BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC CHARDIN

Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 3 (1989), p. 305-318

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_305_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 305–318.

UNE MAJORATION DE LA FONCTION DE HILBERT ET SES CONSÉQUENCES POUR L'INTERPOLATION ALGÉBRIQUE

PAR

MARC CHARDIN (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons ici une majoration de la fonction de Hilbert d'un idéal homogène géométriquement réduit, en fonction des degrés et dimensions des composantes de la variété algébrique associée ; cette majoration étant valable en tous degrés il nous est alors possible d'obtenir des résultats d'interpolation ainsi que de former une suite régulière de polynômes de l'idéal en contrôlant leurs degrés.

ABSTRACT. — A new upper bound for the Hilbert function of a homogeneous, geometrically reduced, ideal is given, depending only on the dimensions and degrees of the components of the associeted variety ; this bound, valid in all degrees, allows us to give interpolation results and also to construct a regular sequence of polynomials belonging to the ideal with controlled degrees.

Plan

(*) Texte reçu le 18 avril 1988, révisé le 6 juillet 1988.

M. CHARDIN, Université de Paris VI, U.A. au CNRS n° 763 "Problèmes diophantiens", Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05 et Centre de Mathématiques U.A. au CNRS n° 169, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

Introduction

Si I est un idéal homogène de $k[X_0,\ldots,X_n]$, on définit la fonction de Hilbert de I par

$$H_I(\nu) = \dim_k\big(k[X_0,\ldots,X_n]/I\big)_\nu .$$

On montre classiquement (voir [H], Ch. I, theorem 7.5 par exemple) que $H_I(\nu)$ est une fonction polynomiale de ν pour ν "assez grand", dont les coefficients se calculent simplement à partir des genres des sections linéaires générales de la variété définie par I. On a en particulier $H_I(\nu) = (\nu^D/D!)\deg I + \cdots$ pour ν "assez grand" où les points désignent des termes de degré inférieur en ν et où D et $\deg I$ désignent respectivement la dimension et le degré de l'idéal I.

Nous donnons ici une majoration de H_I dans le cas où l'idéal I est équidimensionnel et géométriquement réduit (*i.e.* les idéaux premiers associés à I sont de même dimension et $k[X_0,\ldots,X_n]/I$ est une k-algèbre séparable), en abrégé E.G.R. . Un exemple important est celui d'un idéal premier avec k parfait ([BA], Ch.V, § 15, n° 4, théorème 2).

Ce résultat découle d'une simplification de la méthode employée par Yu. V. Nesterenko dans [Ne]; il améliore assez sensiblement — et généralise — le résultat obtenu par celui-ci dans cette direction.

Énonçons le résultat central :

Théorème. — *Soient k un corps et $R = k[X_0,\ldots,X_n]$.*
Soient I un idéal homogène E.G.R. de R, de dimension $D \geq 0$ et H_I la fonction de Hilbert de I. On a alors :

$$H_I(\nu) \leq \binom{\nu + D}{D}\deg I \qquad \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

Ce résultat permet notament de construire des suites régulières de polynômes de $k[X_0,\ldots,X_n]$ avec des éléments de l'idéal I ; citons les deux corollaires suivants que nous démontrerons plus loin :

(1) Sous les hypothèses du théorème, il existe une suite régulière $P_1,\ldots,P_{n-D}$ de polynômes de I avec $\deg P_r \leq [((D+r)!/D!)\deg I]^{1/r}$.

(2) Dans le cas où I est premier G.R. de codimension deux, il existe P_1 et P_2 dans I sans facteur commun avec $\deg P_1 \deg P_2 \leq n(n-1)\deg I$.

Terminons cette introduction en énonçant une conjecture à propos de laquelle nous donnerons un résultat partiel à la fin de cet article :

Conjecture. — Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier G.R. homogène de codimension r de $k[X_0,\ldots,X_n]$ et s un entier inférieur ou égal à r, il existe un idéal premier homogène $\mathfrak{Q}$, contenu dans $\mathfrak{P}$, dont la codimension est s et qui vérifie :

$$[\deg \mathfrak{Q}]^{1/s} \leq C_n [\deg \mathfrak{P}]^{1/r}$$

où C_n est une constante ne dépendant que de n.

1. Démonstration du théorème

a) Réductions.

Notons

$$A = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = k[x_0, \dots, x_n] = k[X_0, \dots, X_n]/I.$$

On remarque tout d'abord que la fonction de Hilbert est invariante par extension des scalaires. En effet : $\dim_k A_\nu = \dim_{\bar{k}} (A \otimes_k \bar{k})_\nu$ où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. D'autre part l'idéal étendu I^e est également équidimensionnel ([Z-S 2], Ch. VII, § 11, theorem 36, corollary 1). La $\bar{k}$–algèbre $A \otimes_k \bar{k}$ est par hypothèse réduite.

