

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARINA VILLE

Sur le volume des variétés riemanniennes pincées

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 127-139

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__127_0

© Bulletin de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE VOLUME DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES PINCÉES

PAR

MARINA VILLE (*)

RÉSUMÉ. — Nous nous intéressons au volume des variétés riemanniennes dont la métrique est « proche » d'une métrique de courbure constante. En dimension paire, la formule de Gauss-Bonnet combinée avec une hypothèse de pincement (dépendant de la dimension) nous donne une minoration de ce volume. En dimension quelconque, on n'a qu'un résultat infinitésimal : on considère une métrique d'Einstein et on la fait varier de manière C^∞ , la variation première de la courbure scalaire étant de signe constant; on en déduit alors le signe de la variation première du volume.

ABSTRACT. — Our purpose is to study the volume of those riemannian manifolds the metric of which is "close" to a constantly curved one. In even dimension the Gauss-Bonnet formula together with a pinching hypothesis (depending on the dimension) yield a lower bound for this volume. In the general case we prove but an infinitesimal result: its setup is a C^∞ variation of metrics starting from an Einstein one. We assume that the first variation of the scalar curvature has a constant sign over the manifold and we derive the sign of the first variation of the volume.

I. Introduction

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à minorer le volume des variétés riemanniennes de courbure sectionnelle pincée en fonction du volume d'une éventuelle métrique de courbure sectionnelle constante. Le résultat essentiel de cet article est :

THÉORÈME 1. — *Pour tout entier $2n$ pair, il existe un réel strictement positif calculable ε_{2n} qui possède la propriété suivante : Si (M, g) est une*

(*) Texte reçu le 7 mai 1984, révisé le 3 juin 1986.

Marina VILLE, Université de Nancy-I U.E.R. Sciences Mathématiques, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex.

variété riemannienne compacte orientable de dimension $2n$ et dont la courbure sectionnelle vérifie

$$-1 \leq K < -1 + \varepsilon_{2n} \quad (\text{resp. } 1 - \varepsilon_{2n} < K \leq 1),$$

alors

$$(1) \quad \text{Vol}(M, g) \geq \frac{1}{2} (\text{Vol } S^{2n}) |\chi(M)|$$

l'égalité dans (1) ayant lieu si et seulement si g est de courbure constante -1 (resp. $+1$).

Si $2n=4$, $\varepsilon_4=18/17$ convient.

La démonstration de ce théorème est algébrique; elle consiste à prouver que, pour ε assez petit le tenseur de courbure constante -1 (resp. $+1$) réalise un maximum pour l'intégrand de Gauss-Bonnet parmi tous les tenseurs de courbure dont la courbure sectionnelle est comprise entre -1 et $-1 + \varepsilon$ (resp. 1 et $1 - \varepsilon$).

Remarques. — 1. Dans le cas de la courbure positive, on avait déjà la minoration classique (avec un bien meilleur pincement que celui du théorème 1) :

PROPOSITION 1. — *Si M est une variété riemannienne de dimension n , de courbure sectionnelle vérifiant :*

$$\begin{aligned} 1 \geq K > 0 & \quad \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \geq K > \frac{1}{4} & \quad \text{si } n \text{ est impair} \end{aligned}$$

alors

$$\text{Vol } M \geq \text{Vol } S^n$$

En effet, d'après le théorème de Rauch [Gü], si $p \in M$, $q \in M$, $q \in S^n$

$$\|\text{Jac exp}_p\| \geq \|\text{Jac exp}_q\|$$

et d'après le théorème de Klingenberg $i(M) \geq \Pi = \text{diam } S^n$, ce qui permet de conclure.

2. Dans le cas de la courbure négative, on a le résultat suivant de M. Gromov :

THÉORÈME 2 [Gr]. — Si M est compacte munie d'une métrique g_0 de courbure sectionnelle constante -1 et si g est une autre métrique sur M vérifiant $-1 \leq K \leq 0$, alors

$$\text{Vol}(M, g_0) \leq c_n \text{Vol}(M, g)$$

où c_n est une constante ne dépendant que de la dimension n de M .

3. J. Cheeger et M. Gromov ont récemment généralisé la formule de Gauss-Bonnet aux variétés complètes de volume fini et de courbure négative ([Ch-G]). Le théorème 1 s'applique donc aussi à ces variétés.

