BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Note sur la marche du cavalier dans un échiquier

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 17-24
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__17_1>

Note sur la marche du cavalier dans un échiquier; par M. de Polignac.

(Séance du 21 mai 1880.)

1. Dans les développements intéressants que M. Laquière a récemment adressés à la Société sur le problème du cavalier, se trouve une méthode qui avait déjà été indiquée par moi. Elle consiste à chercher des solutions rentrantes dont les deux moitiés soient symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de l'échiquier et à remplacer la marche irrégulière du cavalier par une suite de circuits partiels, déterminés à l'avance et qui servent à la décomposition et à la notation de l'échiquier. Ce procédé a fait de ma part l'objet d'une Note insérée dans les *Comptes rendus des*

séances de l'Académie des Sciences (avril 1861). Appliqué aux échiquiers de trente-six et de soixante-quatre cases, il conduit, par des transformations convenables, à des solutions rentrantes pour un échiquier quelconque (d'un nombre pair de cases).

Voici comment on peut noter la solution type dans l'échiquier ordinaire.

Prenons pour origine des coordonnées le coin inférieur gauche de l'échiquier et pour axes les deux côtés qui y aboutissent. Soient $x=1, y=1$ les coordonnées de la case du coin; on formera un circuit partiel rentrant avec les quatre cases

$$\begin{array}{llll} x=1, & x=3, & x=4, & x=2, \\ y=1, & y=2, & y=4, & y=3. \end{array}$$

Notons de la même lettre a chacune des cases de ce circuit : ce sera le circuit a.

On obtiendra également un circuit b de quatre cases en partant de la case b, dont les coordonnées sont $\begin{smallmatrix} x=2 \\ y=1 \end{smallmatrix}$.

De même la case c, $\begin{smallmatrix} x=2 \\ y=2 \end{smallmatrix}$, et la case d, $\begin{smallmatrix} x=1 \\ y=2 \end{smallmatrix}$, fourniront deux nouveaux circuits rentrants de quatre cases chacun.

Les quatre circuits a, b, c, d remplissent un carré de seize cases, un des quatre carrés élémentaires dans lesquels se décompose l'échiquier au moyen de deux lignes rectangulaires tracées par son centre.

Les trois autres carrés élémentaires se noteront de même, savoir :

Le carré élémentaire opposé par le sommet à celui qu'on vient d'achever, par les mêmes lettres a, b, c, d placées respectivement sur les mêmes cases que dans celui-ci.

Les deux carrés restants se noteront d'après la même règle, en remplaçant les lettres a, b, c, d par A, B, C, D ; ainsi, par exemple, une des lettres A du carré élémentaire inférieur sera sur la case, $x=5$, $y=1$.

L'échiquier étant ainsi préparé, partons de la case $\begin{smallmatrix} x=2 \\ y=3 \end{smallmatrix}$ qui appartient au circuit a, et parcourons-le dans le sens suivant :

$$\begin{array}{llll} x=2, & x=1, & x=3, & x=4, \\ y=3, & y=1, & y=2, & y=4, \end{array}$$

que nous conviendrons de conserver dans tous les autres circuits. La première moitié de la solution s'écrira

$$a\,A\,b\,B\,C\,c\,D\,d;$$

on peut encore l'écrire

$$\begin{array}{cccc} a & b & C & D \\ A & B & b & c, \end{array}$$

en convenant de lire les lettres par colonne : l'une ou l'autre forme suggère des règles mnémoniques faciles à formuler.

Comme on a noté des mêmes lettres, afin d'éviter l'emploi des accents, les cases appartenant aux carrés élémentaires opposés, la formule précédente devient ambiguë au dernier circuit d, qui pourrait appartenir à l'un quelconque des deux carrés supérieur ou inférieur. C'est dans le carré supérieur qu'il faudra prendre d. On serait, du reste, conduit fatalement à ce résultat en portant sur l'échiquier le parcours qui vient d'être écrit, car, si l'on prenait d dans le carré inférieur, on obtiendrait un circuit rentrant de trente-deux cases seulement, et la marche totale ne pourrait plus être rentrante. Dans tout le reste du parcours, la marche annotée sera *unique,* pourvu qu'on ait soin de rejeter les circuits symétriques de ceux déjà parcourus.

La seconde moitié de la solution s'écrira par la même formule, en commençant à la case $a\,{}^{x\,=\,7}_{y\,=\,6}$ du carré élémentaire supérieur, symétrique par rapport au centre de la case initiale ${}^{x\,=\,2}_{y\,=\,3}$.

Pour justifier cette assertion, il suffit d'observer les deux points suivants :

1° Dans l'échiquier annoté, il y a deux circuits marqués a, deux marqués A et C, situés dans des carrés élémentaires opposés par le sommet et composés de cases symétriques par rapport au centre. Or, dans le parcours $aAbBCcD$, chaque lettre n'entre qu'une fois. Donc toutes les cases symétriques de celles dont ce parcours se compose sont libres.