Ces deux résultats font qu'il nous suffit de faire la démonstration dans le cas d'un corps algébriquement clos.

La réduction suivante consiste à se ramener au cas d'un idéal premier, pour cela il suffit de considérer l'injection canonique $k[X_0, \dots, X_n]/I \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_i$, où $\mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_r$ est la décomposition primaire réduite de I. Les $\mathfrak{P}_i$ sont, d'après nos hypothèses, premiers et de même dimension.

Nous sommes ainsi ramenés au cas d'un idéal premier.

b) Le cas d'un idéal premier, avec corps de base algébriquement clos. Nous noterons $\mathfrak{P}$ l'idéal premier et :

$$A = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = k[x_0, \dots, x_n] = k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{P}.$$

Puisque k est algébriquement clos, donc parfait, le corps des fractions de A est séparablement engendré sur k ([Z-S 1], Ch. II, § 13, theorem 31). Le Lemme de Normalisation de E. Nœther ([Z-S 1], Ch. V, § 4, theorem 8) nous permet alors de supposer (modulo un changement linéaire de coordonnées) que :

(1) $x_0, \dots, x_D$ sont algébriquement indépendants sur k ;

(2) $x_{D+1}, \dots, x_n$ sont séparables sur $k(x_0, \dots, x_D)$ et vérifient une relation de dépendance intégrale de la forme $Z^m + a_1 Z^{m-1} + \dots + a_m = 0$ où les a_i sont des polynômes homogènes de degré i de $k[x_0, \dots, x_D]$.

Fixons quelques notations :
$K^0 = k(x_0, \ldots, x_D)$ est identifié à $k(X_0, \ldots, X_D)$;
$A^0 = k[x_0, \ldots, x_D]$ est identifié à $k[X_0, \ldots, X_D]$;
$K = k(x_0, \ldots, x_n)$;
$\tilde{K}$ est une clôture normale de K.

Si P est un polynôme homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$ on pose :

$$\Psi_P = N_{K/K^0}\big(P(x_0, \ldots, x_n)\big) \in k(X_0, \ldots, X_D).$$

Si on note $\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta$ les différents plongements de K dans $\tilde{K}$, δ est égal au degré de $\mathfrak{P}$ (voir [M], Ch. 6, theorem 6.25, ou la remarque 1 à la fin de la démonstration) et

$$\begin{aligned}\Psi_P &= \prod_{i=1}^{\delta} \sigma_i\big(P(x_0, \ldots, x_n)\big)\\ &= \prod_{i=1}^{\delta} P\big(x_0, \ldots, x_D, \sigma_i(x_{D+1}), \ldots, \sigma_i(x_n)\big).\end{aligned}$$

Les $\sigma_i(x_j)$ sont entiers sur $k[X_0, \ldots, X_D]$ donc Ψ_P appartient à $k[X_0, \ldots, X_D]$. Si ν est le degré de P, Ψ_P est homogène de degré $\nu\delta$.

Note. — D'un point de vue géométrique les $\sigma_i(x_0, \ldots, x_n)$ sont les $\deg \mathfrak{P}$ points au dessus du point générique $(x_0, \ldots, x_D)$ et Ψ_P est une équation de la projection sur $\mathbf{P}^D$ de la variété définie par l'idéal $(\mathfrak{P}, P)$.

Notons $\tilde{A} = A^0[\sigma_j(x_i)]_{\{i=D+1,\ldots,n; j=1,\ldots,\delta\}}$; $\tilde{A}$ est entier sur A^0, de corps des fractions $\tilde{K}$.

On considère les opérateurs de "dérivation divisée" D^Λ (voir l'appendice pour leur définition et leurs propriétés), d'après la PROPOSITION 1 de l'appendice ils s'étendent de manière unique à $\tilde{K}$ car $\tilde{K}$ est séparable et finie sur K^0 ; nous noterons de la même manière ces opérateurs étendus.

Si $P_i \in A^0[Z]$ est le polynôme minimal de x_i $(i = D+1, \ldots, n)$; posons

$$\Delta_i = \prod_{s=1}^{\delta} \frac{\partial P_i}{\partial Z}\big(\sigma_s(x_i)\big) \in A^0.$$

D'après la remarque 2 de l'appendice $[(\partial P_i/\partial Z)(\sigma_s(x_i))]^{|\Lambda|} D^\Lambda(\sigma_s(x_i))$ appartient à $\tilde{A}$. Donc $\Delta_i^{|\Lambda|} D^\Lambda(\sigma_s(x_i))$ est dans $\tilde{A}$, et ainsi l'anneau $\tilde{A}[\Delta^{-1}]$, où $\Delta = \Delta_{D+1} \cdots \Delta_n$, est stable sous l'action des opérateurs D^Λ.