4. Ces questions s'inscrivent dans le cadre plus général des problèmes de volume minimal [Gr] :

DÉFINITION 1. — On appelle volume minimal d'une variété M la quantité

$$\text{Min Vol}(M) = \inf \text{Vol}(M, g)$$

où g décrit l'ensemble des métriques riemanniennes sur M qui sont complètes de volume fini et dont la courbure sectionnelle est comprise entre -1 et $+1$.

En dimension 2 la formule de Gauss-Bonnet donne immédiatement :

PROPOSITION 2. — Soit M une surface orientable compacte. Alors

$$\text{Min Vol}(M) = 2\pi |\chi(M)|.$$

Mais à partir de la dimension 3 on ne connaît aucune valeur du volume minimal lorsque celui-ci est non nul.

En dimension impaire il n'y a pas de formule intégrale; et si $\chi(M) = 0$ en dimension paire, la formule (1) ne donne rien. Dans tous les cas nous avons cependant des résultats infinitésimaux basés sur le fait que les métriques d'Einstein sont les points critiques de la fonctionnelle

$$g \mapsto \int_M \tau_g dV_g$$

(τ_g désigne la courbure scalaire) définie sur l'espace des métriques sur M de volume 1.

PROPOSITION 3. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n , $n \geq 3$. Alors

(i) (M, g) est d'Einstein si et seulement si pour toute variation $(g_t)_{|0, 1|}$ et g à volume constant,

$$\int_M \left(\frac{d}{dt} \tau^t \Big|_{t=0} \right) dV^0 = 0.$$

où τ^t désigne la courbure scalaire de g_t et dV^0 l'élément de volume de $g_0 = g$.

(ii) Supposons que (M, g) est effectivement d'Einstein et de courbure scalaire τ^0 non nulle; alors pour toute variation de métriques (g_t) la variation première du volume s'écrit :

$$\frac{d \text{Vol}(M, g_t)}{dt} \Big|_{t=0} = - \frac{n}{2 \tau^0} \int_M \left(\frac{d}{dt} \tau^t \Big|_{t=0} \right) dV.$$

(iii) Si (M, g) est d'Einstein de courbure scalaire nulle, pour toute variation de métriques $(g_t)_{|0, 1|}$, on a

$$\int_M \frac{d\tau^t}{dt} = 0.$$

Remarque. — Il n'y a donc pas, dans ce dernier cas, de variation (g_t) de métriques pour laquelle $d\tau^t/dt$ est partout non positif et négatif en au moins un point; ce qui confirme le fait connu (cf. [Bo]) suivant lequel l'application courbure scalaire

$$\begin{aligned} g &\mapsto \tau(g) \\ L^p(S^2 M) &\rightarrow L^p(M) \end{aligned}$$

n'est pas une submersion en une métrique Ricci-plate.

Ce travail constituait le début du doctorat de 3^e cycle de l'auteur. Elle remercie Marcel Berger pour ses conseils et encouragements; ainsi que Lionel Bérard Bergery et le referee qui lui ont suggéré des améliorations.

II. Démonstration du théorème

Posons

$$C_n = \frac{1}{2} \text{Vol } S^{2n}.$$

Nous allons faire la démonstration dans le cas de la courbure positive (dans celui de la courbure négative, la démonstration est presque identique). Soit donc M une variété riemannienne compacte orientable de dimension $2n$ et dont la courbure vérifie $1 \geq K \geq 1 - \eta \geq 0$. La démonstration va consister en la recherche d'une majoration pour η qui ne dépende que de la dimension de M et qui assure

$$\text{Vol } M \geq c_n |\chi(M)|.$$

N.B. Nous venons d'écrire $\eta \leq 1$; le cas de la dimension 4 où nous autorisons des valeurs de η plus grandes que 1 (voir l'énoncé du théorème 1) sera traité séparément plus bas.