2° On vérifiera en traçant la figure (ou en faisant le calcul par coordonnées, ce qui serait possible, quoique long), que la trente-deuxième case du parcours annoté, c'est-à-dire la dernière du circuit d supérieur, est la case $\begin{matrix} x=6 \\ y=8 \end{matrix}$, de laquelle on peut passer à la case $\begin{matrix} x=7 \\ y=6 \end{matrix}$, symétrique de la case initiale. Donc les deux demi-solutions symétriques se *raccordent* et la seconde aboutira à la case $x=5, y=1$, ce qui donne une marche rentrante.

Pour faciliter l'intelligence de ce qui précède, je donne ici l'échiquier figuré par les lettres qui le composent :

C	D	B	A	*c*	*d*	*b*	*a*
B	A	C	D	*b*	*a*	*c*	*d*
D	C	A	B	*d*	*c*	*a*	*b*
A	B	D	C	*a*	*b*	*d*	*c*
c	*d*	*b*	*a*	C	D	B	A
b	*a*	*c*	*d*	B	A	C	D
d	*c*	*a*	*b*	D	C	A	B
a	*b*	*d*	*c*	A	B	D	C

En lui appliquant la solution

$$a\mathrm{A}b\mathrm{B}\mathrm{C}c\mathrm{D}d,$$

on verra qu'on peut encore l'énoncer ainsi :

Prendre les lettres par couples dans l'ordre alphabétique et commençant dans le carré élémentaire gauche inférieur ; continuer à tourner dans les trois autres toujours dans le même sens (¹).

Sans la restriction imposée ici, on arriverait, en tournant toujours dans le même sens, à placer le cycle d de la demi-solution dans le carré initial, comme il a été dit plus haut. En continuant, on obtiendra une solution non rentrante, qui s'écrira

$$a\mathrm{A}b\mathrm{B}\mathrm{C}c\mathrm{D}d;\ \mathrm{D}da\mathrm{A}b\mathrm{B}\mathrm{C}c$$

L'échiquier de trente-six cases se note d'une façon analogue, indiquée ci-dessous ; les cases symétriques par rapport au centre sont toujours marquées des mêmes lettres, ainsi que les circuits

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, loc. cit.*

partiels, qui sont de trois lettres, mais ils ne sont plus rentrants ; d'ailleurs, la décomposition en carrés élémentaires ne s'applique plus :

A	.	.	C	.	.
.	C	A	.	.	.
c	A	.	.	.	.
C	*a*	*b*	B	.	.
b	*c*	*a*	.	.	B
a	*b*	.	*c*	B	.

La demi-solution s'écrit très symétriquement ainsi :

$$a\mathrm{B}c\mathrm{A}b\mathrm{C}.$$

La case initiale est ($x = 1$, $y = 3$) et la solution est rentrante, car la case finale C du demi-parcours est *conjuguée* de la symétrique de la case initiale.

Revenons à l'échiquier de soixante-quatre cases. On obtiendra d'autres solutions symétriques en modifiant les conditions du parcours, par exemple en s'interdisant d'écrire à côté l'une de l'autre deux mêmes lettres (majuscule et minuscule), à l'inverse de ce qui avait été fait d'abord, etc. Parmi les solutions de ce type, je citerai la suivante, rentrante et à deux parties symétriques, dans la notation de laquelle on a, pour éviter toute confusion, distingué par des accents les cycles symétriques ; les lettres non accentuées s'appliquent aux deux carrés élémentaires inférieurs :

$$(1) \qquad a d' \mathrm{C B} c \mathrm{D A} b', \quad a' d \mathrm{C' B'} c' \mathrm{D' A'} b.$$

On peut prendre pour case initiale *ad libitum* $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$; seulement tous les cycles n'y sont plus parcourus dans le même sens, ce qu'indique suffisamment la succession des lettres.

Le procédé d'Euler appliqué à cette solution permettra de la transformer en une autre, commençant à un coin et finissant à un autre coin. Je n'ai pas à revenir ici sur ce procédé, dont il est fait mention dans la *Théorie des nombres* de Legendre. Les transformations ci-dessous le mettront d'elles-mêmes en lumière. Comme ces transformations conduisent à séparer les cases d'un même cycle, on a employé des indices indiquant le rang de ces mêmes cases dans la solution dont on est parti et dans leurs cycles respectifs; les lignes verticales indiquent les interversions dans la marche au moment où l'on passe d'une case intérieure à la dernière:

$$(2) \qquad a_2 a'_3 a_4 d' \ldots A' \mid a_1 b_4 b_3 b_2 b_1,$$

$$(3) \qquad a_2 \ldots C' B' \mid b a_1 A' D' c',$$

$$(4) \qquad a_2 \ldots C'_1 C'_2 \mid c' \ldots a_1 b B' C'_4 C'_3.$$

Cette dernière solution commence à l'angle inférieur gauche et finit à l'angle supérieur du même côté.