Choisissons un point $y = (1, y_1, \ldots, y_D)$ dans k^{D+1} tel que le polynôme Δ soit non nul en y. Puisque $\tilde{A}[\Delta^{-1}]$ est entier sur $A^0[\Delta^{-1}]$ l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \tau_0 : A^0[\Delta^{-1}] &\longrightarrow k \\ P &\longmapsto P(y) \end{aligned}$$

se prolonge en un homomorphisme τ de $\tilde{A}[\Delta^{-1}]$ dans k ([BAC], Ch. V, § 2, n° 1, corollaire 4). Nous allons montrer que l'application linéaire Φ :

$$\begin{aligned} \Phi : A_\nu &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\delta} k^{\binom{D+\nu}{D}} \quad \Big[\simeq k^{\binom{D+\nu}{D}\deg \mathfrak{P}}\Big] \\ P &\longmapsto \big(\ldots, \tau \circ D^{\Lambda_i}(\sigma_i \circ P(x_0, \ldots, x_n)), \ldots\big)_{i \in [1,\delta],\, |\Lambda_i| \leq \nu} \end{aligned}$$

est injective. Supposons en effet que $\Phi(P) = 0$, et calculons :

$$D^\Lambda \Psi_P(y) = \sum_{\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_\delta = \Lambda} \Big[\prod_{i=1}^{\delta} \tau \circ D^{\Lambda_i} \sigma_i\big(P(x_0, \ldots, x_n)\big)\Big].$$

Choisissons Λ vérifiant $|\Lambda| \leq \nu\delta$, la relation $\sum_i |\Lambda_i| \leq \nu\delta$ entraîne l'existence d'un i dans $[1, \delta]$ tel que $|\Lambda_i| \leq \nu$ donc la nullité de l'un des termes du produit correspondant à $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\delta)$. D'où la nullité de toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à $\nu\delta$ de $\Psi_P(1, X_1, \ldots, X_D)$ au point y et enfin celle de Ψ_P car l'on a vu que $\deg \Psi_P = \nu\delta$.

Remarque 1. — D'après le théorème de l'élément primitif, il existe une forme linéaire L (à coefficients dans k) telle que $u = L(x_{D+1}, \ldots, x_n)$ engendre le corps K ; u est de degré $[K : K^0]$ c'est à dire δ. Soit $P_u \in A^0[U]$ le polynôme minimal de u ; l'injection canonique $A^0[U]/P_u = k[x_0, \ldots, x_D, u] \hookrightarrow k[x_0, \ldots, x_n]$ implique la minoration :

$$H_{\mathfrak{P}}(\nu) \geq \binom{\nu + D + 1}{D + 1} - \binom{\nu + D + 1 - \delta}{D + 1}.$$

qui est valable en général sous l'hypothèse que le corps de base k est parfait (et que l'idéal $\mathfrak{P}$ est premier).

Le terme dominant en ν de $\binom{\nu+D+1}{D+1} - \binom{\nu+D+1-\delta}{D+1}$ étant $(\delta/D!)\nu^D$ on peut vérifier ainsi, en comparant avec la majoration obtenue, que δ est égal au degré de $\mathfrak{P}$.

2. Quelques conséquences

Remarquons que l'hypothèse d'équidimensionnalité n'est pas indispensable pour obtenir une majoration, on tire en effet du théorème central le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit I un idéal homogène G.R. de R. Ecrivons I sous la forme $I_1 \cap \cdots \cap I_s$ avec I_r E.G.R. de dimension $D_r \geq 0$ pour $r = 1, \dots, s$. Alors :*

$$H_I(\nu) \leq \sum_{r=1}^{s} \binom{\nu + D_r}{D_r} \deg I_r.$$

Démonstration. — L'injection canonique

$$k[X_0, \dots, X_n]/I \hookrightarrow \bigoplus_{r=0}^{s} k[X_0, \dots, X_n]/I_r$$

nous ramène au cas E.G.R.

a) *Interpolation.*

COROLLAIRE 2. — *Soit I un idéal homogène G.R. de $k[X_0, \dots, X_n]$. Ecrivons I sous la forme $I_1 \cap \cdots \cap I_s$ avec I_r E.G.R. de dimension $D_r \geq 0$ pour $r = 1, \dots, s$. Soient également des réels positifs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ tels que : $\varepsilon_1^{-1} + \cdots + \varepsilon_s^{-1} = 1$. Il existe alors un polynôme P dans I avec :*

$$\deg P \leq \max_{r \geq 1} \left\{ \left[\frac{n!}{D_r!} \varepsilon_r \deg I_r \right]^{1/(n-D_r)} \right\}.$$