1. FORMULE DE GAUSS-BONNET

La formule de Gauss-Bonnet est la clé du raisonnement. Rappelons-la [Sp] :

$$\int_M \mathcal{G} = C_n \chi(M).$$

où \mathcal{G} est une $2n$ -forme sur M que nous allons expliciter. Soit $X = (X_1, \dots, X_{2n})$ un repère orthonormé positif mobile, dX^1, \dots, dX^{2n} les 1-formes duales associées et Ω_j^i les 2-formes de courbure associées. Alors

$$\mathcal{G} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma) \mathcal{G}^\sigma$$

où

$$\mathcal{G}^\sigma = \Omega_{\sigma(2)}^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2n)}^{\sigma(2n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\tau)$$

$$R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\sigma(1)\tau\sigma(2)} \dots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\sigma(2n-1)\tau\sigma(2n)}.$$

Posons

$$\mathcal{G} = G dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{2n}$$

$$\mathcal{G}^\sigma = G^\sigma dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{2n}.$$

où les G et G° sont des fonctions de M dans \mathbb{R} : il est en effet bien clair qu'elles ne dépendent pas du repère orthonormé choisi.

LEMME 1. — Si en tout point de M , on a

$$|G| \leq 1$$

alors

$$\text{Vol } M \geq C_n |\chi(M)|$$

Démonstration. — C'est à peu près évident

$$\begin{aligned} C_n |\chi(M)| &= \left| \int_M G dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{2n} \right| \\ &\leq \int_M |G| dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{2n} \leq \text{Vol } M \quad \square \end{aligned}$$

Faisons-nous désormais et pour toute la suite en un point donné p de M . Nous allons y construire un repère orthonormé direct dans lequel nous écrirons G pour montrer que pour un η assez petit G satisfait aux exigences du lemme 1.

La grassmannienne étant compacte, il existe un plan Π dans $T_p M$ dont la courbure est $\inf_{P \in G_2(T_p M)} K_P$ (Dans le cas de la courbure négative on aurait pris au contraire le plan où la courbure sectionnelle atteint sa borne supérieure). Notre repère va consister en une base orthonormée X_1, X_2 de Π complétée en une base orthonormée directe X_3, \dots, X_{2n} de son orthogonal.

$$\text{Posons } K_\Pi = 1 - \eta_p.$$

2. QUELQUES DÉFINITIONS

Avant d'aborder l'étude de G , voici quelques définitions techniques

DÉFINITION 2. — Un coefficient R_{ijkl} du tenseur de courbure sera dit non trivial si et seulement si $i \neq j$ et $k \neq l$.

DÉFINITION 3. — Un coefficient non trivial R_{ijkl} de R sera dit à deux indices si et seulement si $\{i, j\} = \{k, l\}$. Il sera dit à plus de deux indices sinon.

L'intérêt de ces définitions vient du lemme suivant :

LEMME 2. — Un coefficient R_{ijkl} du tenseur de courbure de M en p vérifie

$$|R_{ijkl}| \leq 1$$

et s'il est à plus de deux indices,

$$|R_{ijkl}| \leq \frac{2}{3} \eta_p.$$

Démonstration. — C'est trivial, compte tenu des inégalités de Berger pour les coefficients d'un tenseur de courbure de courbure sectionnelle pincée ([Be]). \square

Rappelons maintenant que G est combinaison linéaire de termes, (que nous appellerons termes élémentaires) du type

$$R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\sigma(1)\tau\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\sigma(2n-1)\tau\sigma(2n)}.$$

DÉFINITION 4. — Un terme élémentaire sera dit de type I si tous les facteurs $R_{\sigma(i)\sigma(j)\tau\sigma(i)\tau\sigma(j)}$ qui le composent sont à deux indices; il sera dit de type II sinon.

Enfin notons

$$A^\sigma = \frac{1}{2^n} \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\sigma(1)\tau\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\sigma(2n-1)\tau\sigma(2n)}$$

où l'on somme sur tous les termes de type I,

$$B^\sigma = \frac{1}{2^n} \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\sigma(1)\tau\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\sigma(2n-1)\tau\sigma(2n)}$$

où l'on somme cette fois-ci sur tous les termes de type II,

$$A = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} A^\sigma, \quad B = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} B^\sigma.$$

On a alors $G = A + B$, $G^\sigma = A^\sigma + B^\sigma$.