2. *Extension à un échiquier quelconque; solutions rentrantes.* — Tous les échiquiers d'un nombre pair de cases peuvent se diviser en deux classes, ceux de la forme $(6 + 4n)^2$ et ceux de la forme $(8 + 4n)^2$.

Occupons-nous de ces derniers. On les formera successivement en ajoutant deux bandes à tous les côtés de l'échiquier précédent. Ils se déduiront donc tous de proche en proche de l'échiquier de soixante-quatre cases.

Les deux bandes extérieures sur chaque côté de l'échiquier $(8 + 4n)^2$ forment une zone quadrangulaire. Détachons-la par la pensée du reste de l'échiquier. On peut avec le cavalier parcourir *la moitié* de cette zone en partant d'un coin, soit le coin inférieur gauche, et tournant toujours dans le même sens, et la dernière case de ce circuit partiel sera *conjuguée* du coin inférieur gauche de l'échiquier $[8 + 4(n - 1)]^2$. En détachant de même une zone quadrangulaire de ce dernier, on en parcourra la moitié, et, en répétant ce procédé, on arrivera au coin inférieur gauche de l'échiquier de soixante-quatre cases. A celui-ci on appliquera la solution (4) donnée ci-dessus, qui finit à l'angle supérieur gauche, et l'on verra qu'on peut parcourir dans l'ordre inverse les moitiés des zones restées libres; on aura ainsi une solution non rentrante pour l'échiquier $(8 + 4n)^2$.

Ci-joint le Tableau de ce procédé appliqué à l'échiquier de cent quarante-quatre cases:

144	35	.	15	.	33	.	13	.	31	.	11
105	16	.	34	.	14	.	32	.	12	.	30
36	125	104	.	.	.	.	.	.	.	10	.
17	106	.	.	.	.	.	.	.	.	29	.
126	37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9
.	18	93	.	.	.	.	.	.	.	.	28
38	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
19	.	.	.	94	.	.	.	.	.	27	.
.	39	78	.	.	.	.	.	.	.	.	7
.	20	41	.	77	.	.	.	.	.	.	26
40	.	2	.	22	.	4	.	24	.	6	.
1	.	21	.	3	.	23	.	5	.	25	.

Les cases marquées 41 et 104 sont les cases initiale et finale de la solution (4) de l'échiquier ordinaire.

On rendra cette solution rentrante dans le cas général au moyen de la remarque suivante.

Remarque. — Si dans une solution quelconque

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ l\ l+1\ \ldots\ m\ m+1\ \ldots\ n\ n+1\ \ldots\ z,$$

la dernière case z étant conjuguée de n, on a en même temps

$$n+1 \quad \text{conjuguée de } m,$$
$$m+1 \quad \text{conjuguée de } l$$

ou enfin

$$l+1 \quad \text{conjuguée de } 1,$$

on pourra rendre le parcours rentrant par des transformations successives, et cela quel que soit le nombre des cases l, m, n, pourvu que leurs *rangs aillent en croissant.*

Cette remarque, dont la démonstration est facile, s'appliquera à toutes les solutions dont le type vient d'être donné, et les cases l, m, n, ... occuperont des places déterminées qui se déduiront très simplement les unes des autres en passant d'un échiquier au suivant. Pour mettre ce fait complètement en évidence, il faudrait tracer des figures et entrer dans de plus grands développements que n'en comporte cette courte Note; mais le lecteur curieux de vérifier l'assertion trouvera dans la remarque qui vient d'être faite les éléments de la vérification.

Dans l'échiquier de cent quarante-quatre cases, les lettres l, m, ... sont

$$l = 19, \quad m = 77, \quad n = 93, \quad p = 125.$$

On peut vérifier sur le Tableau précédent que les cases marquées de ces numéros satisfont à la loi énoncée dans la remarque.

Tout ce qui précède s'étendra aux échiquiers de la forme $(6+4n)^2$ qui se déduisent de l'échiquier de trente-six cases par la juxtaposition de bandes. Les zones formées par ces bandes se rempliront de même par moitié jusqu'à ce qu'on arrive à l'échiquier de trente-six cases, dont on aura dû, au préalable, transformer la solution rentrante par le procédé d'Euler. En commençant cette solution rentrante à l'angle inférieur gauche, l'interversion se fera sur la trente et unième case du circuit et la case finale sera située à la gauche de celle qui occupe l'angle supérieur de droite.

L'échiquier de seize cases n'admet aucune solution. D'ailleurs, les échiquiers impairs n'en admettent pas de rentrantes. Les formules précédentes fournissent tous les autres échiquiers.