Démonstration. — Pour qu'il existe un polynôme de degré ν dans I il faut et il suffit que $H_I(\nu)$ soit inférieur à $\binom{\nu+n}{n}$. Il nous suffit donc de trouver un entier ν tel que :

$$\binom{\nu + n}{n} > c_1 \binom{\nu + D_1}{D_1} + \cdots + c_s \binom{\nu + D_s}{D_s}$$

où l'on a posé $c_r = \deg I_r$. On a les implications :

$$\begin{aligned}
(\nu + 1)^{n-D_i} > \varepsilon_i c_i \Big(\frac{n!}{D_i!}\Big) & \\
&\Longrightarrow (\nu + D_i + 1) \cdots (\nu + n) > \varepsilon_i c_i (D_i + 1) \cdots (n) \\
&\Longrightarrow \binom{\nu + n}{n} > \varepsilon_i c_i \binom{\nu + D_i}{D_i}.
\end{aligned}$$

Donc $\nu > ((n!/D_i!)\varepsilon_i c_i)^{1/(n-D_i)} - 1$ pour tout $i = 1,\ldots,s$ entraîne l'inégalité désirée.

Exemple 1. — Si I est E.G.R. , il existe P dans I avec :

$$\deg P \leq \Big[\frac{n!}{D!}\deg I\Big]^{1/(n-D)}.$$

b) *Approche des variétés par des variétés intersection complète.*

Pour ne pas alourdir les calculs et les énoncés nous ne traiterons ici que du cas d'un idéal E.G.R.. Ces résultats se basent sur le lemme d'évitement suivant :

LEMME D'ÉVITEMENT. — *Soit I un idéal E.G.R. homogène de dimension $D \geq 0$ de $k[X_0,\ldots,X_n]$ et $\mathfrak{Q}$ un idéal premier homogène de dimension $\Delta > D$ de $k[X_0,\ldots,X_n]$. On suppose que k est parfait ou que $\Delta = n-1$. Il existe alors un polynôme P, appartenant à I mais pas à $\mathfrak{Q}$, avec :*

$$\deg P \leq \max\Big\{\Big[\frac{(\Delta+1)!}{D!}\deg I\Big]^{1/(\Delta-D+1)}, \Big[\frac{(\Delta+1)!}{D!}\frac{\deg I}{\deg\mathfrak{Q}}\Big]^{1/(\Delta-D)}\Big\}.$$

Démonstration. — On pose $R = k[X_0,\ldots,X_n]$. Soit $\phi : R \longrightarrow R/I$ et $\psi : R \longrightarrow R/\mathfrak{Q}$ les surjections canoniques, on cherche P dans $(\ker\phi)_\nu - (\ker\psi)_\nu$. Il suffit donc de résoudre l'inégalité : $H_{\mathfrak{Q}}(\nu) > H_I(\nu)$. D'après la *Remarque* 1 on a :

1) pour $\nu < \deg\mathfrak{Q}$, $H_{\mathfrak{Q}}(\nu) \geq \binom{\nu+\Delta+1}{\Delta+1}$;

2) pour $\nu \geq \deg\mathfrak{Q}$,

$$\begin{aligned}
H_{\mathfrak{Q}}(\nu) &\geq \binom{\nu+\Delta+1}{\Delta+1} - \binom{\nu+\Delta+1-\deg\mathfrak{Q}}{\Delta+1}\\
&= \binom{\nu+\Delta+1}{\Delta+1}\Big[1-\Big(1-\frac{\deg\mathfrak{Q}}{\nu+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\deg\mathfrak{Q}}{\nu+\Delta+1}\Big)\Big]\\
&\geq \binom{\nu+\Delta+1}{\Delta+1}\frac{\deg\mathfrak{Q}}{\nu+\Delta+1}\Big[1+\Big(1-\frac{\deg\mathfrak{Q}}{\nu+\Delta+1}\Big)+\cdots\\
&\qquad\qquad+\Big(1-\frac{\deg\mathfrak{Q}}{\nu+\Delta+1}\Big)^{\Delta}\Big].
\end{aligned}$$

Donc $$H_{\mathfrak{Q}}(\nu) \geq \frac{1}{\Delta+1}\binom{\nu+\Delta}{\Delta}\deg\mathfrak{Q}.$$

On sépare la preuve en deux cas :

1) $((\Delta+1)!/D!)\deg I < (\deg \mathfrak{Q})^{\Delta-D+1}$.