3. ÉTUDE DES TERMES DE TYPE II

LEMME 3. — Si

 $X = R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$ est un terme de type II, alors

$$|X| \leq \frac{4}{9} \eta_p^2$$

Démonstration. — Par hypothèse, X a au moins un facteur qui est à plus de deux indices, soit par exemple $R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)}$; nous allons montrer qu'il contient en fait au moins deux tels facteurs. En effet,

$$\{\sigma(1), \sigma(2)\} \neq \{\tau\circ\sigma(1), \tau\circ\sigma(2)\}$$

et donc, en passant au complémentaire,

$$\{\sigma(3), \sigma(4), \dots, \sigma(2n)\} \neq \{\tau\circ\sigma(3), \tau\circ\sigma(4), \dots, \tau\circ\sigma(2n)\}$$

On ne peut donc pas avoir pour tout $k > 1$,

$$\{\sigma(2k-1), \sigma(2k)\} = \{\tau\circ\sigma(2k-1), \tau\circ\sigma(2k)\}.$$

Il y a donc encore un autre facteur à plus de deux indices. On applique alors le lemme 2 et le lemme 3 est démontré. \square

On en déduit immédiatement le

LEMME 4. — $|B| \leq b_n \eta_p^2$ où b_n ne dépend que de la dimension $2n$ de M .

4. ÉTUDE DES TERMES DE TYPE I

Soit σ un élément quelconque de \mathfrak{S}_{2n} .

Alors

$$A^\sigma = \frac{1}{2^n} \sum_{\tau \in T^\sigma} \varepsilon(\tau) R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\circ\sigma(1)\tau\circ\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\circ\sigma(2n-1)\tau\circ\sigma(2n)}$$

où T^σ est l'ensemble des permutations de \mathfrak{S}_{2n} qui vérifient

$$\{\sigma(2k-1), \sigma(2k)\} = \{\tau\circ\sigma(2k-1), \tau\circ\sigma(2k)\}, \quad 1 \leq k \leq n$$

c'est-à-dire le sous-groupe de \mathfrak{S}_{2n} engendré par les transpositions

$$(\sigma(2k-1) \sigma(2k)), \quad 1 \leq k \leq n.$$

LEMME 5. — $A^\sigma = K_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$, où K_{ij} désigne la courbure sectionnelle du plan engendré par X_i et X_j .

Démonstration. — Considérons un élément τ de T^σ ; τ s'écrit de façon unique $\prod_{k=1}^n (\sigma(2k-1) \sigma(2k))^{a_k}$ avec $a_k = 0$ ou 1. Il est alors clair que

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{k=1}^n a_k.$$

D'autre part,

$$R_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)\tau\sigma(2k-1)\tau\sigma(2k)} = \begin{cases} K_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} & \text{si } a_k = 1 \\ -K_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} & \text{si } a_k = 0. \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} &R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau\sigma(1)\tau\sigma(2)} \cdots R_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)\tau\sigma(2n-1)\tau\sigma(2n)} \\ &= (-1)^{\sum a_k} K_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} = \varepsilon(\tau) K_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} \end{aligned}$$

d'où

$$A^\sigma = \frac{1}{2^n} (\# T^\sigma) K_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots K_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

et on achève la démonstration du lemme 5 en remarquant que T^σ est de cardinal 2^n . \square

Il est donc clair que l'on a, pour toute permutation σ ,

$$(1 - \eta_p)^n \leq A^\sigma \leq 1$$

Considérons maintenant $A^{Id} = K_{12} \cdots K_{n-1n}$.

LEMME 6. — $A^{Id} \leq 1 - \eta_p + a_{2n} \eta_p^2$ où a_{2n} est une constante positive ne dépendant que de la dimension $2n$ de M .

Démonstration. Posons, pour tout couple (i, j) ,

$$K_{ij} = 1 - \eta_{ij} \quad (\text{donc } \eta_{12} = \eta_p)$$

Alors $A^{Id} = (1 - \eta_{12}) \cdots (1 - \eta_{n-1n})$.

