terme :

$$T^{r,j}_{m,m'}(\varphi)\, s^m . \bar{s}^{m'} |s|^r (\mathrm{Log}\,|s|)^j.$$

D'après Fubini, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\varepsilon\leq|f|<1} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\varepsilon\leq|s|<1} F_\varphi(s)\frac{ds \wedge d\bar{s}}{|s|^2}$$

On a vu que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|s|<1}(F_\varphi(s)-F_\varphi(0))\frac{ds\wedge d\bar{s}}{|s|^2}=Pf(G_\varphi)(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^{2/k}(\mathrm{Log}\,\varepsilon)^2).$$

Donc, d'après cette dernière égalité, on doit avoir

$$m+m'+r>\frac{2}{k}\qquad\text{ou}\qquad m+m'+r=\frac{2}{k}\quad\text{et}\quad j\leqslant 2\quad(k\geqslant 2),$$

car, ce sont les deux seuls cas, pour lesquels, la contribution du terme $T^{r,\,j}_{m,\,m'}(\varphi)\,s^m.\bar{s}^{m'}\,|s|^r(\mathrm{Log}\,|s|)^j$ est contenue dans $\mathcal{O}(|s|^{2/k}(\mathrm{Log}\,|s|)^2)$.

Donc

$$F_\varphi(s)=F_\varphi(0)+\mathcal{O}(|s|^{2/k}(\mathrm{Log}\,|s|)^2).$$

Or, d'après Fubini, on a :

$$G_\varphi(\lambda)=\int_X|f|^{2\lambda}\varphi\wedge\frac{df}{f}\wedge\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}=\int_D|s|^{2\lambda}F_\varphi(s)\frac{ds\wedge d\bar{s}}{|s|}.$$

Et d'après le corollaire, le premier pôle de G_φ susceptible d'apparaître dans le demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda)<0$ est produit par le terme $T^{2/k}_{0,\,0}(\varphi)\,|s|^{2/k}(\mathrm{Log}\,|s|)^2$ de $F_\varphi(s)$, et ce pôle éventuel est donné par :

$$T^{2/k,\,2}_{0,\,0}(\varphi)\int_D|s|^{2/k+2\lambda}(\mathrm{Log}\,|s|)^2\frac{ds\wedge d\bar{s}}{|s|^2}=\frac{i\pi\,T^{2/k,\,2}_{0,\,0}(\varphi)}{(\lambda+(1/k))^3}.$$

Ceci nous prouve donc que le prolongement méromorphe de G_φ ne peut avoir de pôles dans la bande $-1/k<\mathrm{Re}(\lambda)<0$.

De plus si $-1/k$ est un pôle de ce prolongement, alors il est d'ordre au plus égal à 3.

D'autre part $F_\varphi(0)$ nous donne le pôle 0, qui est un pôle simple, de résidu égal au courant d'intégration sur $[f=0]$, et ce pôle est donné par :

$$F_\varphi(0)\int_D|s|^{2\lambda}\frac{ds\wedge d\bar{s}}{|s|^2}=\frac{2i\pi F_\varphi(0)}{\lambda}.$$

Exemple. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$f(X,Y,Z)=X^a+Y^b+Z^c,$$

où a, b et c sont des entiers positifs. Supposons que $a\leqslant b\leqslant c$ (a est donc la multiplicité de f à l'origine).

Si on prend $X=f^{-1}(D)$, où D est le disque unité dans $\mathbb{C}$, $f: X \to D$ est holomorphe, surjective et à singularité isolée à l'origine.

Notons $\tilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des germes en 0 des fonctions de la forme $F_\varphi(s)=\int_{f=s} \varphi$, où φ est une (2,2)-forme C^∞ à support compact dans X.

On a $C^\infty_{\mathbb{C},0} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, et soit $\mathcal{M}=\tilde{\mathcal{M}}/C^\infty_{\mathbb{C},0}$ muni d'une structure de $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$-module de type fini.

Le quotient

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/\left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}\right)$$

est de dimension finie égale au nombre de Milnor $\mu=(a-1)(b-1)(c-1)$, et ayant comme base $X^p Y^q Z^r$ avec

$$p \in [0, a-2], \qquad q \in [0, b-2] \qquad \text{et} \qquad r \in [0, c-2].$$

Si on pose

$$W=bcX\,dY \wedge dZ+caY\,dZ \wedge dX+abZ\,dX \wedge dY$$

et

$$W_{p,q,r}=X^p Y^q Z^r . W,$$

on a :

$$d(W_{p,q,r})=\left(\frac{p+1}{a}+\frac{q+1}{b}+\frac{r+1}{c}\right)\frac{df}{f} \wedge W_{p,q,r}.$$

(pour plus de détails *voir* [3]).

Et d'après [4], $\mathcal{M}$ est engendré par 1 et les germes en 0 des fonctions

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{f=s} \rho\, W_{p,q,r} \wedge \bar{W}_{p',q',r'}.$$

Le premier pôle de

$$G_\varphi(\lambda)=\int_X |f|^{2\lambda} \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}$$

est donné par le terme :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{f=s} \rho\, W \wedge \bar{W}.$$

Et un raisonnement simple de quasihomogénéité donne :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{f=s} \rho W \wedge \bar{W} = A\,|s|^{(2/a)+(2/b)+(2/c)} + C^{\infty}_{\mathbf{C},0}.$$

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{f=s} \rho W \wedge \bar{W}_{p,q,r} \in C^{\infty}_{\mathbf{C},0} \quad . \quad \text{pour} \quad (p, q, r) \neq 0.$$

En plus la constante A est non nulle, car si on suppose le contraire, on aura :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{f=s} \rho W \wedge \bar{\psi} \in C^{\infty}_{\mathbf{C},0},$$

pour toute forme différentielle de type (2,2) holomorphe et ceci est impossible d'après le théorème 2 de [5].

On peut également utiliser la méthode de [3] pour s'assurer que A est non nulle en calculant explicitement cette constante.

Le premier pôle du prolongmenet méromorphe de $G_{\varphi}(\lambda)$ après 0 est donc $-(1/a)-(1/b)-(1/c)$, qu'on peut rendre aussi proche de $-1/a$ en prenant b et c assez grands.

RÉFÉRENCES

[1] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration sur des fibres, *Inv. Math.*, vol. 68, 1982, p. 129-174.

[2] BARLET (D.). — Convexité de l'espace des cycles, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 106, 1976, p. 373-397.

[3] BARLET (D.). — *Forme hermitienne canonique dans le cas :* $X^a + Y^b + Z^c = 0$, Inst. E. Cartan, E.R.A. n° 839, octobre 1973, Preprint.

[4] BARLET (D.). — *Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée*, Inst. E. Cartan, E.R.A. n° 839, septembre 1983, Preprint.

[5] BARLET (D.). — Contribution du Cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 34, n 4, 1984.

[6] [6] BJÖRK (J.E.). — *Ring of differential operators*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[7] GUNNING-ROSSI. — *Analytic functions of several variables*, Prentice-Hall I.N.C., Englewood.

[8] HIRONAKA (H.). — Résolution of singularities of an algebrac variety over a field of characteristic zero, I and II, *Ann. Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-326.

[9] JEDDI (A.). — *Thèse de 3e cycle*, 1983, Nancy.

[10] KASHIWARA (M.). — *B*-functions and holonomic systems, *Inv. Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-54.

[11] NORGUET (F.) et ANDREOTTI (A.). — Quelques propriétés des courants définis à l'aide de fonctions holomorphes, vol. 37, n 3/4, *An da Acad. Brasileria de Ciencias*, 31 dezembro de 1965.