On cherche ν inférieur à $\deg \mathfrak{Q}$ tel que $\binom{\nu+\Delta+1}{\Delta+1} > \binom{\nu+D}{D}\deg I$. Cette inéquation a, comme on l'a déjà vu, une solution avec :

$$\nu \leq \left[\frac{(\Delta+1)!}{D!}\deg I\right]^{1/(\Delta-D+1)} < \deg \mathfrak{Q}$$

ce qui permet de conclure dans ce cas.

2) $((\Delta+1)!/D!)\deg I \geq (\deg \mathfrak{Q})^{\Delta-D+1}$.

Ici l'on cherche ν plus grand que $\deg \mathfrak{Q}$ vérifiant $(\Delta+1)^{-1}\binom{\nu+\Delta}{\Delta}\deg \mathfrak{Q} > \binom{\nu+D}{D}\deg I$, c'est-à-dire :

$$(\nu+\Delta)\cdots(\nu+D+1) > \frac{(\Delta+1)!}{D!}\frac{\deg I}{\deg \mathfrak{Q}}.$$

On peut trouver un tel ν inférieur à $((\Delta+1)!/D!)(\deg I)/(\deg \mathfrak{Q})^{1/(\Delta-D)}$; cette valeur est plus grande que $\deg \mathfrak{Q}$ dans ce cas, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 3. — *Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier G.R. homogène de codimension deux de $k[X_0,\ldots,X_n]$, il existe deux polynômes P_1 et P_2 dans $\mathfrak{P}$, sans facteur commun, avec :*

$$\deg P_1 \deg P_2 \leq n(n-1)\deg \mathfrak{P}.$$

Démonstration. — On prend P_1 irréductible de degré minimal appartenant à $\mathfrak{P}$. Le degré de P_1 est majoré par $\sqrt{n(n-1)\deg \mathfrak{P}}$ (exemple 1) et d'après le lemme, il existe P_2 dans $\mathfrak{P}-(P_1)$ avec

$$\deg P_2 \leq \max\left\{\left[n(n-1)\deg \mathfrak{P}\right]^{1/2},\, n(n-1)\frac{\deg \mathfrak{P}}{\deg P_1}\right\}$$

d'où la conclusion.

Exemple 2. — Si k est un corps et $\mathcal{C}$ une courbe irréductible géométriquement réduite de $\mathbf{P}^3_k$ (*i.e.* définie par un idéal premier G.R. homogène de $k[X_0,\ldots,X_3]$) ; il existe une courbe $\mathcal{C}'$ contenant $\mathcal{C}$, intersection complète et de degré majoré par six fois le degré de $\mathcal{C}$.

De cela on déduit facilement que le genre arithmétique de $\mathcal{C}$ vérifie :

$$p_a(\mathcal{C}) \leq \frac{(6d)^2}{2\mathrm{k}} + 3d(\mathrm{k}-4)+1$$

où d désigne le degré de $\mathcal{C}$ et k le degré minimal d'une surface contenant $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE 4. — *Si I un idéal homogène E.G.R. de dimension D de $k[X_0, \dots, X_n]$, il existe une suite régulière $P_1, \dots, P_{n-D}$ de polynômes homogènes de I avec :*

$$\deg P_r \leq \left[\frac{(D+r)!}{D!} \deg I\right]^{1/r}.$$

Démonstration. — On a, pour tout idéal $\mathfrak{P}_i$ de dimension Δ, la minoration $H_{\mathfrak{P}_i}(\nu) \geq \binom{\nu+\Delta}{\Delta}$; car il existe $\Delta+1$ éléments homogènes de degré 1, algébriquement indépendants dans $k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{P}_i$.

En utilisant la même méthode que dans le lemme précédent, on montre qu'il existe P dans $I - \mathfrak{P}_i$ avec

$$\deg P \leq \left[\frac{\Delta!}{D!} \deg I\right]^{1/(\Delta-D)}.$$

On procède par récurrence sur la longueur de la suite régulière ; on a vu comment l'on pouvait choisir P_{n-D} au COROLLAIRE 2.

Supposons donc construits $P_{n-D}, \dots, P_{r+1}$. D'après le théorème de MACAULEY, les idéaux premiers associés à l'idéal $(P_{n-D}, \dots, P_{r+1})$ sont tous de même dimension $D+r$. Pour chacun de ces idéaux $\mathfrak{P}_i$ on peut trouver un polynôme Q_i appartenant à I mais pas à $\mathfrak{P}_i$, de degré majoré par $[((D+r)!/D!) \deg I]^{1/(D+r-D)}$; une combinaison linéaire générale de ces polynômes répond aux conditions imposées.

c) *Retour à l'interpolation.*

Le lemme d'évitement nous permet également d'étendre les résultats d'interpolation dans le cas d'un idéal premier G.R. C'est l'objet du corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. — *Soient $s \in \{1,2\}$ et $\mathfrak{P}$ un idéal premier G.R. de codimension $r \geq s$ dans $k[X_0, \dots, X_n]$. Il existe alors un idéal premier $\mathfrak{Q}$, homogène de codimension s, contenu dans $\mathfrak{P}$ et tel que :*

$$\deg \mathfrak{Q} \leq c(n,r,s)\left[\deg \mathfrak{P}\right]^{s/r}$$

où $c(n,r,s)$ est une constante ne dépendant que de n, r et s. On peut prendre : $c(n,r,1) = [n!/(n-r)!]^{1/r}$ et $c(n,r,2) = [n!/(n-r)!]^{2/r}$.