On développe ce produit :

$$A^{\text{Id}} = 1 - \sum_k \eta_{2k-1} \eta_{2k} + P_{2n}(\eta_{12}, \dots, \eta_{2n-1} \eta_{2n}) \\ \leq 1 - \eta_p + P_{2n}(\eta_{12}, \dots, \eta_{2n-1} \eta_{2n})$$

où P_{2n} est un polynôme en les η_{ij} (à coefficients ne dépendant bien sûr que de la dimension $2n$) dont tous les termes sont au moins de degré total 2. Il existe donc une constante a_{2n} telle que

$$|P_{2n}(\eta_{12}, \dots, \eta_{n-1} \eta_n)| \leq a_{2n} \eta_p^2$$

(puisque $\eta_{12} = \eta_p$ est le sup des η_{ij}).

Le lemme 6 est démontré.

5. DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (1).

Nous connaissons maintenant tous les termes de G et nous voyons que

$$-b_{2n} \eta_p^2 \leq n! G \leq n! - \eta_p + (a_{2n} + b_{2n}) \eta_p^2 + (n! - 1)$$

et donc il existe un $\varepsilon_{2n} > 0$ tel que

$$(\forall p \in M \ \eta_p \leq \varepsilon_{2n}) \Rightarrow |n! G| \leq n!$$

Donc M vérifie les hypothèses du lemme 1 et donc

$$(\star) \quad \text{Vol } M \geq C_n |\chi(M)|$$

Et l'égalité (\star) a lieu si et seulement si $G \equiv 1$, c'est-à-dire si η_p est nul pour tout p , ce qui signifie que M est de courbure sectionnelle constante +1.

6. CAS DE LA DIMENSION 4

On construit en chaque point p de M le repère orthonormé direct (X_1, X_2, X_3, X_4) suivant (cf. [Ch]) :

X_1 et X_2 engendrent un plan P_1 où la courbure sectionnelle atteint son minimum (resp. son maximum) sur $G_2(T_p M)$; X_1, X_3 engendrent un plan P_2 dont la courbure sectionnelle est minimale (resp. maximale) parmi tous les plans de $G_2(T_p M)$ possédant un vecteur non nul commun avec P_1 et un autre vecteur non nul commun avec P_1^\perp .

Alors (cf. [Ch]), G s'écrit à l'aide de ce repère

$$G = \frac{1}{3} (\sigma_{12} \sigma_{34} + \sigma_{13} \sigma_{24} + \sigma_{14} \sigma_{23} + R_{1234}^2 + R_{1342}^2 + R_{1423}^2)$$

où, en reprenant les notations de la page précédente,

$$\sigma_{12} = 1 - \eta_p \quad (\text{resp. } \sigma_{12} = -1 + \eta_p)$$

D'autre part, on a le lemme :

$$\text{LEMME 7. — } R_{1234}^2 + R_{1342}^2 + R_{1423}^2 \leq \frac{8}{9} \eta_p^2.$$

Démonstration. — L'identité de Bianchi s'écrit :

$$R_{1234} + R_{1342} + R_{1423} = 0$$

donc deux de ces termes au moins, soit par exemple les deux premiers sont de même signe. Alors

$$R_{1423} = -(R_{1234} + R_{1342})$$

et

$$|R_{1423}| = |R_{1234}| + |R_{1342}|$$

donc

$$R_{1234}^2 + R_{1342}^2 \leq R_{1423}^2$$

et

$$R_{1234}^2 + R_{1342}^2 + R_{1423}^2 \leq 2 R_{1423}^2 \leq 2 \left(\frac{2}{3} \eta_p \right)^2 = \frac{8}{9} \eta_p^2$$

d'après [Be]. \square

Nous allons maintenant distinguer deux cas :

1^{er} cas. $\eta_p \leq 1$. Alors $3G - 3 \leq -\eta_p + (8/9) \eta_p^2$.

2^e cas. $\eta_p \geq 1$. Alors $\sigma_{12} \sigma_{34} \leq (1 - \eta_p)^2$ (pour s'en convaincre, on pourra considérer séparément les cas où $\sigma_{34} \geq 0$ et $\sigma_{34} \leq 0$) et

$$3G - 3 \leq -2\eta_p + \frac{17}{9} \eta_p^2 < 0$$

tant que

$$\eta_p < \varepsilon_4 = \frac{18}{17}.$$

Le théorème 5 est démontré.

Remarques. — 1. La valeur 18/17 n'est sans doute pas optimale.