Démonstration. — Soient δ le degré de $\mathfrak{P}$ et $c = [n!(n-r)!]^{1/r}$. D'après le COROLLAIRE 2, il existe P_1 dans $\mathfrak{P}$, irréductible de degré d_1 majoré par $c\delta^{1/r}$; ce qui résoud le cas $s = 1$.

Si s est plus grand que 1 le lemme d'évitement nous fournit P_2 dans $\mathfrak{P} - (P_1)$ tel que :

$$\deg P_2 \leq \max\left\{c\delta^{1/r}, c^{r/r-1}\left[\delta/d_1\right]^{1/(r-1)}\right\}.$$

L'égalité $1/(r-1) + (1/r)[1 - 1/(r-1)] = 2/r$ nous donne l'inégalité $d_1 d_2 \leq c^2 \delta^{2/r}$, ce qui résoud le cas $s = 2$ en prenant pour $\mathfrak{Q}$ un des idéaux premiers associés à (P_1, P_2) contenus dans $\mathfrak{P}$, le théorème de Macaulay entraînant que les idéaux premiers associés à (P_1, P_2) sont tous de codimension deux.

Appendice : Extension des "dérivations divisées".

(En collaboration avec J.-F. BURNOL.)

Nous démontrons ici des résultats qui semblent "bien connus" — dans le cas des polynômes à une variable ces opérateurs sont déjà étudiés dans [T] — mais pour lesquels nous n'avons pu trouver de référence adéquate.

Notations. — Par souci de lisibilité nous utiliserons les notations condensées usuelles pour traiter des polynômes à plusieurs variables, par exemple l'anneau $k[X_1, \ldots, X_D]$ pourra se noter $k[X]$.

D'autre part, si $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_D)$ et $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_D)$ sont deux éléments de $\mathbf{N}^D$, $\Theta \leq \Lambda$ signifie que θ_i est inférieur ou égal à λ_i pour tout i entre 1 et D ; et $|\Lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_D$.

Introduisons les opérateurs de "dérivation" suivants (voir [BA], Ch. IV, § 1, n° 4) : si P appartient à $k[X_1, \ldots, X_D]$, $P(X) = \sum_I a_I X^I$;

$$D^\Lambda P(X) = \sum_{I \geq \Lambda} \binom{I}{\Lambda} a_I X^{I-\Lambda} \quad \text{avec} \quad \binom{I}{\Lambda} = \binom{i_1}{\lambda_1} \cdots \binom{i_D}{\lambda_D}.$$

On a ainsi les formules :

$$P(X+T) = \sum_\Lambda D^\Lambda P(X) T^\Lambda,$$

$$D^\Lambda(P_1 \cdots P_s) = \sum_{\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_s = \Lambda} D^{\Lambda_1} P_1 \cdots D^{\Lambda_s} P_s.$$

La première formule montre qu'un polynôme de degré au plus d est nul si toutes ses "dérivées divisées" d'ordre inférieur ou égal à d sont nulles en un point.

On va étendre ces dérivations et ces formules à $K^0 = k(X_1, \ldots, X_D)$, puis aux extensions algébriques finies de K^0 à l'aide du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit A un anneau (commutatif unitaire) intègre et $P \in B = A[X_1, \ldots, X_D][Z]$ un polynôme tel que $P'_Z = \partial P/\partial Z$ soit non nul. Il existe alors une unique serie formelle $U(T) \in S^{-1}B[[T_1, \ldots, T_D]]$ telle que :*

$$P\big(X + T, Z + U(T)\big) = P(X, Z)$$

où S est la partie multiplicative engendrée par P'_Z.

Démonstration. — Si $G \in S^{-1}B[[T]]$ on pose

$$\Phi_G(X, Z, T) = P(X + T, Z + G(T)) - P(X, Z).$$

On va montrer par récurrence l'existence d'un polynôme U_n de $S^{-1}B[T]$ tel que :

$(1)_n$ $\mathrm{ord}_T \Phi_{U_n} \geq n + 1$;

$(2)_n$ $U_0 = 0$ et $U_n(T) = U_{n-1}(T) + \sum_{|\Upsilon|=n} A_\Upsilon T^\Upsilon$ avec $A_\Upsilon \in S^{-1}B$ pour $n \geq 1$.

Si $G \in S^{-1}B[[T]]$ on a pour Φ_G la formule :

$$\Phi_G(X, Z, T) = \sum_{\Lambda=(\Theta,m)>0} D^\Lambda P(X, Z) T^\Theta G^m,$$

ce qui montre que $U_0 = 0$ vérifie $(1)_0$.

Supposons maintenant construit U_{n-1} vérifiant $(1)_{n-1}$ et cherchons U_n de la forme imposée par $(2)_n$ et vérifiant $(1)_n$. On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{U_n} &= \sum_{\Lambda=(\Theta,m)>0} D^\Lambda P\, T^\Theta \Big(U_{n-1}(T) + \sum_{|\Upsilon|=n} A_\Upsilon T^\Upsilon\Big)^m \\
&= \Phi_{U_{n-1}} + D^{(0,\ldots,0,1)} P \sum_{|\Upsilon|=n} A_\Upsilon T^\Upsilon + R_1(T) \\
&= \sum_{|\Upsilon|=n} B_\Upsilon T^\Upsilon + P'_Z \sum_{|\Upsilon|=n} A_\Upsilon T^\Upsilon + R_2(T)
\end{aligned}$$

où R_1 et R_2 sont des séries d'ordre supérieur ou égal à $n+1$ et $B_\Upsilon \in S^{-1}B$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de prendre $A_\Upsilon = -B_\Upsilon / P'_Z$ dans $S^{-1}B$.

Pour démontrer l'unicité l'on remarque tout d'abord qu'une telle série doit avoir un terme constant nul, et ensuite que le calcul fait ci-dessus montre que l'égalité jusqu'à l'ordre n implique l'égalité à l'ordre $n+1$.

Remarque 2. — Si $U(T) = \sum_\Lambda \alpha_\Lambda T^\Lambda$ on a $[\partial P/\partial Z]^{|\Lambda|}\alpha_\Lambda \in A[X, Z]$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat annoncé.

PROPOSITION 1. — *Les opérateurs D^Λ s'étendent de manière unique à $K^0 = k(X_1, \ldots, X_D)$, ainsi qu'aux extensions finies séparables K de K^0, en des opérateurs vérifiant :*

(a) *$D^0(F) = F$ pour tout $F \in K$,*

(b) *Pour tout couple (F, G) d'éléments de K :*

$$D^\Lambda(F+G) = D^\Lambda F + D^\Lambda G \qquad \textit{et} \qquad D^\Lambda(FG) = \sum_{\Theta+\Upsilon=\Lambda} D^\Theta F D^\Upsilon G.$$

Démonstration. — L'unicité est claire, les formules :

$$D^\Lambda(1/Q) = -(1/Q) \sum_{0<\Theta\leq\Lambda} D^\Theta Q D^{\Lambda-\Theta}(1/Q)$$

et $$D^\Lambda(z) = -\frac{1}{P'_z} \sum_i \Bigg(\sum_{\substack{\Theta+\Upsilon_1+\cdots+\Upsilon_i=\Lambda \\ \Upsilon_j\neq\Lambda,\, j=1,\ldots,i}} D^\Theta(a_i) D^{\Upsilon_1}(z) \cdots D^{\Upsilon_i}(z) \Bigg)$$

qui découlent, grâce aux règles de dérivation, des identités $D^\Lambda Q(1/Q) = 0$ et $D^\Lambda P(z) = 0$ (où $P(z) = \sum_i a_i z^i$) montrent en effet que si $Q \in k[X]$ (respectivement si P est le polynôme minimal de $z \in K$) la "dérivée" $D^\Lambda(1/Q)$ (respectivement $D^\Lambda(z)$) doit s'exprimer de cette manière à l'aide des "dérivées" d'ordre inférieur.

On commence par étendre D^Λ à K^0 : si $z \in K^0$ s'écrit sous la forme $z = P(X)/Q(X)$ avec $Q(X) \neq 0$, du LEMME 1 l'on déduit l'existence d'une unique série formelle $U(T)$ dont les dénominateurs sont des puissances de Q et telle que :

$$U(T) = \frac{P(X+T)}{Q(X+T)} - \frac{P(X)}{Q(X)}.$$

Si $U(T) = \sum_\Lambda A_\Lambda T^\Lambda$, on pose $D^\Lambda(P/Q) = A_\Lambda$ pour $\Lambda > 0$. De par la définition de U, il est clair que la valeur de $D^\Lambda(z)$ ne dépend pas de la représentation choisie pour z, correspond à la définition précédente si z est dans $k[X]$ et vérifie les propriétés imposées qui proviennent des règles de multiplication des séries formelles.