2. Les dimensions supérieures se présentent beaucoup moins favorablement; en effet, les $\varepsilon_{2,n}$ qu'on obtient tendent vers 0 quand n tend vers l'infini et ce, très rapidement : $\varepsilon_6 \simeq 0,05$. Cependant si $n = 4k$, en utilisant les expressions pour la forme de Gauss-Bonnet données dans [Th], on obtient de meilleures valeurs pour $\varepsilon_{4,k}$ (par exemple $\varepsilon_8 \simeq 1/2$) mais qui tendent quand même vers 0 à l'infini.

III. Démonstration de la proposition 3

Supposons que (M, g) est d'Einstein et considérons une variation (g_t) de métriques; on notera dV^t la forme volume de g_t , et $\text{Vol}^t = \text{Vol}(M, g_t)$.

Les dV^t étant de degré maximal sont liées point par point donc il existe des fonctions $f^t : M \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'en tout point p de M ,

$$dV^t = f^t(p) dV^0$$

Nous allons maintenant normaliser les g_t : posons pour tout t

$$\tilde{g}_t = \frac{1}{(\text{Vol}^t)^{2/n}} g_t$$

où n désigne la dimension de M .

Les \tilde{g}_t étant toutes de volume 1, nous pouvons appliquer le résultat de [Hi] qui nous dit que les métriques d'Einstein sont les points critiques de la fonctionnelle

$$g \mapsto \int_M \tau_g dV$$

où g parcourt l'espace des métriques riemanniennes de volume 1. Et donc, si on définit la fonction réelle φ par

$$\varphi(t) = \int_M \tilde{\tau}^t d\tilde{V}^t = (V^t)^{n/2} \int_M \tau^t f^t dV^0$$

on a

$$(2) \quad \varphi'(0) = 0$$

($\tilde{\tau}^t$ désigne bien sûr la courbure scalaire de \tilde{g}_t et $d\tilde{V}^t$ son élément de volume). Les fonctions intervenant dans la définition de φ sont C^∞ donc on peut dériver sous le signe somme et (2) s'écrit :

$$(3) \quad \frac{2}{n} \tau^0 \left(\frac{d}{dt} \text{Vol}^t \Big|_{t=0} \right) = - \int_M \left(\frac{d\tau^t}{dt} \Big|_{t=0} \right) dV^0.$$

Ceci démontre (ii), (iii) et un sens de (i); et l'autre sens de (i) est alors immédiat en remontant les calculs.

C.Q.F.D.

Remarque. — Lionel Bérard Bergery me fait remarquer qu'on peut démontrer l'égalité (3) en utilisant la variation première du volume et de la courbure scalaire (cf. [Bes], proposition 1.188).

BIBLIOGRAPHIE

- [Be] BERGER (M.). — Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. math. France*, vol. 88, 1960, p. 57-71.
- [Bo] BOURGUIGNON (J.-P.). — Une stratification de l'espace des métriques riemanniennes, *Composition math.*, vol. 30, 1975, p. 1-41.
- [Bes] SÉMINAIRE ARTHUR BESSE. — *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1986.
- [Ch-E] CHEEGER (J.) and EBIN (D. G.). — Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland mathematical Library, vol. 9.
- [Ch] CHERN (S. S.). — On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 20, 1956, p. 117-126.
- [Ch-G] CHEEGER (J.) and GROMOV (M.). — On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, *Differential Geometry and Analysis*, ed. by Chavel and Farkas, Springer, 1985, p. 115-154.
- [Gr] GROMOV (M.). — Volume and bounded cohomology, *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, n° 56, 1983, p. 213-307.
- [Gü] GÜNTHER (P.). — Über das Volumenelement eines Riemannschen Raumes *Publ. Math. Debrecen.*, Vol. 7, 1960, p. 78-93.
- [Hi] HILBERT (D.). — Die Grundlagen des Physik, *Nachr. Ges. Wiss. Gött.*, 1915, p. 395-407.
- [Sp] SPIVAK (M.). *A comprehensive introduction to differential Geometry*, t. 5, Publish or Perish, 1975.
- [Th] THORPE (J. A.). — Some remarks on the Gauss-Bonnet integral, *Jour. Math. Mec.*, vol. 18, n° 8, 1969, p. 779-786.