Passons maintenant au cas des extensions algébriques finies séparables. Le théorème de l'élément primitif permet de se limiter au cas des extensions monogènes ; soit donc une extension $K = K^0[z]$. Soit $P \in k[X][Z]$ un multiple non nul du polynôme minimal de z. D'après le LEMME 1, il existe une unique série formelle $U(T) = \sum_\Lambda \alpha_\Lambda T^\Lambda$ appartenant à $S^{-1}k[X][Z]$ où $S = \{[P'_Z]^n, n \geq 0\}$ et telle que :

$$P(X+T, Z+U(T)) = P(X,Z).$$

De ce que l'on vient de voir en étendant les opérateurs D^Λ à K^0, on déduit que si F appartient à $K^0[Z]$, il existe une unique série formelle $U_F(T)$ dans $S^{-1}K^0[Z]$ telle que :

$$U_F(T) = F(X+T, Z+U(T)) = \sum_\Lambda A_\Lambda^P(F)T^\Lambda.$$

On a les propriétés suivantes : pour F et G dans $K^0[Z]$;

(1) $A_\Lambda^P(F+G) = A_\Lambda^P(F) + A_\Lambda^P(G)$;

(2) $A_\Lambda^P(FG) = \sum_{\Theta+\Upsilon=\Lambda} A_\Theta^P(F)A_\Upsilon^P(G)$;

(3) $A_\Lambda^P(F) = D^\Lambda F$ si $F \in K^0$;

(3) (4) $A_0^P(P) = P$ et $A_\Lambda^P(P) = 0$ pour $\Lambda > 0$.

De (2) et (4) on déduit :

(5) $A_\Lambda^P(FP) \in PS^{-1}K^0[Z]$.

Les propriétés (1) et (5) montrent qu'il existe une application $\tilde{A}_\Lambda^P$ de $K^0[Z]/(P(Z))$ dans $S^{-1}K^0[Z]/S^{-1}P$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & K^0[Z] \arrow[r, "A_\Lambda^P"] \arrow[d] & S^{-1}K^0[Z] \arrow[d] & \\
K^0[z] \arrow[r, "\phi"] & K^0[Z]/(P) \arrow[r, "\tilde{A}_\Lambda^P"] & S^{-1}K^0[Z]/S^{-1}P \arrow[r, "\psi"] & K^0[z]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les surjections canoniques, ϕ l'isomorphisme évident et enfin ψ l'identification provenant de ce que P'_Z est inversible dans $K^0[Z]/(P)$.

On définit alors D^Λ par $D^\Lambda = \psi \circ \tilde{A}_\Lambda^P \circ \phi$. Les propriétés (1) à (3) montrent que D^Λ vérifie bien les conditions imposées.

Note. — J. KOLLÁR nous a indiqué récemment une autre démonstration, plus géométrique, d'une majoration du même ordre. Il utilise la suite exacte longue de cohomologie, déduite de la suite exacte courte de faisceaux, correspondant à une section hyperplane générique, pour se ramener au cas de dimension un, le résultat se déduit alors du théorème de Riemann-Roch.

Je le remercie beaucoup de m'avoir signalé cette autre démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[BA] BOURBAKI (N.). — *Algèbre Ch. 4 à 7.* — Masson, 1981.

[BAC] BOURBAKI (N.). — *Algèbre Commutative Ch. 1 à 9 (en trois volumes).* — Masson, 1983 *et* 1985.

[D] DEMAZURE (M.). — Fonctions d'Hilbert Samuel, d'après Macaulay, Stanley et Bayer, *Notes informelles de calcul formel, prépublications du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1984.

[F] FULTON (W.). — *Intersection Theory.* — Springer-Verlag, 1984.

[H] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry.* — Springer-Verlag, 1977.

[Ne] NESTERENKO (Y.). — Estimates for the characteristic function of a prime ideal, *Translation of the American Mathematical Society*, 1985, *from the Math. USSR Sb.*, **51**.

[No] NORTHCOTT (D.G.). — *Lessons on Rings Modules and Multiplicities.* Cambridge University Press, 1968.

[M] MUMFORD (D.). — *Algebraic geometry I. Complex Projective Varieties.* — Springer-Verlag, 1976.

[S] SERRE (J.-P.). — Algèbre locale et multiplicités, *Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics*, n° **11**, 1965.

[T] TEICHMÜLLER (O.). — Differentialrechnung bei Charakteristik p, *J. reine angew. Math.*, t. **175**, 1936, p. 89–99.

[Z-S 1] et [Z-S 2] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Commutative Algebra, vol. 1 et vol. 2.* — Springer-Verlag, 1960.